ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

25

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG.
1902.

BERLIN
MAYER & MÜLLER
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

CENTRALTRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

REDACTION

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 25. — 1902. — TOME 25.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE ET D'ORDRE SUPÉRIEUR DONT L'INTÉGRALE GÉNÉRALE EST UNIFORME

PAR

P. PAINLEVÉ

À PARIS.

1$^{\text{ER}}$ MÉMOIRE.

1. La détermination des transcendantes uniformes définies par les équations différentielles algébriques est un problème qui se trouve posé en fait depuis les travaux d'ABEL et de JACOBI sur l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2y^2).$$

C'est l'étude de cette équation qui a engendré la théorie des fonctions elliptiques et (par extension) celle des fonctions uniformes. Cette dernière théorie une fois fondée, il s'agissait moins de construire artificiellement des transcendantes nouvelles que de découvrir, dans l'immense famille des transcendantes uniformes, celles qui peuvent servir à intégrer les équations différentielles. La fonction *exponentielle*, les fonctions *elliptiques* étaient les premiers types de telles fonctions; on ne tarda pas à en découvrir d'autres, à savoir les fonctions *abéliennes*, puis les intégrales uniformes des équations différentielles *linéaires*; enfin les fonctions *fuchsiennes* ou *automorphes, hyperfuchsiennes,* etc.

Mais l'étude de ces nouvelles transcendantes, si importante qu'elle fût, ne permettait en aucune manière d'épuiser le problème qui se posait dès lors naturellement:

Déterminer toutes les équations différentielles algébriques du premier ordre, puis du second ordre, puis du troisième ordre, etc., dont l'intégrale est uniforme.

2. Quand on approfondit ce problème, on se trouve conduit nécessairement à le décomposer en deux problèmes successifs.

Étant donnée une équation différentielle quelconque, les points critiques d'une intégrale $y(x)$ sont, les uns *fixes* (indépendants des constantes d'intégration), les autres *mobiles* (variables avec ces constantes); pour exprimer que l'intégrale est uniforme, il convient d'exprimer d'abord qu'elle n'a pas de points critiques *mobiles*, ensuite qu'elle n'a pas de points critiques *fixes*; et ces deux parties du problème exigent des méthodes toutes différentes.

On est amené ainsi à élargir la classe d'équations considérées et à étudier *les équations dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes.*[1]

Ces équations présentent d'ailleurs, en elles-mêmes, un intérêt considérable; elles constituent en effet le prolongement naturel des équations *linéaires*. Toutes les propriétés des équations linéaires qu'entraine la fixité des points critiques, s'étendent aux nouvelles équations, en particulier la méthode d'intégration par les fonctions fuchsiennes. On conçoit donc, sans qu'il faille insister davantage, l'importance du problème qui consiste à déterminer, parmi les équations différentielles algébriques, *les équations à points critiques fixes.*

Historique de la question.

3. Dès 1855, M. Méray, Briot et Bouquet,[2] Weierstrass,[3] se sont attaqués au problème dans un cas particulier, en étudiant les équa-

[1] Nous réservons exclusivement le nom de points *critiques* d'une fonction $y(x)$ aux points singuliers (isolés ou non) autour desquels deux branches au moins de $y(x)$ se permutent. L'intégrale générale d'une équation à points critiques fixes peut présenter des singularités essentielles mobiles.

[2] Comptes-Rendus de l'Académie des sciences de Paris (1855—1856); Journal de l'École Polytechnique, tome 21, cahier 36 (1856). — Voir aussi la *Théorie des fonctions elliptiques* (2me édition), livre 5, chapitre 4.

[3] Les résultats de Weierstrass, qui servent de base à sa théorie des fonctions elliptiques, semblent remonter à la même époque. Ils ont été enseignés mais non publiés

tions du *premier* ordre, *indépendantes de x*, soit $F\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = 0$, dont l'intégrale est uniforme. Les transcendantes ainsi définies se confondent d'ailleurs avec les fonctions elliptiques et leurs dégénérescences.

Trente ans plus tard, M. FUCHS,[1] généralisant les recherches de BRIOT et BOUQUET, a déterminé les équations différentielles (algébriques) du *premier* ordre dont les points critiques sont fixes; mais par une brillante méthode d'intégration, M. POINCARÉ[2] montrait presque aussitôt que ces équations sont toujours réductibles aux quadratures ou aux équations linéaires du second ordre.[3] Les équations à points critiques fixes d'ordre supérieur au premier peuvent donc seules définir des transcendantes nouvelles.

C'est M. PICARD qui, le premier, a abordé la théorie des équations du *second* ordre à intégrale générale uniforme ou à points critiques fixes. Entre les années 1880 et 1895, il a consacré à cette théorie plusieurs mémoires[4] du plus haut intérêt. Mais les efforts de l'illustre géomètre,

---

[1] Berlin. Sitzungsberichte, 1884, p. 699—720.

[2] Comptes Rendus Juillet 1884. Acta mathematica (tome 7) 1885, p. 1—32.

[3] D'une façon précise, l'équation s'intégre algébriquement, ou se ramène algébriquement soit à une équation de RICCATI, soit à l'équation:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = u(x)dx, \quad [u \text{ fonction algébrique de } x;\ k \text{ numérique}].$$

[4] Les principaux de ces mémoires sont les suivants:

Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique et sur une classe d'équations différentielles [Comptes Rendus 1880, t. 91, et Bulletin des sciences mathématiques 1880, t. 4 (2^e^ série)].

Sur la transformation des surfaces et sur une classe d'équations différentielles (Comptes Rendus 1886, t. 103).

Sur une classe d'équations différentielles (Comptes Rendus 1887, t. 104).

Mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables (Journal de Liouville 1889, t. 5, p. 223—249 et p. 263—319).

Sur des fonctions d'une variable dépendant de deux constantes arbitraires (Comptes Rendus 1892, t. 114).

Remarques sur les équations différentielles (Acta mathematica 1893, t. 17).

Sur une classe de transcendantes nouvelles (Comptes Rendus 1893, t. 117, et Acta mathematica 1894, t. 18).

Sur une classe d'équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme (Comptes Rendus 1893, t. 117).

aussi bien que les efforts de tous ceux qui sont venus à sa suite, se sont heurtés à une difficulté qui ne se présentait pas dans le cas du premier ordre[1]: à savoir l'existence de *singularités essentielles mobiles* des intégrales.

Je crois utile d'insister sur la gravité exceptionnelle de cette difficulté.

4. Considérons une équation du second ordre

$$y'' = \frac{P(y', y, x)}{Q(y', y, x)},$$

où P et Q sont des polynomes en y', y, x; et soit y'_0, y_0, x_0 des valeurs qui n'annulent pas à la fois P et Q. On sait étudier, dans le voisinage

---

Sur l'inversion des intégrales à multiplicateurs (American Journal 1894, t. 16, et Traité d'Analyse t. 3, p. 66—80).

Sur une classe d'équations différentielles dont l'intégrale est uniforme (Comptes Rendus 1895, t. 120).

[1] Les singularités transcendantes des intégrales $y(x)$ d'une équation différentielle (algébrique) *du premier ordre*

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0$$

sont des points *fixes en nombre fini*, dont les affixes se calculent algébriquement sur l'équation même; j'ai démontré ce théorème pour la première fois dans ma thèse (*Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, Paris, Juin 1887, p. 38). J'en ai déduit cette conséquence que, si l'équation $F = 0$ a ses points critiques fixes, *l'intégrale $y(x)$ renferme algébriquement la constante y_0* (valeur de y pour la valeur numérique x_0 de x). Ces deux propositions (qui sont l'une et l'autre en défaut pour les équations du second ordre) mettent à l'abri de toute objection les travaux (cités plus haut) de M. Fuchs et de M. Poincaré. M. Fuchs se bornait à exprimer que l'équation $F = 0$ ne présente pas de points critiques *algébriques* mobiles: il n'en résultait pas que l'équation eût ses points critiques fixes, étendues au second ordre, les conditions de M. Fuchs conduisaient à des équations possédant des points critiques *transcendants* mobiles; si les conditions de M. Fuchs se trouvent être suffisantes pour le premier ordre, »la véritable raison«, dit M. Picard (Acta mathematica, t. 17, p. 298) »en est dans le théorème de M. Painlevé«. Les travaux de Briot et Bouquet prêtaient d'ailleurs à la même objection, mais non ceux de Weierstrass.

La méthode de M. Poincaré, au contraire, n'introduisait sûrement que des équations à points critiques fixes; mais comme elle supposait implicitement l'intégrale $y(x)$ algébrique en y_0, on pouvait se demander si elle les épuisait toutes. Étendue au second ordre, cette admirable méthode d'intégration est bien loin de donner toutes les équations à points critiques fixes, ainsi qu'on s'en rendra compte plus loin (n° 29).

Voir, au sujet de cette discussion, mes leçons de Stockholm (p. 23—60 et 443—462).

de x_0, l'intégrale $y(x)$ définie par les conditions initiales $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0$. Quand y'_0, y_0, x_0 annulent à la fois P et Q, le point x_0 est, en général, une singularité *transcendante* des intégrales $y(x)$ définies par ces conditions initiales, et c'est seulement dans des cas particuliers que les méthodes de M. POINCARÉ (en dépit de perfectionnements récents) permettent d'étudier ces intégrales; on conçoit cependant qu'il soit possible d'étendre ces méthodes à des cas de plus en plus généraux. Mais quand on poursuit l'étude d'une intégrale $y(x)$ le long d'un chemin quelconque du plan des x, il arrive qu'on rencontre des points singuliers $x=a$ d'une espèce toute différente: à savoir des points $x=a$ telsque y ou y' ne tende vers aucune limite (finie ou non) quand x tend vers a.

Prenons comme exemple l'équation:

$$y''=y'^2\frac{2y-1}{1+y^2},$$

dont l'intégrale générale est:

$$y=\operatorname{tg}[\log(Ax+B)],\quad A, B \text{ constantes arbitraires.}$$

Quand x tend vers le point $-\frac{B}{A}$ sur une direction quelconque, $y(x)$ est indéterminée. Une infinité de valeurs de y se permutent, d'ailleurs, autour de ce point, qui est à la fois point essentiel et point critique de $y(x)$.

Comme exemple plus frappant, citons encore l'équation suivante (où y figure algébriquement dans le coëfficient différentiel):

$$y''=y'^2\left[\frac{y[2k^2y^2-(1+k^2)]}{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+\frac{1}{\lambda\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\right],$$

(λ, k^2, constantes numériques).

On voit aisément que l'intégrale $y(x)$ de cette équation ne présente pas de points singuliers algébriques autres que des pôles; d'une discussion plus approfondie, il ressort même que toute intégrale $y(x)$ qui tend vers une valeur déterminée (finie ou non) quand x tend vers a sur un certain chemin, est holomorphe ou méromorphe pour $x=a$. Ce serait cependant commettre une erreur grossière que d'en conclure que l'intégrale $y(x)$ est méromorphe dans le plan. L'intégrale de l'équation peut en effet s'écrire:

$$y=sn_k[\lambda\log(Ax+B)],\quad A, B \text{ constantes arbitraires;}$$

le point $x = -\frac{B}{A}$ est donc un point d'indétermination complète de $y(x)$; quand x tend vers $-\frac{B}{A}$ sur un chemin donné (quel qu'il soit), $y(x)$ ne tend vers aucune limite (finie ou non); de plus, une infinité de valeurs de $y(x)$ se permutent autour de ce point (à moins que $2i\pi\lambda$ ne soit une période ou une partie aliquote d'une période de sn_{k^2}).

Pour que l'intégrale de l'équation ait ses points critiques fixes (c'est-à-dire, ici, soit uniforme), il faut et il suffit que $2i\pi\lambda$ soit une période de sn_{k^2}, *condition transcendante* qu'on ne sait pas vérifier (λ et k^2 étant donnés) à l'aide d'un nombre fini d'opérations.[1]

Enfin, des types classiques d'équations du 3^e^ ordre montrent que les singularités essentielles des intégrales peuvent affecter les dispositions les plus compliquées, former des ensembles *parfaits* discontinus, des lignes (analytiques ou non analytiques), etc. . . . Pour démontrer que les intégrales $y(x)$ d'une équation différentielle (algébrique) ne présentent pas de singularités transcendantes mobiles, nous n'avons le droit d'introduire *a priori* aucune restriction: une discussion qui écarterait d'avance certaines singularités comme invraisemblables serait *inexistante*.

5. On conçoit immédiatement la profondeur de la difficulté que crée l'existence toujours possible de telles singularités, variables avec les constantes d'intégration et que rien ne met en évidence sur l'équation différentielle. Comment étudier une intégrale dans le voisinage d'un point où sa valeur est indéterminée? *Comment, avant tout, discerner si de telles singularités existent ou non?* A ces questions, les méthodes dérivées de la doctrine de Cauchy ne semblaient pas susceptibles de répondre. Un tel obstacle pouvait donc, à bon droit, être jugé insurmontable.

C'est la conclusion à laquelle aboutissait M. Picard dans les derniers travaux qu'il a consacrés à ce genre de problèmes. »On a fondé autrefois, écrivait-il[2] en 1892, les plus grandes espérances sur l'étude des équations différentielles ordinaires; on pensait ainsi obtenir de nombreuses classes bien définies de transcendantes nouvelles. Il faut reconnaître que, si on laisse de côté les équations linéaires, ces espérances ont été jusqu'ici, à

[1] Voir Picard, Acta mathematica 1893, t. 17, p. 298.

[2] Comptes Rendus 1892, t. 114, p. 1310.

peu près déçues.» Après avoir rappelé que les équations différentielles à intégrale uniforme (ou à points critiques fixes), ne sauraient définir des transcendantes nouvelles sans être au moins du second ordre, M. Picard ajoutait: »Malheureusement, une différence considérable se présente dès le début de la théorie (entre les équations du premier ordre, et les équations d'ordre supérieur). On peut, étant donnée une équation du premier ordre, reconnaître sur l'équation elle-même si les points critiques sont fixes; il n'en est plus ainsi pour les équations du second ordre . . . Les conditions sont de nature transcendante: il est impossible, en général, de les former.»

Dans un mémoire ultérieur,[1] revenant sur l'existence des singularités essentielles mobiles, M. Picard constatait que, seule, l'intégration effective d'une équation différentielle (j'entends sa réduction aux quadratures et aux équations linéaires) permettait d'affirmer l'uniformité de son intégrale. »Ces réflexions», disait-il en terminant, »ne sont pas en définitive très encourageantes. Il est peu probable que les équations d'ordre supérieur, à points critiques fixes, puissent conduire à l'étude de transcendantes nouvelles.»[2]

6. Cet obstacle qui faisait échec »aux grandes espérances fondées sur l'étude des équations différentielles», je suis parvenu à le surmonter dans le cours de ces trois dernières années. J'ai pu en particulier résoudre le problème suivant:

Parmi les équations

$$y'' = R(y', y, x)$$

où R est rationnel en y', algébrique[3] *en y et en x, déterminer explicitement toutes les équations à points critiques fixes.*

[1] Acta mathematica 1893, t. 17, p. 300.

[2] M. Picard ajoutait il est vrai: »J'espère beaucoup plus de ces systèmes d'équations aux dérivées partielles ... que j'ai sommairement indiqués dans une note des Comptes Rendus *(Sur des fonctions d'une variable dépendant de deux constantes réelles arbitraires, juin* 1892).»

Mais ces systèmes, en réalité, équivalent à une équation ordinaire du premier ordre (voir le n° 9).

[3] Il est même loisible de supposer R non pas *algébrique en x* mais simplement *analytique en x.*

Mais avant d'exposer mes propres recherches, je voudrais indiquer avec précision les résultats antérieurement acquis.[1]

7. Les deux premiers mémoires cités de M. Picard[2] sont relatifs aux équations algébriques

$$F(y'', y) = 0$$

et déterminent toutes celles de ces équations dont l'intégrale générale $y(x)$ est uniforme. Par la suite, M. Picard[3] a traité le même problème pour les équations

$$y'' = y'^2 A(y)$$

où A est algébrique en y. Mais ces deux types d'équations sont *intégrables*, et les transcendantes uniformes qu'ils engendrent sont banales.

---

[1] Je laisse entièrement de côté dans cet historique les travaux (de Weierstrass, de M. Picard, de M. Poincaré, etc.) relatifs aux équations à points critiques fixes dont l'intégrale renferme *algébriquement* les constantes d'intégration. J'ai montré, en effet (*Leçons de Stockholm*, p. 351—394), *que toute équation différentielle (algébrique) dont l'intégrale est une fonction algébrique des constantes, se ramène algébriquement aux quadratures ou aux équations linéaires.* Pour nous limiter au second ordre, le théorème précis est le suivant:

ou bien l'intégrale $y(x)$ est une fonction algébrique de u, v, x, où $u(x)$, $v(x)$ sont donnés par un des systèmes

$$\frac{du}{dx}\begin{cases} = -u^2 + A(x, v) \\ = a(x)\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)} \end{cases}, \qquad \frac{dv}{dx}\begin{cases} = -v^2 + b(x) \\ = c(x)\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)} \end{cases}$$

(A fonction algébrique de x, v; a, b, c de x; k et $\varkappa$ numériques);

ou bien $y(x)$ s'exprime algébriquement à l'aide de x et de deux fonctions hyperelliptiques, $\varphi(u, v)$, $\chi(u, v)$, dont les deux arguments sont deux intégrales abéliennes en x, soit $u = \int a(x)dx$, $v = \int b(x)dx$,

ou enfin, $y(x)$ est une fonction algébrique de (x, u, u'), u désignant la dérivée logarithmique $\frac{z'}{z}$ de l'integrale z d'une équation linéaire, homogène du 3e ordre.

[2] Comptes Rendus 1880, t. 91, p. 1058, et Bulletin des sc. math., t. 4 (2e série), p. 416. M. Picard se limite au cas où $y(x)$ est supposée *méromorphe* dans le plan.

[3] Journal de Liouville 1889, 4e série, t. 5, p. 300—318; American Journal 1894, t. 16, p. 111—122; Traité d'Analyse, t. 3, p. 67—80. M. Picard ne considère que le cas où l'expression $e^{\int A(y)dy}$ n'a pas de points singuliers transcendants.

C'est surtout aux équations

$$(1) \qquad y'' = R(y', y)$$

où R est rationnel en y', y, que s'est attaché M. PICARD.[1] Le procédé de M. PICARD consiste à former des conditions *suffisantes*[2] pour que l'intégrale $y(x)$ n'ait ni points critiques algébriques, ni points critiques transcendants *d'une certaine espèce particulière.* L'intégrale est dite alors *à apparence uniforme:* mais est-elle vraiment uniforme? Des exemples particuliers montraient qu'il n'en était rien. Les conditions en question n'étaient donc pas *suffisantes* en général. J'ajoute que ces conditions *ne limitaient point le degré de R en y et ne laissaient pas soupçonner qu'une telle limitation fût possible.*

Les auteurs qui ont poursuivi les mémorables recherches de M. PICARD sur les intégrales *à apparence uniforme,* tels que MM. WALLENBERG,[3] FORSYTH,[4] etc., n'ont fait qu'appliquer les conditions du géomètre Français à des types simples d'équations.

Pour les équations de la forme:

$$y'' = y'(ay + b) + Ay^3 + By^2 + Cy + D,$$

M. MITTAG-LEFFLER[5] et, après lui, M. FRANSÉN[6] ont montré que les conditions de M. PICARD entraînent *l'intégrabilité* de l'équation; les fonctions $y(x)$ qu'on obtient en effectuant l'intégration sont des fonctions uniformes élémentaires.

8. Disons maintenant un mot des équations (1) (à points critiques fixes) *où x figure explicitement.* M. PICARD[7] ne s'est occupé de ces équations que dans le cas particulier où elles sont de la forme:

$$(2) \qquad y'' = y'[a(x)y + b(x)] + A(x)y^3 + B(x)y^2 + C(x)y + D(x).$$

[1] Journal de LIOUVILLE 1889, 4e série, t. 5, p. 277—293.

[2] Comme ces conditions n'étaient établies que moyennant certaines hypothèses simplificatrices faites sur l'équation (1), il n'était pas démontré qu'elles fussent *nécessaires* pour que l'intégrale fût uniforme.

[3] CRELLE, 1898, t. 119, p. 87—113, et 1899, t. 120, p. 113—131.

[4] Theory of differential equations, t. III, p. 276—306.

[5] Acta mathematica, t. 18 (1894), p. 233—245.

[6] Stockh. öfv., t. 52 (1895), p. 223—241.

[7] Acta Mathematica, t. 17 (1893), p. 296—300.

Imitant le procédé connu de Madame Kowaleski, M. Picard cherche les conditions pour que l'intégrale $y(x)$ admette des pôles mobiles. Il peut exister deux familles de pôles, et l'existence de chaque famille entraîne une condition entre a, b, A, B, C, D et leurs dérivées jusqu'au 4e ordre. Ces deux conditions, fort compliquées, et dont le caractère *nécessaire* n'était pas établi, étaient-elles *suffisantes* pour que l'équation (2) eût ses points critiques fixes? M. Picard pensait que »bien probablement» il n'en était rien. En tous cas, la question restait en suspens et ne semblait guère susceptible d'être tranchée.[1]

9. L'étude directe des équations différentielles (non intégrables) à points critiques fixes semblant fermée, ne pouvait-on du moins l'aborder par des voies détournées? C'est cé qu'a tenté M. Picard à l'aide de deux méthodes différentes.

La première[2] substitue aux équations différentielles un système d'équations aux dérivées partielles de la forme:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x, y, u, v), & \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\varphi(x, y, u, v) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = \varphi(x, y, u, v), & \dfrac{\partial v}{\partial y} = f(x, y, u, v) \end{cases}$$

où f et φ désignent des fonctions algébriques *réelles* des variables *réelles* x, y, u, v, et vérifient identiquement les deux conditions d'intégrabilité. Si $u(x, y), v(x, y)$ représentent une intégrale réelle quelconque du système (3), la combinaison $w = u + iv$ est une fonction analytique de $z = x + iy$ qui dépend de deux constantes *réelles* arbitraires. »Etant donné un système tel que (3)», dit M. Picard,[3] »on peut reconnaître si les intégrales ont leurs points critiques fixes. J'ai formé de tels exemples où f, φ sont rationnels. Il me paraît extrêmement probable que les intégrales de ces

[1] Il se trouve en réalité que, pour les équations (2), ces conditions sont *suffisantes* sans être *nécessaires*. De plus, en dépit de leur complication apparente et de leur caractère différentiel, on peut former explicitement, et d'une façon très simple, toutes les équations (2) qui satisfont à ces conditions [voir le n° 30].

[2] Comptes Rendus, tome 114 (1892), p. 1310—1313, et Acta mathematica, tome 17 (1893), p. 300.

[3] Comptes Rendus, ibidem, p. 1312.

équations constituent un type nouveau de transcendantes.» Mais, en fait, les fonctions $w(z)$ définies par un système (3), ou bien sont algébriques, ou bien vérifient une équation différentielle (algébrique) du premier ordre, dont les points critiques sont fixes en même temps que ceux du système réel (3).

Les fonctions signalées par M. PICARD sont donc des transcendantes classiques.

La seconde méthode consiste à renverser en quelque sorte le problème, en partant de fonctions uniformes définies directement et en cherchant à les choisir de manière qu'elles intègrent une équation différentielle algébrique. M. PICARD[1] a obtenu de cette manière des systèmes d'équations différentielles dont l'intégrale générale est effectivement uniforme, mais renferme *algébriquement* les constantes.[2] Ces équations sont donc réductibles aux quadratures ou aux équations linéaires, et cela sous la forme explicite qui a été indiquée plus haut (note 1, page 8).

10. En dépit de tant de profondes recherches, la question en restait donc au point si nettement précisé par M. PICARD: *les seules équations dont on pût affirmer que les points critiques étaient fixes, étaient des équations intégrables et c'est l'intégration même qui mettait en évidence la fixité des points critiques.*

Pour pousser la question plus loin, il m'a fallu constituer une double méthode qui répondît à ce double objet:

1°. Trouver de nouvelles conditions *nécessaires* pour qu'une équation différentielle ait ses points critiques fixes;

2°. Décider si ces conditions sont ou non *suffisantes*.

La première partie de la méthode (recherche des conditions *nécessaires*) est à la fois très simple et très élémentaire. Elle s'applique avec une extrême facilité à une équation différentielle d'ordre quelconque, ou plus généralement à tout système d'équations aux dérivées partielles dont l'intégrale ne dépend que d'un nombre *fini* de constantes.[3]

---

[1] Comptes Rendus, t. 117 (1893), p. 472 et p. 603; Acta mathematica, t. 18 (1894), p. 133.

[2] Cette remarque a été faite ultérieurement par M. PICARD [Comptes Rendus, t. 120 (1895), p. 402].

[3] La méthode repose sur ce principe bien intuitif: »Considérons une équation différentielle dont le coëfficient différentiel est une fonction (holomorphe pour $\alpha = 0$) d'un

La seconde partie de la méthode (recherche des conditions *suffisantes*) est d'un caractère plus subtil; elle peut être étendue aux équations du 3^e ordre ou d'ordre supérieur; mais les complications qu'elle entraîne croissent avec l'ordre différentiel.

Je vais résumer maintenant les principaux résultats auxquels m'a conduit cette double méthode. J'insisterai d'abord sur les résultats qui me semblent essentiellement nouveaux.

Transcendantes uniformes nouvelles engendrées par les équations différentielles du second ordre.

11. La détermination de toutes les équations à points critiques fixes de la forme

$$y'' = R(y', y, x)$$

(où R est rationnel en y', algébrique en y, analytique en x) m'a donné

---

paramètre α. Si l'équation a ses points critiques fixes pour α quelconque (mais $\neq 0$), il en est de même, *a fortiori* pour $\alpha = 0$, et le développement de l'intégrale $y(x)$, suivant les puissances de α, a comme coëfficients des fonctions de x à points critiques fixes.»

Pour faire concevoir immédiatement l'esprit de la méthode, cherchons des conditions *nécessaires* pour que l'équation $y'' = R(y', y, x)$, (où R est rationnel en y', y, x), ait ses points critiques fixes. Il faut d'abord, comme il est bien connu, que l'équation soit de la forme:

$$y'' = A(y, x)y'^2 + B(y, x)y' + C(y, x).$$

Changeons x en $x_0 + \alpha x$; l'équation devient

$$y'' = A(y, x_0)y'^2 + \alpha\{\ldots\};$$

d'après le principe énoncé, l'équation:

$$y'' = A(y, x_0)y'^2$$

doit avoir son intégrale générale uniforme: ce qui détermine aussitôt toutes les expressions possibles de la fraction rationnelle A en y. Les degrés de B et C en y se limitent avec la même facilité.

La méthode, moyennant quelques modifications, se laisse d'ailleurs adapter à toutes les questions qui concernent les propriétés analytiques des intégrales d'une équation différentielle quelconque: par exemple à l'étude des intégrales définies par des conditions initiales $x_0, y_0, y'_0 \ldots$ qui donnent au coëfficient différentiel la forme $\frac{0}{0}$.

trois types (et trois seulement) d'équations différentielles dont l'intégrale générale $y(x)$ est une fonction uniforme de x **essentiellement nouvelle.**

Ces trois types peuvent recevoir les trois formes canoniques qui suivent:

$$y'' = \alpha y^2 + \beta x + \gamma, \tag{4}$$

$$y'' = \alpha y^3 + \beta x y + \gamma y + \delta, \tag{5}$$

$$y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(\alpha y^2 + \beta) + e^{2x}\left(\gamma y^3 + \frac{\delta}{y}\right). \tag{6}$$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ constantes numériques).

L'intégrale générale $y(x)$ de chaque équation (4), (5) *et* (6) *est une fonction uniforme de x* **méromorphe dans tout le plan.**

Si β est nul, l'équation (4) définit les fonctions elliptiques; si α est nul, des polynômes. D'autre part, si $\alpha\beta \neq 0$, la transformation $y = \lambda Y$, $x = \mu X + \nu$, (où λ, μ, ν sont des constantes) permet de donner à α, β, γ les valeurs respectives $6, 1, 0$. De même, en négligeant les cas où l'intégrale est une fonction connue, il est loisible de supposer que dans l'équation (5), on a: $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, et que, dans l'équation (6), les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ coïncident avec un des trois systèmes:

$$\left\{\begin{array}{lll} \gamma = -1, & \delta = 1; & \alpha, \beta \text{ quelconques;} \\ \gamma = -1, & \delta = 0; & \beta = 1, \alpha \text{ quelconque;} \\ \gamma = 0, & \delta = 0; & \alpha = -1, \beta = 1. \end{array}\right. \tag{7}$$

Autrement dit aux équations (4), (5), (6) on peut substituer les 5 équations canoniques suivantes:

$$\text{I} \qquad y'' = 6y^2 + x,$$

$$\text{II} \qquad y'' = 2y^3 + xy + \alpha,$$

$$\text{III} \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(1 - y^2),$$

$$\text{IV} \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(\alpha y^2 + 1) - e^{2x}y^3,$$

$$\text{V} \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(\alpha y^2 + \beta) + e^{2x}\left(\frac{1}{y} - y^3\right).$$

Les intégrales $y(x)$ des équations I, II, III, IV, V, *sont des transcendantes méromorphes essentiellement nouvelles.*

On peut réunir d'ailleurs les équations I et II dans le type unique:

$$y'' = \alpha y^3 + y^2 + 3\alpha x y + x$$

et remplacer les cinq équations précédentes par les deux équations:

$$\text{VI} \qquad y'' = \alpha y^3 + y^2 + 3\alpha x y + x$$

$$\text{VII} \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(\alpha y^2 + \beta) + e^{2x}\left(\gamma y^3 + \frac{\delta}{y}\right);$$

les constantes numériques $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de VII coïncident avec un des trois systèmes de valeurs (7).

Il convient de remarquer toutefois que le cas $\alpha = 0$ pour VI, et les cas $\delta = 0$, ou $\delta = 0$, $\gamma = 0$ pour VII sont des cas remarquables de *simplification* de ces équations; les transcendantes qu'elles définissent ont, dans ces cas particuliers, des propriétés moins compliquées que dans le cas général.

12. Puisque les intégrales $y(x)$ des équations précédentes sont des fonctions *méromorphes* dans tout le plan, il est bien évident qu'elles sont représentables par le quotient de deux fonctions *entières*; mais ce qu'il importe de remarquer c'est qu'on peut choisir ces fonctions entières de manière qu'elles vérifient une équation différentielle très simple du 3^e^ ordre.

Voici comment on effectue cette représentation pour les équations I, II, III, IV, V.

Pour l'équation I, on pose

$$z = \frac{y'^2}{2} - 2y^3 - xy, \qquad u = e^{\int z dx};$$

la fonction $u(x)$ est une fonction *entière* qui vérifie l'équation:

$$\frac{z''^2}{2} + 2z'^3 + xz' - z = 0, \qquad \text{où } z = \frac{u'}{u};$$

$y(x)$ est donnée par le quotient:

$$y = \frac{u'^2 - uu''}{u^2} \equiv -\frac{d^2}{dx^2}\log u.$$

Pour l'équation II, on pose:

$$z = y'^2 - y^4 - xy^2 - 2\alpha y, \qquad u = e^{\int z dx}, \qquad v = uy;$$

les fonctions $u(x)$, $v(x)$ sont des fonctions *entières* qui vérifient le système:

$$uu'' - u'^2 + v^2 = 0, \qquad (uv' - vu')^2 = v^4 + xv^2u^2 + (2\alpha v + u')u^3,$$

et $y(x)$ est donnée par le quotient:

$$y = \frac{v}{u}.$$

De plus, soit

$$2z_1 = z - y, \qquad 2z_2 = z + y;$$

les fonctions $u_1 = e^{\int z_1(x)dx}$, $u_2 = e^{\int z_2(x)dx}$ sont deux fonctions *entières qui vérifient respectivement une équation du* 3^e *ordre,* et on a:

$$u = u_1 u_2, \qquad v = (u'_2 u_1 - u'_1 u_2), \qquad y = \frac{u'_2}{u_2} - \frac{u'_1}{u_1}.$$

Pour l'équation VII (qui comprend les équations III, IV, V), on pose:

$$2\zeta = \frac{y'^2}{y} + \left(\frac{\delta}{y^2} - \gamma y^2\right)e^{2x} + 2e^x\left[\frac{\beta}{y} - \alpha y\right],$$

puis

$$2z = \zeta - \frac{y'}{y} + \frac{1}{2}, \qquad 2Z = \zeta + \frac{y'}{y} + \frac{1}{2},$$

enfin

$$u = e^{\int z dx}, \qquad v = e^{\int Z dx};$$

les fonctions $u(x)$, $v(x)$ sont des fonctions *entières* qui vérifient les équations:

$$(8) \qquad \frac{u''}{u} - \frac{u'^2}{u^2} = -\frac{ve^x}{u}\left[\frac{\gamma ve^x}{u} + \alpha\right], \qquad \frac{v''}{v} - \frac{v'^2}{v^2} = \frac{ue^x}{v}\left[\frac{\delta ue^x}{v} + \beta\right];$$

il est loisible de remplacer une des équations (8) par l'équation:

$$(9) \; \left(\frac{v'}{v} - \frac{u'}{u}\right)^2 - 2\frac{v'}{v} - 2\frac{u'}{u} + 1 + e^{2x}\left[\delta\frac{u^2}{v^2} - \gamma\frac{v^2}{u^2}\right] + 2e^x\left[\beta\frac{u}{v} - \alpha\frac{v}{u}\right] = 0;$$

les fonctions $u(x)$, $v(x)$ étant définies par l'équation (9) et la première équation (8), $y(x)$ est représentée par le quotient $y = \frac{v}{u}$.

En outre, si on pose:

$$2z_1 = z - ye^x, \qquad 2z_2 = z + ye^x; \qquad 2Z_1 = Z - \frac{e^x}{y}, \qquad 2Z_2 = Z + \frac{e^x}{y}.$$

$$u_1 = e^{\int z_1 dx}, \qquad u_2 = e^{\int z_2 dx}; \qquad v_1 = e^{\int Z_1 dx}, \qquad v_2 = e^{\int Z_2 dx},$$

les fonctions u_1, u_2, v_1, v_2 sont des fonctions *entières qui vérifient respectivement une équation différentielle du 3^e^ ordre*, et on a:

$$u = u_1 u_2, \qquad v = v_1 v_2; \qquad e^x y = \frac{u_2'}{u_2} - \frac{u_1'}{u_1}, \qquad \frac{e^x}{y} = \frac{v_2'}{v_2} - \frac{v_1'}{v_1}.$$

13. Les équations I, II, III, IV et V doivent être regardées comme *intégrées* au sens moderne du mot, exactement comme l'équation:

$$y'^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2)$$

est intégrée par le quotient de deux fonctions θ. Si on définit l'intégrale $y(x)$ d'une des équations par les conditions initiales x_0, y_0, y_0', la fonction $y(x)$ est représentée par le quotient de deux séries entières en $(x - x_0)$, séries qui convergent dans tout le plan des x et dont les coëfficients se calculent par des dérivations successives. Ces coëfficients sont, pour I et II, des polynômes en x_0, y_0, y_0', et pour III, IV, V des polynômes en e^{x_0}, y_0, $\frac{1}{y_0}$ et y_0'.

C'est là un résultat essentiellement nouveau sur lequel je voudrais insister. Depuis la fondation du Calcul intégral, toutes les équations qu'on a réussi à intégrer (au sens le plus large de ce terme) sont réductibles à des combinaisons d'équations linéaires et de quadratures. D'une façon générale, c'est parce qu'on connaît la manière dont les constantes figurent dans l'intégrale qu'on sait étudier cette intégrale. Même les équations qui définissent les fonctions fuchsiennes n'échappent pas à cette remarque. *Les équations* I, II, III, IV, V *constituent donc le premier exemple connu d'équations qui se trouvent intégrées à l'aide des principes de la théorie des fonctions, sans qu'on sache les ramener à aucune combinaison d'équations linéaires, de quadratures et d'équations du premier ordre.*

J'ajoute que le caractère précis des types canoniques I, II, ... V, ne doit pas faire méconnaître le degré de généralité des équations diffé-

rentielles qu'intégrent les nouvelles transcendantes. Parmi les équations à points critiques fixes de la forme

$$y'' = R(y', y, x) \tag{4}$$

(où R est *rationnel en* y', y et algébrique en x), celles qui s'intégrent à l'aide des nouvelles transcendantes dépendent de *quatre fonctions arbitraires et de deux constantes arbitraires ou d'une seule* suivant qu'elles correspondent au type VII ou au type VI.

Parmi les équations (4) où R est un *polynôme* en y', y, algébrique en x, celles qui sont réductibles algébriquement à l'équation VI, *où α est donné,* forment une classe aussi étendue que les équations différentielles linéaires, non homogènes, du second ordre.

Par exemple pour qu'une équation

$$y'' = a(x)y' + A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

soit réductible algébriquement à l'équation

$$\text{I} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 + x$$

il faut et il suffit que a, A, B, C, satisfassent à une condition unique (qui permet d'exprimer a, A, B, C, *explicitement* à l'aide de trois fonctions arbitraires). (Voir le n° 23.)

14. Considérons maintenant, pour un instant, l'intégrale d'une des équations I, ... V comme fonction des constantes d'intégration.

Soit $y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0)$ l'intégrale de I définie par les conditions initiales x_0, y_0, y'_0. La fonction φ est une fonction *méromorphe* de x, x_0, y_0, y'_0, dans tout le plan de chacune de ces variables. Le point à l'infini dans chacun de ces plans est un point essentiel de φ. Nous venons de dire, au n° précédent, qu'on peut représenter φ par le quotient de deux séries de polynômes en x, x_0, y_0, y'_0 dont les termes successifs se calculent par de simples dérivations.

Pour plus de clarté, dans ce qui va suivre, remplaçons y' par z, et considérons (y, z) comme les coordonnées (réelles ou complexes) d'un plan yOz.

Les formules

$$y = \varphi(x, x_0, y_0, z_0), \qquad z = \psi(x, x_0, y_0, z_0) \tag{10}$$

entraînent les formules inverses

$$(11) \qquad y_0 = \varphi(x_0, x, y, z), \qquad z_0 = \psi(x_0, x, y, z).$$

Si on donne à x et à x_0 des valeurs numériques, les égalités (10), (11) définissent *une correspondance biuniforme* entre les plans (y, z) et (y_0, z_0). Il n'existe pas, dans cette correspondance, *de points-bases* [points (y_0, z_0) qui donnent à φ et à ψ la forme $\frac{0}{0}$]; mais les valeurs $y_0 = \infty$, $z_0 = \infty$, sont singularités essentielles de φ, ψ.

J'ai étudié[1] les correspondances biuniformes (et non birationelles) entre deux plans; je les ai divisées en deux classes, suivant qu'il existe ou non un faisceau de courbes algébriques que la correspondance transforme en un autre faisceau de courbes algébriques. La transformation est dite *semi-transcendante* dans le premier cas, *essentiellement biuniforme* dans le second cas.[2] La correspondance biuniforme (10), (11) entre (y, z) et (y_0, z_0) est essentiellement biuniforme. C'est ce qui résulte immédiatement de ce théorème (qu'on peut établir en toute rigueur): »L'intégrale générale $y = \varphi(x, a, b)$ de l'équation I est une fonction transcendante de chacune des constantes d'intégration a, b, de quelque manière qu'on choisisse ces constantes.»

Considérée comme fonction de y_0, ou de y'_0, ou de x_0, l'intégrale $y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0)$ est encore une transcendante méromorphe nouvelle,

---

[1] Leçons de Stockholm, p. 482—484 et 501—517. — Comptes Rendus, avril 1896.

[2] La correspondance biuniforme

$$y = y_0, \qquad y_0 = y,$$
$$z = z_0 e^{y_0}, \qquad z_0 = z e^{-y}$$

est semi-transcendante. La combinaison des deux transformations

$$y_1 = y, \qquad y = y_1 e^{z_1},$$
$$z_1 = z_0 e^{y_0}, \qquad z = z_1$$

conduit à la transformation essentiellement biuniforme

$$y = y_0 e^{(z_0 e^{y_0})}, \qquad y_0 = y e^{-z},$$
$$z = z_0 e^{y_0}, \qquad z_0 = z e^{-(y e^{-z})}.$$

Il existe d'ailleurs, ainsi que je l'ai montré, des correspondances biuniformes qui ne résultent pas de la combinaison de transformations semi-transcendantes.

dont on ne connaît d'autres propriétés que celles qui dérivent de l'équation différentielle elle-même.

Les mêmes remarques peuvent se répéter pour les intégrales des équations II, III, IV, V, avec cette différence que, pour les trois dernières, la fonction $y = \varphi(x, x_0, y_0, y_0')$ n'est plus méromorphe en y_0, mais admet *le point* $y_0 = 0$ *comme point singulier essentiel*. Si on pose $y_0 = e^{z_0}$, la fonction φ est une fonction méromorphe de z_0. Le quotient qui représente φ est formé de deux séries dont les termes, avons-nous dit, sont des polynômes en $x, e^{x_0}, y_0, \frac{1}{y_0}, y_0'$.

Regardons enfin l'intégrale $y = \varphi(x)$ de II comme fonction du *module* α qui figure dans l'équation; la fonction $y = \varphi(x, x_0, y_0, y_0', \alpha)$ est une *fonction méromorphe des* 5 *variables indépendantes* $x, x_0, y_0, y_0', \alpha$.

Cette propriété subsiste pour les équations IV et V (relativement à α ou à α, β), à cela près que $y_0 = 0$ est un point essentiel de φ. Pour l'équation V, l'intégrale φ est une fonction méromorphe des six variables indépendantes $x, x_0, z_0 = \log y_0, y_0', \alpha, \beta$.

15. La méthode qui m'a permis de démontrer que l'intégrale $y(x)$ des équations I, II, ..., V est méromorphe, fournit aussi des indications sur la nature et les propriétés des nouvelles transcendantes. Il n'y a pas lieu d'espérer que ces transcendantes jouissent de propriétés fonctionnelles simples, analogues à la périodicité des fonctions *sn* ou θ. Mais il convient d'approfondir leur étude au point de vue *du genre*, de la distribution des zéros, de *la croissance* pour $x = \infty$, etc.

Cette étude, où les travaux bien connus de M. Hadamard et de M. Borel doivent jouer un rôle important, sera développée dans la monographie que je consacrerai à chacun des types de nouvelles transcendantes.

Je me borne ici à signaler cette proposition qui a son analogue pour les équations II, III, IV et V:

«Si $y(x)$ est une intégrale particulière de I, l'égalité $y(x) = A$ possède une infinité de racines quelle que soit la valeur (finie ou infinie) de A. La fréquence de ces racines (pour $x = \infty$) est la même quel que soit A.»

Les transcendantes définies plus haut sont les seules transcendantes vraiment nouvelles qu'engendrent les équations du second ordre à points critiques fixes (résolues par rapport à y'').

Je vais maintenant énumérer explicitement toutes ces équations.

Enumération de toutes les équations à points critiques fixes de la forme

$$\text{(E)} \qquad y'' = R(y', y, x)$$

(R rationnel en y', algébrique en y, analytique en x).

16. Je formerai d'abord un tableau fondamental d'équations (E) à points critiques fixes, d'où se laissent déduire toutes les autres.

En premier lieu, si l'équation (E) a ses points critiques fixes, elle est nécessairement de la forme:

$$(12) \qquad y'' = A(y, x)y'^2 + B(y, x)y' + C(y, x).$$

Les fonctions A, B, C, algébriques en y, sont exprimables *rationnellement* à l'aide de y et d'une irrationnelle $t(y) = g(y, x)$ qui dépend de x analytiquement; soit:

$$A = L(t, y, x), \qquad B = M(t, y, x), \qquad C = N(t, y, x)$$

avec

$$H(t, y, x) = 0.$$

L, M, N, sont des *fractions rationnelles* et H un *polynôme* en t, y; leurs coëfficients a, b, c, ... sont des fonctions analytiques de x.

Avant d'aller plus loin, précisons le sens de quelques expressions que nous emploierons fréquemment par la suite.

Je dirai qu'on sait reconnaître ***algébriquement*** si une équation (12) donnée jouit de telle propriété, quand cette propriété se traduira par un nombre *fini* de relations algébriques entre les coëfficients $a(x)$, $b(x)$, ... de (12) et leurs dérivées jusqu'à un certain ordre.

J'emploierai fréquemment, par la suite, les transformations:

$$\text{(T)} \qquad Y = \psi(y, x), \qquad X = x \quad \text{ou} \quad X = \varphi(x),$$

où ψ est *algébrique* en y et analytique (ainsi que φ) en x. Je dirai qu'une équation (12) est *réductible algébriquement* à une équation

$$(13) \qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = F\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right)$$

par une transformation (T), si la transformation de passage se calcule *algébriquement* sur l'équation (12); autrement dit, si les coëfficients de la

fonction algébrique $\psi(y)$ sont des combinaisons algébriques des coëfficients $a(x)$, $b(x)$, ... de (12) ainsi que de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre, et si, de plus, la fonction $\varphi(x)$ satisfait à la même condition ou se réduit identiquement à x.

Si l'équation (E) est algébrique en x le mot *algébriquement* est pris dans son sens ordinaire.

17. Rappelons maintenant quelques résultats connus et quelques définitions.

Admettons qu'une équation (E) ait ses points critiques fixes et étudions son intégrale $y(x)$ comme fonction des constantes y_0, y'_0 (valeurs de y, y' pour une valeur numérique x_0 de x).

Trois cas peuvent se présenter.

1^er Cas. L'intégrale dépend *algébriquement* de y_0, y'_0. On dit alors que *l'intégrale est une fonction algébrique des constantes.*

2^e Cas. L'intégrale est une fonction transcendante de y_0, y'_0, mais on peut, par un changement de constantes, faire en sorte que $y(x)$ renferme *algébriquement **une*** des nouvelles constantes. On dit alors que *l'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes.*

3^e Cas. L'intégrale $y(x)$ renferme l'une et l'autre des constantes sous forme transcendante de quelque manière qu'on les choisisse. On dit alors que *l'intégrale est une fonction essentiellement transcendante des deux constantes.*

Dans le premier cas,

ou bien l'équation (E) est réductible algébriquement à une équation linéaire:

$$z''' + p(x)z' + q(x)z = 0;$$

d'une façon précise, si on pose $\frac{z'}{z} = u$, on a $y = \varphi(u', u, x)$, φ désignant une fraction rationnelle en u', u, qui dépend de x analytiquement;

ou bien, l'équation (E) équivaut au système:

$$(14) \qquad F(y', y, u, x) = 0, \qquad u' = p(x)u^2 + q(x)u + r(x);$$

F est un polynôme en y', y, u, dont les coëfficients, ainsi que p, q, r, sont des fonctions algébriques des coëfficients de (E) et de leurs dérivées. L'équation du premier ordre $F = 0$ (où u est remplacé en fonction de x) doit d'ailleurs avoir ses points critiques fixes. [1]

[1] Voir la note 1 de la page 8, et mes *Leçons de Stockholm*, p. 360—389.

Dans le second cas, l'équation (E) équivaut[1] à un système (14), où le genre de la relation algébrique $F = 0$ entre y', y est (pour u, x quelconques) égal à zéro ou un.

Le troisième cas est le seul qui puisse conduire à des transcendantes nouvelles.

Le tableau que nous allons former, fournit une vérification de ces résultats.

Dans ce tableau, nous représentons invariablement par a, b, c, ... des fonctions analytiques de x; par a', b', c', ..., a'', b'', c'', ..., leurs dérivées premières, secondes, etc.; par α, β, γ, ... des constantes *numériques;* par K, K_1, ... des constantes *arbitraires.*

Chaque équation est suivie d'une indication sur la manière dont l'intégrale générale $y(x)$ renferme ses constantes; si l'équation est *intégrable* (j'entends réductible aux quadratures ou aux équations linéaires), elle est accompagnée des formules qui effectuent cette intégration.

Le tableau total se compose de *trois* tableaux partiels, à savoir les tableaux I, II, III, qui suivent.

18. *Tableau des équations canoniques* (E) *à points critiques fixes.*

TABLEAU I.

(1) $$y'' = -3yy' - y^3 + a(x).$$

L'intégrale est une fonction algébrique des deux constantes. Intégration:

$$y = \frac{z'}{z}, \qquad z''' = a(x)z.$$

(2) $$y'' = -2yy' + a(x).$$

L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. Intégration:

$$y' + y^2 = u, \qquad u' = a(x).$$

[1] *Leçons de Stockholm,* p. 465—477.

$$(3) \qquad y'' = \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta.$$

L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. Intégration:

$$\frac{y'^2}{2} = \frac{\alpha}{4} y^4 + \frac{\beta}{3} y^3 + \frac{\gamma}{2} y^2 + \delta y + K.$$

$$(4) \qquad y'' = 6y^2 + x.$$

L'intégrale est une fonction essentiellement transcendante des deux constantes.

$$(5) \qquad y'' = 2y^3 + xy + \alpha.$$

L'intégrale est une fonction essentiellement transcendante des deux constantes.

$$(6) \qquad y'' = -yy' + y^3 - 12a(x)y + 12a'(x),$$

avec la condition $a'' = 6a^2 + \varepsilon$, ($\varepsilon = 0$ ou 1). L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. Intégration: la transformation

$$z = \frac{1}{6}(y' + y^2) - a$$

donne

$$y = \frac{z' - a'}{z - a}, \qquad z'' = 6z^2 + \varepsilon \quad [\text{équation } (3)].$$

Intégrale première:

$$z'^2 = 4z^3 + 2\varepsilon z + K, \quad \text{où} \quad z = \frac{1}{6}(y' + y^2) - a, \quad z' = a' + y\left[\frac{1}{6}(y' + y^2) - 2a\right].$$

$$(7) \qquad y'' = -yy' + y^3 - 12a(x)y + 12a'(x),$$

avec la condition: $a'' = 6a^2 + x$. L'intégrale est une fonction essentiellement transcendante des deux constantes. La transformation $z = \frac{1}{6}(y' + y^2) - a$ donne:

$$y = \frac{z' - a'}{z - a}, \qquad z'' = 6z^2 + x \quad [\text{équation } (4)].$$

TABLEAU II.

(1) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + \left[a(x)y + \frac{b(x)}{y}\right]y' + a'(x)y^2 - b'(x).$$

L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. Intégration:

$$y' = a(x)y^2 - b(x) + Ky.$$

(2) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + a'(x)\frac{y'}{y} + y^3 + a(x)y^2 - a''(x).$$

L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. Intégration:

$$(y' + a')^2 = y^2[(y + a)^2 + K].$$

(3) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + a(x)\frac{y'}{y} - a'(x) + y^2.$$

L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. Intégration:

$$(y' + a)^2 = 2y^2(y + u), \qquad u' = a(x).$$

(4) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma + \frac{\delta}{y}.$$

L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. Intégration:

$$y'^2 = \alpha y^4 + 2\beta y^3 - 2\gamma y - \delta + Ky^2.$$

(5) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(\alpha y^2 + \beta) + e^{2x}\left[\gamma y^3 + \frac{\delta}{y}\right], \qquad (\beta \text{ ou } \delta \neq 0).$$

L'intégrale est une fonction essentiellement transcendante des deux constantes.

TABLEAU III.

(1) $$y'' = y'^2 \frac{\left(6y^2 - \frac{g_2}{2}\right)}{(4y^3 - g_2 y - g_3)}, \qquad (g_2\,,\, g_3 \text{ c}^{\text{tes}} \text{ numériques}).$$

L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. Intégration:

$$\frac{y'}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = K, \qquad y = \wp(u\,,\, g_2\,,\, g_3), \qquad u = Kx + K_1.$$

(2) $$y'' = \frac{y'^2(3y^2 - 2(1+x)y + x)}{2y(y-1)(y-x)} + y'\left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\right) + \frac{y(y-1)}{2x(x-1)(y-x)}.$$

L'intégrale est une fonction essentiellement transcendante des constantes. Si on appelle $\lambda(u\,,\, x_0)$ la fonction elliptique de u définie par l'égalité:

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-x_0)}} = u,$$

et $2\omega_1\,,\, 2\omega_2$ ses deux périodes, l'intégrale générale de (2) est

$$y = \lambda[(K_1\omega_1 + K_2\omega_2)\,,\, x].$$

(3) $$y'' = y'^2\left[\frac{6y^2 - \frac{g_2}{2}}{(4y^3 - g_2 y - g_3)} - \frac{i\pi}{\omega\sqrt{(4y^3 - g_2 y - g_3)}}\right]$$

$[2\omega$ période quelconque de $\wp(u\,,\, g_2\,,\, g_3)]$.

L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. Intégration:

$$\frac{y'}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = \frac{\omega}{i\pi(x+K)}, \qquad y = \wp(u\,,\, g_2\,,\, g_3), \qquad u = K_1 + \frac{\omega}{i\pi}\log(x+K);$$

$x = -K$ est un point essentiel mobile de $y(x)$.

19. Parmi les équations précédentes, les seules dont l'intégrale soit une fonction *essentiellement transcendante des deux constantes* sont les équations (4), (5), (7) du tableau I, (5) du tableau II et (2) du tableau III.

Les équations (4), (5) du tableau I, et (5) du tableau II ont été étudiées plus haut (n$^{\text{os}}$ 11—15); leur intégrale est méromorphe dans tout le plan. Quant à l'équation (7) du tableau I, elle est réductible à l'équation (4) par la transformation $y = \frac{z - a}{z - a}$; son intégrale est aussi méromorphe dans tout le plan.

L'intégrale $y(x)$ de l'équation (2) du tableau III admet trois points critiques (transcendants) fixes, à savoir $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$. Elle ne présente comme singularités mobiles que des pôles.[1] Si on pose

$$z = \frac{1}{4(y - x)}\left[\frac{x(x - 1)y'^2}{y(y - 1)} - 1\right], \qquad u = e^{\int z dx},$$

la fonction $u(x)$ est une fonction dont les seules singularités (polaires ou autres) sont les trois points fixes $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$.[2]

La fonction y s'exprime algébriquement à l'aide de u, u', u'' et de x. La fonction $u(x)$ vérifie une équation différentielle (algébrique) du 3$^{\text{e}}$ ordre.

Posons maintenant $x = \phi(X)$, en désignant par $\phi(X)$ la fonction *modulaire* qui ne prend aucune des valeurs 0, 1, ∞; les fonctions $y(X)$ et $u(X)$ sont uniformes et admettent l'axe réel des X comme coupure essentielle; la première est méromorphe, la seconde holomorphe au-dessus et au-dessous de cette coupure; elles vérifient respectivement une équation différentielle du 2$^{\text{e}}$ et du 3$^{\text{e}}$ ordre algébrique par rapport à la fonction et à ses dérivées, mais dont les coëfficients sont des transcendantes uniformes en X.

Enfin, l'intégrale générale de l'équation (2) de III, soit:

$$y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0),$$

[1] L'équation (2) de III a été formée explicitement par M. Picard (Journal de Liouville 1889, 4$^{\text{e}}$ série, tome 5, p. 299). Elle fait partie, au fond, du système classique d'équations différentielles que vérifient les fonctions elliptiques regardées comme fonctions des invariants (voir Halphen, *Traité des fonctions elliptiques,* tome 1, p. 252—253 et p. 291—331).

[2] On peut former trois autres expressions analogues à $u(x)$ en permutant le rôle des valeurs remarquables $y = x$, $y = 0$, $y = 1$, $y = \infty$.

définit (pour $\bar{x}$, $\bar{x}_0$ choisis numériquement) une correspondance biuniforme entre les deux *cylindres* de l'espace $Oyzt$

$$t^2 = y(y-1)(y-\bar{x}), \qquad t_0^2 = y_0(y_0-1)(y_0-\bar{x}_0).$$

Cette correspondance est *essentiellement biuniforme* (voir le n° 14);[1] il suffit, pour l'obtenir, de poser:

$$y' = z, \qquad t = \sqrt{y(y-1)(y-x)}, \quad \text{et} \quad y_0' = z_0, \qquad t_0 = \sqrt{y_0(y_0-1)(y_0-x_0)}.$$

Mais je n'insiste pas davantage sur cette équation qui ne définit pas de transcendantes vraiment nouvelles, du moment qu'on regarde comme connue la transcendante à deux variables $\mathrm{sn}(u, k^2)$.

20. Quant aux 11 autres équations des tableaux I, II, III, elles sont toutes réductibles à des équations classiques.

Les équations (1) et (3) du tableau I (cette dernière moyennant les conditions $\alpha = 0$, $\beta = 0$) jouissent seules de la propriété que l'intégrale renferme *algébriquement* les deux constantes. Pour les autres types, l'intégrale est une fonction *semi-transcendante* des constantes; je signale la manière variée dont figurent ces constantes dans l'intégrale.

Enfin la seule équation dont l'intégrale générale présente *des singularités essentielles mobiles*, c'est l'équation (3) du tableau III, dont l'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes et possède un point singulier essentiel variable avec les constantes d'intégration.

21. Ces tableaux I, II, III, permettent de résoudre bien aisément le problème général qui nous occupe:

Parmi les équations

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right),$$

où R est rationnel en $\frac{dY}{dX}$, algébrique en Y, analytique en X, déterminer toutes les équations à points critiques fixes.

---

[1] Voir mes *Leçons de Stockholm*, p. 501—517.

Pour obtenir toutes les équations cherchées, il suffit d'effectuer, dans les équations des tableaux I, II, le changement de variables

$$(15) \qquad Y = r(y, x), \qquad X = \psi(x)$$

et dans les équations du tableau III, le changement de variables:

$$(16) \qquad Y = r(y, x) + s(y, x)\sqrt{P}, \qquad X = \psi(x),$$

où

$$P = 4y^3 - g_2 y - g_3 \quad \text{pour (1) et (3) de III,}$$

et où

$$P = y(y-1)(y-x) \quad \text{pour (2) de III;}$$

dans les égalités (15), (16), les fonctions $r(y, x)$, $s(y, x)$ désignent des fonctions *rationnelles* quelconques de y, dont les coëfficients, ainsi que ψ, sont analytiques en x.

Les équations (E) à points critiques fixes dont l'intégrale est une fonction *essentiellement transcendante des deux constantes* sont donc réductibles soit par une transformation (15) à une équation (4), (5), (7) de I ou (5) de II; soit par une transformation (16) à l'équation (2) de III.

Toutes les équations (E) à points critiques fixes dont l'intégrale présente des singularités essentielles mobiles sont réductibles par une transformation (16) à une équation (3) de III.

De la question de reconnaître si une équation (E) *donnée a ses points critiques fixes. Problèmes connexes.*

22. *Equations* (E) *où* $R(y', y, x)$ *est rationnel en* y', y. — Etant donnée une équation (E), comment reconnaître si elle a effectivement ses points critiques fixes?

C'est la question que je vais traiter maintenant. Je considèrerai d'abord le cas où le coëfficient différentiel R de (E), rationnel en y', est *rationnel* aussi en y, puis le cas où R est *algébrique* en y.

Soit donc:

$$(\mathrm{E}') \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = R\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) \equiv A(y, x)y'^2 + B(y, x)y' + C(y, x)$$

(R rationnel en y' et y, analytique en x).

La marche à suivre pour décider si cette équation a ses points critiques fixes est la suivante.

En premier lieu, $A(y, x)$ doit coïncider avec une des neuf expressions (θ):

$$(\theta) \quad \left\{ \begin{array}{c} 0 \,; \quad \dfrac{2a}{ay+b} \,; \quad \dfrac{a\left(1+\frac{1}{n}\right)}{ay+b} + \dfrac{c\left(1-\frac{1}{n}\right)}{cy+d} \quad (n \text{ entier } > 1); \\[2ex] \dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{c}{cy+d} \,; \quad \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{c}{cy+d}\right) + \dfrac{e}{ey+f} \,. \\[2ex] \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{c}{cy+d} + \dfrac{e}{ey+f}\right) ; \quad \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{c}{cy+d} + \dfrac{e}{ey+f}\right); \\[2ex] \dfrac{5}{6}\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{2}{3}\dfrac{c}{cy+d} + \dfrac{1}{2}\dfrac{e}{ey+f} \,; \quad \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{c}{cy+d} + \dfrac{e}{ey+f} + \dfrac{g}{gy+h}\right), \end{array} \right.$$

où $a, b, \ldots, h$ désignent des fonctions de x (qui peuvent être identiquement nulles ou se réduire à des constantes).

Cette première condition étant remplie, on effectue sur y la transformation homographique

$$Y = \frac{1}{ay+b}, \quad \text{ou} \quad Y = \frac{cy+d}{ay+b}, \quad \text{ou} \quad Y = \frac{(af-be)(cy+d)}{(cf-de)(ay+b)},$$

suivant que A coïncide avec la seconde expression (θ), ou avec la troisième ou la quatrième, ou enfin avec une quelconque des suivantes.

Après cette transformation, l'équation garde une forme analogue à (E'), mais dans les neuf expressions possibles de θ on a

$$a = 0, \qquad d = 0, \qquad c = f.$$

Nous n'avons donc plus à considérer que des équations (E') de la forme:

$$(\mathrm{E}'') \qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = A(Y, X)\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + B(Y, X)\frac{dY}{dX} + C(Y, X)$$

où A, B, C sont rationnels en Y et où A coïncide avec une des huit expressions (θ')

$$(\theta')\quad \left|\begin{array}{c} 0\ ;\ \dfrac{1-\frac{1}{n}}{Y} \quad (n \text{ entier } > 1);\ \dfrac{1}{Y}; \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{Y}+\dfrac{1}{Y-1}\ ;\ \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{Y}+\dfrac{1}{Y-1}\right);\ \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{Y}+\dfrac{1}{Y-1}\right); \\ \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{Y}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{Y-1}\ ;\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{Y}+\dfrac{1}{Y-1}+\dfrac{1}{Y-H}\right); \end{array}\right.$$

H désigne[1] soit une constante numérique α, soit X.

Nous allons, dans ce qui suit, distinguer huit cas qui correspondent aux huit expressions possibles de $A(Y, X)$.

23. Premier cas: $A = 0$.

L'équation (E″) doit être alors de la forme

$$(\mathrm{E}_1)\qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{dY}{dX}(aY+b) + cY^2 + eY + f,$$

(a, b, ..., f fonctions analytiques de X).

Pour qu'elle ait ses points critiques fixes, il faut et il suffit qu'elle soit réductible, par une transformation

$$(17)\qquad y = m(X)\,Y + n(X), \qquad x = l(X),$$

à un des 7 *types canoniques du tableau I.*

On sait toujours reconnaître *algébriquement*[2] si cette condition est remplie. Mais le calcul de la transformation de passage (17) *ne s'effectue algébriquement que pour les types* (4), (5), (7) *de I*, dont l'intégrale est une fonction *essentiellement transcendante* des deux constantes.

---

[1] H est égal à l'expression $\dfrac{af-bc}{cf-de}\times\dfrac{ch-dg}{ah-bg}$; si cette expression n'est pas une constante α, on pose:

$$H(x) = X.$$

[2] Voir au n° 16 le sens précis de ce terme.

Les autres équations sont *intégrables*. Pour se rendre compte avec précision des opérations qu'exige leur intégration, il importe de n'introduire que des types canoniques tels que la réduction d'une équation (E_1) à un quelconque de ces types s'effectue *algébriquement*.

C'est ce que nous allons faire dans le tableau IV qui suit, où chaque type canonique du tableau I est remplacé par une ou plusieurs équations nouvelles. Nous y représentons exclusivement par $\lambda(X)$, $\mu(X)$, $\nu(X)$, ... des combinaisons *algébriques* des coëfficients $a(X)$, ..., $f(X)$ de (E_1) et de leurs dérivées (jusqu'à un certain ordre).

Toute équation (E_1) *à points critiques fixes est réductible à une des équations* (1), (2), ... *du tableau IV par une transformation*

(18) $$y = \mu(X)\,Y + \nu(X), \qquad x = \lambda(X).$$

TABLEAU IV.

Equations réductibles au type (1) du tableau I.

(1) $$y'' = -3yy' - y^3 + q(x)y + r(x).$$

Intégration:

$$y = \frac{z'}{z}, \qquad z''' = q(x)z' + r(x)z.$$

Transformation de passage de (E_1) à (1): $y = \mu Y + \nu$, $x = X$.

Equations réductibles au type (2) du tableau I.

(2) $$y'' = -2yy' + q(x)(y' + y^2) + r(x).$$

Intégration:

$$y' + y^2 = u, \qquad u' = q(x)u + r(x).$$

Transformation de passage de (E_1) à (2): $y = \mu Y + \nu$, $x = X$.

Equations réductibles au type (3) du tableau I.

(3) $$y'' = q(x)y' + r(x)y + s(x),$$

équation linéaire non homogène, du second ordre.

(4) $$y'' = y'\frac{q'(x)}{2q(x)} + q(x)[2\alpha y^3 + 6\beta y^2 + \gamma y + \delta].$$

Intégration:

$$y'^2 = q(x)[\alpha y^4 + 4\beta y^3 + \gamma y^2 + 2\delta y + K].$$

Transformation de passage de (E_1) à (4): $y = \mu Y + \nu$, $x = X$.

---

(5) $$y'' = -3q(x)y' + 2y^3 - y[q' + 2q^2(x)].$$

Intégration:

$$[y' + q(x)y]^2 = y^4 + u, \qquad \frac{u'}{u} = -4q(x).$$

Transformation de passage de (E_1) à (5): $y = \mu Y + \nu$, $x = X$.

Un changement de variables: $\eta = e^{\int q(x)dx}y$, $\xi = \int dx e^{-\int q(x)dx}$ ramène (5) à la forme: $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 2\eta^3$.

---

(6) $$y'' = -\frac{5}{2}q(x)y' + 6y^2 - y\left[q'(x) + \frac{3q^2(x)}{2}\right].$$

Intégration:

$$[y' + q(x)y]^2 = 4y^3 + u, \qquad \frac{u'}{u} = -3q(x).$$

Transformation de passage de (E_1) à (6): $y = \mu Y + \nu$, $x = X$.

Un changement de variables: $\eta = e^{\int q(x)dx}$, $\xi = \int dx e^{-\frac{1}{2}\int q(x)dx}$ ramène (6) à la forme: $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 6\eta^2$.

Equations réductibles au type (4) du tableau I.

(7) $$y'' = 6y^2 + x.$$

Transformation de passage de (E_1) à (7): $y = \mu Y + \nu$, $x = \lambda(X)$.

Equations réductibles au type (5) du tableau I.

(8) $$y'' = 2y^3 + xy + \alpha.$$

Transformation de passage de (E_1) à (8): $y = \mu Y + \nu$, $x = \lambda(X)$.

Equations réductibles au type (6) du tableau I.

$$(9) \qquad y'' = -yy' + y^3 + q(x)(3y' + y^2) - [2q^2(x) - q'(x)]y.$$

Intégration:

$$y = \frac{z'}{z}, \qquad \frac{z'}{\sqrt{4z^3 - 1}} = u, \qquad \frac{u'}{u} = q(x).$$

Transformation de passage de (E_1) à (9): $y = \mu Y + \nu$, $x = X$.

Un changement de variables: $\eta = m(x)y$, $\xi = l(x)$, qui exige deux quadratures, ramène l'équation (9) à la forme: $\eta''_{\xi^2} = -\eta\eta'_\xi + \eta^3$.

$$(10) \qquad y'' = -yy' + y^3 + \frac{q'(x)}{2q(x)}(3y' + y^2) + \left[\frac{q''(x)}{2q(x)} - \frac{q'^2(x)}{q^2(x)} - q(x)\right]y.$$

Intégration:

$$y = \frac{z'}{z - 1}, \qquad \frac{z'}{\sqrt{4z^3 - 12z + K}} = \frac{\sqrt{q(x)}}{2\sqrt{3}}.$$

Transformation de passage de (E_1) à (10): $y = \mu Y + \nu$, $x = X$.

Un changement de variables: $\eta = m(x)y$, $\xi = l(x)$, qui exige une quadrature, ramène l'équation (10) à la forme: $\eta''_{\xi^2} = -\eta\eta'_\xi + \eta^3 - 12\eta$.

$$(11) \qquad y'' = -yy' + y^3 - q(x)[3y' + y^2] - r(x)y - 24s^3(x)$$

avec

$$q = -\left[\frac{s'(x)}{s(x)} + s(x)\right], \qquad r = q'(x) + 2q^2(x) + 12s^2(x).$$

Intégration:

$$y = \frac{\sqrt{4z^3 - 1} + \frac{2}{u^3}}{v\left(z - \frac{1}{u^2}\right)}, \qquad z = \wp(u + K, 0, 1), \qquad v = e^{\int q\,dx}, \qquad u = \frac{1}{sv}.$$

Transformation de passage de (E_1) à (11): $y = \mu Y + \nu$, $x = X$.

Un changement de variables: $\eta = m(x)y$, $\xi = l(x)$, qui exige une quadrature, ramène (11) à la forme:

$$\eta''_{\xi^2} = -\eta\eta'_\xi + \eta^3 - 12\wp(\xi, 0, 1)\eta + 12\wp'(\xi, 0, 1).$$

$$(12) \qquad y'' = -yy' + y^3 - (3y' + y^2)\frac{2q(x)}{q'(x)} - \frac{24xy}{q} + \frac{12}{q}$$

où

$$q = 4x^3 - \varepsilon x - \alpha, \qquad (\varepsilon = 0 \text{ ou } 1,\ \alpha = 1 \text{ si } \varepsilon = 0).$$

Intégration:

$$y = \frac{z' - 1}{z - x}, \qquad \frac{z'}{\sqrt{4z^3 - \varepsilon z + K}} = \frac{1}{\sqrt{4x^3 - \varepsilon x - \alpha}}.$$

Transformation de passage de (E_1) à (12): $y = \mu Y + \nu$, $x = \lambda(X)$.

Un changement de variables: $\eta = y\sqrt{4x^3 - \varepsilon x - \alpha}$, $x = \wp(\xi, \varepsilon, \alpha)$, ramène (12) à la forme:

$$\eta''_{\xi^2} = -\eta\eta'_{\xi} + \eta^3 - 12\wp(\xi, \varepsilon, \alpha) + 12\wp'(\xi, \varepsilon, \alpha).$$

Equations réductibles au type (7) du tableau I.

$$(13) \quad y'' = -yy' + y^3 - 12q(x)y + 12q'(x), \text{ avec } q'' = 6q^2 + x.$$

Transformation de passage de (E_1) à (13): $y = \mu Y + \nu$, $x = \lambda(X)$.

L'équation (13) peut s'écrire: $y = \dfrac{z' - q'}{z - q}$ avec: $z'' = 6z^2 + x$.

---

24. Deuxième cas: $A(Y, X) = \dfrac{1 - \frac{1}{n}}{Y}$.

Tout d'abord, l'équation doit être, dans ce cas, de la forme:

$$(E_2) \qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{Y}\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + a\frac{dY}{dX} + bY^2 + cY$$

$(a, b, c$ fonctions de $X)$.

Pour qu'une équation (E_2) ait ses points critiques fixes, il faut et il suffit qu'elle soit réductible par une transformation:

$$(19) \qquad y = \mu(X)Y, \qquad x = \lambda(X)$$

à une des équations du tableau suivant:

TABLEAU V.

(1) $$y'' = \frac{y'^2}{y}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + q(x)y' + r(x)y,$$

ou

$$y = z^n, \qquad z'' = qz' + \frac{r}{n}z \quad [\text{éq. (3) de IV où } s = 0].$$

(2) $$y'' = \frac{y'^2}{2y} + \frac{q'(x)}{2q(x)}y' + 2q(x)[2y^2 + y]$$

ou

$$y = z^2, \quad z'' = \frac{q'}{2q}z' + q[2z^3 + z] \quad [\text{éq. (4) de IV où } \alpha = 1,\ \beta = 0,\ \delta = 0]$$

(3) $$y'' = \frac{y'^2}{2y} - 3q(x)y' + 4y^2 - 2y[q'(x) + 2q^2(x)]$$

ou

$$y = z^2, \qquad z'' = -3qz' + 2z^3 - z(q' + 2q^2) \quad [\text{éq. (5) de IV}].$$

Intégration:

$$\left(\frac{y'}{2} + qy\right)^2 = y(y^2 + u), \qquad \frac{u'}{u} = -4q.$$

(4) $$y'' = \frac{y'^2}{2y} + 2y^2 + xy$$

ou

$$y = z^2, \qquad z'' = 2z^3 + xz \quad [\text{éq. irréductible (S) de IV, où } \alpha = 0].$$

Remarque. Les équations (2) et (3) de V dont réductibles par une transformation $y = m(x)\eta^2$, $x = l(\xi)$, la première (moyennant une quadrature) à l'équation $\eta''_{\xi^2} = 2\eta^3 + \eta$, [équation (3) de I où $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\delta = 0$], la seconde (moyennant deux quadratures) à l'équation $\eta''_{\xi^2} = 2\eta^3$ [équation (3) de I où $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \delta = 0$].

25. Troisième cas: $A(Y, X) = \frac{1}{Y}$.

L'équation (E″) doit être de la forme:

$$(\mathrm{E}_3)\quad \frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{\left(\frac{dY}{dX}\right)^2}{Y} + \left[aY + b + \frac{c}{Y}\right]\frac{dY}{dX} + dY^3 + eY^2 + fY + g + \frac{h}{Y},$$

où $a, b, \ldots h$ sont des fonctions analytiques de X.

Pour que l'équation (E_3) *ait ses points critiques fixes, il faut et il suffit qu'elle se laisse ramener par une transformation:*

$$(20)\qquad y\begin{cases} = m(X)Y, \\ \text{ou } = m(X)\dfrac{1}{Y}, \end{cases} \qquad x = l(X)$$

à un quelconque des types du tableau II.

On soit reconnaître *algébriquement* si cette condition est remplie, mais le calcul de la transformation (20) peut exiger des *quadratures.* Pour éviter cet inconvénient, il faut substituer au tableau II le tableau VI qui suit.

TABLEAU VI.

Equations réductibles au type (1) du tableau II.

$$(1)\qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + y'\left[q(x)\left\{\delta y + \frac{\varepsilon}{y}\right\} + r(x)\right] + [q'(x) - q(x)r(x)](\delta y^2 - \varepsilon) + s(x)y,$$

$$(\delta = 1 \text{ ou } 0, \qquad \varepsilon = 1 \text{ ou } 0).$$

Intégration:

$$y' = q(\delta y^2 - \varepsilon) + uy, \qquad u' = ru + s.$$

Transformation de passage de (E_3) à (1): $y = \mu Y$, $x = X$, [$\mu \equiv 1$ si ε ou δ est nul].

Un changement de variables $\eta = m(x)y$, $\xi = l(x)$, qui exige trois quadratures, ramène (1) à la forme (1) de II [où $a \equiv 0$ si $\delta = 0$, $b \equiv 0$ si $\varepsilon = 0$].

Equations réductibles au type (2) du tableau II.

(2)
$$y'' = \frac{y'^2}{y} + y'\left[\frac{q(x)}{y} + \frac{r'(x)}{2r(x)} - q(x)\right]$$
$$+ (y+1)\left[r(x)y^2 + \frac{q(x)r'(x)}{2r(x)} - q'(x) - q^2(x)\right].$$

Intégration:

$$[y' + q(y+1)]^2 = ry^2[(y+1)^2 - u], \qquad \frac{u'}{u} = -2q.$$

Transformation de passage de (E_3) à (2): $y = \mu Y$ ou $\frac{\mu}{Y}$, $x = X$.

Un changement de variables $\eta = m(x)y$, $\xi = l(x)$, qui exige deux quadratures, ramène (2) à la forme (2) de II.

Equations réductibles au type (3) du tableau II.

(3)
$$y'' = \frac{y'^2}{y} + y'\left[q(x) + \frac{1}{y}\right] + r(x)y^2 + s(x)y + q(x),$$

avec

$$s = \left(\frac{r'}{r} - q\right)\left[2(q + q') - \frac{r''}{r} + \frac{r'^2}{r^2}\right]$$

$$\left[y' + 1 + y\left(\frac{r'}{r} 2q\right)\right]^2 = 2ry^3 + uy^2, \qquad u' = 2qu + 2r.$$

Transformation de passage (E_3) à (3): $y = \mu Y$ ou $\frac{\mu}{Y}$, $x = X$.

Un changement de variables $\eta = m(x)y$, $\xi = l(x)$, qui exige deux quadratures, ramène l'équation à la forme (3) de II.

Equations réductibles au type (4) du tableau II.

(4)
$$y'' = \frac{y'^2}{y} + \frac{q'(x)}{2q(x)}y' + q(x)\left[\alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma + \frac{\delta}{y}\right].$$

Intégration:

$$y'^2 = q(x)[\alpha y^4 + 2\beta y^3 - 2\gamma y - \delta + Ky^2].$$

Transformation de passage de (E_3) à (4): $y = \mu Y$, $x = X$.

---

(5) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + \frac{(1-j)}{2} q(x) y' + \left[\frac{(1-j)}{2} q^2(x) - q'(x)\right] y + \frac{j-1}{2} y^j$$

$$(j = 3, 2, 0 \text{ ou } -1).$$

Intégration:

$$(y' + qy)^2 - y^{j+1} = uy^2, \qquad \frac{u'}{u} = (1-j)q.$$

Transformation de passage de (E_3) à (5): $y = \mu Y$, $y = X$.

Un changement de variables $\eta = m(x) y$, $\xi = l(x)$, qui exige deux quadratures, ramène (5) à la forme: $\eta''_{\xi^2} = \frac{\eta'^2_\xi}{\eta} + \eta^j$, (équation (4) de II où les α, β, γ, δ sont tous nuls sauf un seul).

(6) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + q(x) y' + r(x) y.$$

Intégration:

$$\frac{y'}{y} = u, \qquad u' = qu + r.$$

Transformation de passage de (E_3) à (6): $y = Y$, $x = X$.

Un changement de variables $\eta = m(x) y$, $\xi = l(x)$, qui exige trois quadratures, ramène (6) à la forme: $\eta''_{\xi^2} = \frac{(\eta'_\xi)^2}{\eta}$, équation (4) de II où $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Equations réductibles au type (5) du tableau II.

(7) $$y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{1}{x}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}.$$

Transformation de passage de (E_3) à (7): $y = \mu Y$, $x = \lambda(X)$.

La transformation $x = e^\xi$ ramène (7) au type irréductible (5) de II.

26. Quatrième cas: $A(Y, X) = \frac{1}{2Y} + \frac{1}{Y-1}$.

Tout d'abord l'équation (E″) doit être de la forme

$$(E_4) \qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = \left(\frac{dY}{dX}\right)^2\left[\frac{1}{2Y} + \frac{1}{Y-1}\right] + \frac{dY}{dX}\left[\frac{aY+b}{Y-1}\right] + \frac{cY^2+dY}{Y-1}$$

(a, b, c, d fonctions analytiques de X).

Pour que (E_4) ait ses points critiques fixes, il faut et il suffit que la transformation $Y = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ ramène (E_4) à une équation (E_3) à points critiques fixes. On déduit de là que les équations (E_4) cherchées ou bien coïncident avec une des trois premières équations du tableau VII qui suit, ou bien se ramènent à la quatrième par une transformation: $x = \lambda(X)$ [λ désignant toujours une fonction algébrique des coëfficients a, b, c, d de (E_4) et de leurs dérivées].

TABLEAU VII.

$$(1) \quad y'' = y'^2\left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right] + \frac{2y'}{y-1}[q(x)y + r(x)] + 2y[q^2 - r^2 - q' - r'].$$

Intégration:

$$y' + 2(q+r)y = u(y-1)\sqrt{y}, \qquad \frac{u'}{u} = r - q.$$

La transformation: $y = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ ramène (1) à l'équation:

$$z'' = \frac{z'^2}{z} + \left[\frac{q+r}{2}\left(\frac{1}{z} + z\right) + (q-r)\right]z' + \left[\frac{q^2 - r^2 - q' - r'}{2}\right](1 - z^2),$$

(équation (1) de VI, où $\delta = \varepsilon = 1$, et où $s \equiv 0$).

$$(2) \qquad y'' = y'^2\left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right] + y'\frac{q'(x)}{2q(x)} + 4q(x)y\left[\gamma + 2\delta\frac{y+1}{y-1}\right].$$

Intégration:

$$y'^2 = 2q(x)y\left[2\gamma(1-y^2) - \delta(y^2 + 6y + 1) + K(y-1)^2\right].$$

La transformation $y = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ ramène (2) à l'équation:

$$z'' = \frac{z'^2}{z} + \frac{z'q'}{2q} + q\left[\delta\left(\frac{1}{z} - z^3\right) + \gamma(1 - z^2)\right],$$

(équation (4) de VI ou $\alpha = -\delta$, $\beta = -\gamma$).

(3) $$y'' = y'^2\left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right] + y'q(x).$$

Intégration:

$$y' = u(y-1)\sqrt{y}, \qquad \frac{u'}{u} = q.$$

La transformation $y = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ ramène (3) à l'équation:

$$z'' = \frac{z'^2}{z} + qz' \quad \text{(équation (6) de VI où } r \equiv 0\text{)}.$$

(4) $$y'' = y'^2\left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right] - \frac{y'}{x} + 4\beta\frac{y}{x} + 8\delta y\frac{y+1}{y-1}.$$

Transformation de passage de (E_4) à (4): $y = Y$, $x = \lambda(X)$.

La transformation $y = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ ramène (4) à l'équation irréductible

$$z'' = \frac{z'^2}{z} - \frac{z'}{x} + \frac{\beta}{x}(1 - z^2) + \delta\left[\frac{1}{z} - z^3\right],$$

(équation (7) de VI où $\alpha = -\beta$, $\gamma = -\delta$).

27. Cinquième, sixième et septième cas:

$$A(Y, X) = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1}\right] \quad \text{ou} \quad = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1}\right] \quad \text{ou} \quad = \frac{2}{3}\frac{1}{Y} + \frac{1}{2(Y-1)}.$$

Pour que l'équation (E'') ait ses points critiques fixes, *il faut alors et il suffit qu'elle coïncide avec une des trois équations qui suivent.*

TABLEAU VIII.

(1) $$y'' = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right]y'^2 + q(x)y'.$$

Intégration:

$$\frac{y'}{y^{\frac{2}{3}}(y-1)^{\frac{2}{3}}} = u, \qquad \frac{u'}{u} = q.$$

La transformation: $y = \frac{1}{2}[1 + i\sqrt{4z^3 - 1}]$ ramène (1) à l'équation:

$z'' = \frac{6z^2}{4z^3 - 1}z'^2 + q(x)z'$, éq. (1) de IX (voir plus loin) où $g_2 = 0$, $g_3 = 1$.

(2) $$y'' = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right]y'^2 + q(x)y'.$$

Intégration:

$$\frac{y'}{y^{\frac{3}{4}}(y-1)^{\frac{3}{4}}} = u, \qquad \frac{u'}{u} = q.$$

La transformation $y = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{i\sqrt{4z^3 + z}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}\right]$ ramène (2) à l'équation:

$$z'' = \frac{\left(6z^2 + \frac{1}{2}\right)}{4z^3 + z}z'^2 + q(x)z', \text{ éq. (1) de IX où } g_2 = -1,\ g_3 = 0.$$

(3) $$y'' = \left[\frac{2}{3}\frac{1}{y} + \frac{1}{2(y-1)}\right]y'^2 + q(x)y'.$$

Intégration:

$$\frac{y'}{y^{\frac{2}{3}}(y-1)^{\frac{1}{2}}} = u, \qquad \frac{u'}{u} = q.$$

La transformation $y = 4z^3$ ramène (3) à l'équation:

$$z'' = \frac{6z^2}{4z^3 - 1}z'^2 + q(x)z', \text{ éq. (1) de IX où } g_2 = 0,\ g_3 = 1.$$

28. Huitième cas: $A(Y, X) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1} + \frac{1}{Y-H}\right)$,

$$H \equiv X \quad \text{ou} \quad H \equiv \alpha.$$

Si $H = \alpha$, il est loisible, en remplaçant Y par $\left(Y + \frac{1+H}{3}\right)$, de substituer à A l'expression:

$$A = \frac{6Y^2 - \frac{g_2}{2}}{4Y^3 - g_2 Y - g_3}, \quad (g_2, g_3 \text{ constantes numériques}).$$

Cela fait, *pour que l'équation considérée ait ses points critiques fixes, il faut et il suffit qu'elle coïncide avec une des deux équations qui suivent.*[1]

TABLEAU IX.

(1)
$$y'' = -\frac{6y^3 - \frac{g_2}{2}}{4y^3 - g_2 y - g_3} y'^2 + g(x)y'.$$

Intégration:

$$\frac{y'}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = u, \qquad \frac{u'}{u} = q.$$

Une transformation $x = l(\xi)$, qui exige deux quadratures, ramène (1) au type (1) de (III).

(2)
$$y'' = \frac{y'^2}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right) + y'\left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\right) + \frac{y(y-1)}{2x(x-1)(y-x)}$$

équation (3) de III.

29. La question que nous nous sommes posés au début du n° 22 est maintenant complètement résolue:

Etant donnée une équation:

(E)
$$\frac{d^2Y}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right)$$

[1] Il convient de remarquer que les fonctions $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$ pour l'équation (1) de IX, et $\sqrt{y(y-1)(y-x)}$ pour l'équation (2) de IX ont aussi leurs points critiques fixes.

où R est rationnel en $\frac{dY}{dX}$, Y, analytique en X, on sait reconnaître algébriquement si l'équation a ses points critiques fixes; quand il en est ainsi, on la ramène **algébriquement** *à une des équations des tableaux IV, V, VI, VII, VIII et IX.*

J'insiste sur le caractère vraiment simple et *pratique* des opérations algébriques qu'entraîne notre méthode. Tout revient à vérifier si l'équation donnée se laisse ramener par une transformation:

$$y = \frac{\mu(X)Y + \nu(X)}{\mu_1(X)Y + \nu_1(X)}, \qquad x = \lambda(X)$$

à un des types des tableaux IV, V, VI, VII, VIII et IX. Cette vérification ne présente aucune difficulté, et la réduction (quand elle est possible) s'opère algébriquement. Une fois cette réduction effectuée, l'équation (si elle est intégrable) se trouve toute intégrée dans les tableaux précédents.

Parmi les 33 équations des tableaux IV, V, ..., IX, il en est sept dont l'intégrale est une fonction *essentiellement transcendante des deux constantes*, à savoir les équations (7), (8), (13) de IV, (2) de V, (7) de VI, (4) de VII et (2) de IX.

Ces sept équations se ramènent d'ailleurs algébriquement à quatre d'entre elles, qui sont les équations (7), (8) de IV, (7) de VI et (2) de IX.

Quant aux équations dont l'intégrale renferme *algébriquement les deux constantes*, ce sont les *trois* équations (1), (3) de IV et (1) de V, c'est-à-dire:

$$y'' = q(x)y' + r(x)y + s(x),$$

$$y'' = -(3yy' + y^3) + q(x)y + r(x), \quad \text{ou} \quad y = \frac{z'}{z}, \qquad z''' = qz' + rz,$$

$$y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y'^2}{y} + q(x)y' + r(x)y, \quad \text{ou} \quad y = z^n, \qquad z'' = qz' + \frac{r}{n}z.$$

L'intégrale des *vingt-trois* autres équations est une fonction *semi-transcendante* des constantes. Elles équivalent respectivement à un système

$$(21) \qquad P(y', y, x) = uH(y), \qquad u' = \rho(x)u + \sigma(x)$$

où H est un polynôme en y (indépendant de x), et P un polynôme en y', y, dont les coëfficients ainsi que $\rho(x)$ et $\sigma(x)$ sont des combinaisons *rationnelles* des coëfficients de (E') et de leurs dérivées.

Pour des valeurs numériques (arbitraires) de x et u, le *genre* de la relation $P = 0$ entre y', y est égal à zéro ou à un. Une transformation $y = \varphi(v, u, x)$ ramène l'équation à points critiques fixes $P(y', y, x) = u(x)$ à une des deux suivantes:

$$v' = \lambda(u, x)v^2 + \mu(u, x)v + \nu(u, x),$$

ou

$$\frac{v'}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - k^2v^2)}} = \lambda(u, x), \quad (k \text{ numérique}).$$

La fonction $\varphi(v, u, x)$ est rationnelle en v [ou, dans le sesond cas, en v et $\sqrt{(1 - v^2)(1 - k^2v^2)}$] et ses coëfficients sont des fonctions algébriques de u, des coëfficients de (E′) et de leurs dérivées. La fonction $u(x)$ se déduit des coëfficients de (E′) par les deux quadratures:

$$e^{\int p(x)dx}, \quad \int dx\, \sigma e^{-\int p dx}.$$

Nous vérifions bien ainsi, en les précisant, les théorèmes généraux rappelés au n° 17.

30. La discussion précédente permet de résoudre le problème intéressant qui s'énonce ainsi:

Déterminer explicitement toutes les équations à points critiques fixes de la forme:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right)$$

où R est rationnel en $\frac{dY}{dX}$, Y et analytique en X.

La réponse est immédiate: Il suffit d'adjoindre aux tableaux I, II et III les tableaux V, VII et VIII,[1] et d'effectuer sur toutes les équations I, II, III, V, VII, VIII la transformation la plus générale:

[1] Il est loisible de supposer:

$$\left.\begin{array}{lll} q \equiv 0,\ r \equiv 0 & \text{dans l'équation} & (1) \\ q \equiv 1 & \text{»} \quad \text{»} & (2) \\ q \equiv 0 & \text{»} \quad \text{»} & (3) \end{array}\right\} \text{de V}$$

$$\left.\begin{array}{lll} q \equiv r & \text{»} \quad \text{»} & (1) \\ q \equiv 1 & \text{»} \quad \text{»} & (2) \\ q \equiv 0 & \text{»} \quad \text{»} & (3) \end{array}\right\} \text{de VII}$$

$q \equiv 0$ dans les 3 éq. VIII.

$$y = \frac{a(X)\,Y + b(X)}{c(X)\,Y + d(X)}, \qquad x = l(X), \tag{22}$$

$[a, b, c, d, l$ sont des fonctions analytiques quelconques de $X]$.

En particulier, *toutes les équations à points critiques fixes de la forme*

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = [a(X)\,Y + b(X)]\,\frac{dY}{dX} + c(X)\,Y^3 + d(X)\,Y^2 + e(X)\,Y + f(X)\,Y + g(X) \tag{F}$$

s'obtiennent en effectuant sur les sept équations du tableau I la transformation

$$y = a(X)\,Y + b(X), \qquad x = l(X) \tag{23}$$

la plus générale.

Parmi ces 7 types d'équations I, il en est deux [le type (5), et le type (3) où $\alpha \neq 0$] dont l'intégrale possède *deux* familles de *pôles mobiles:* à savoir deux développements polaires distincts, déduits de l'équation différentielle.

Les types (1), (2), (6), (7) d'une part, le type (4) et le type (3) [où $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$] d'autre part possèdent *une seule* famille de *pôles mobiles* qui sont simples pour le premier groupe, doubles pour le second. Enfin le type (3), (où $\alpha = \beta = 0$) — équations linéaires — ne possède pas de pôles mobiles.

Pour qu'une équation (F) donnée possède deux familles de pôles mobiles, il faut et il suffit que les coëfficients $a, b, \ldots, g$, satisfassent à deux conditions différentielles. Quand ces conditions sont remplies, l'équations est réductible par une transformation (23) à l'une des équations (3) ou (5) de I; elle a donc ses points critiques fixes. Les deux conditions indiquées par M. Picard[1] (Acta mathematica, tome 17, p. 300) se trouvent ici être *suffisantes* sans être *nécessaires.*

Enfin, dans le problème énoncé au début de ce n°, assujettisons le coëfficient différentiel $R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right)$, *rationnel* en $\frac{dY}{dX}$, Y, à être ***algébrique en X.*** La solution peut alors recevoir la forme suivante:

Toutes les équations à points critiques fixes de la forme

$$\frac{d^2X}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right)$$

[1] Voir le n° 8, p. 9 et la note 1 de la page 10.

où R est rationnel en $\frac{dY}{dX}$, Y et algébrique en X, se déduisent des 32 équations IV, V, VI, VII, VIII et IX (où l'équation 13 de IV est supprimée) en choisissant, pour les coëfficients **arbitraires** *$q(x)$, $r(x)$, ... de ces équations, des fonctions algébriques quelconques et en effectuant sur ces équations la transformation algébrique (22) la plus génévle.* [1]

31. *Equations* (E) *où $R(y', y, x)$, rationnel en y', est algébrique en y.*

Il nous reste maintenant à étudier les équations (E) où R est non plus *rationnel*, mais *algébrique* en y.

Soit donc l'équation:

$$y'' = A(y, x)y'^2 + B(y, x)y' + C(y, x), \tag{E}$$

où A, B, C sont algébriques en y et analytiques en x. Pour x arbitrairement choisi, il est loisible d'exprimer rationnellement $A(y)$, $B(y)$, $C(y)$ à l'aide de y et d'une irrationnelle $t(y)$, et cela de telle façon que $t(y)$ soit une fonction rationnelle de y, A, B, C.

Pour cela, il suffit, par exemple, de poser:

$$t = A\lambda^2 + B\lambda + C, \tag{24}$$

λ désignant une constante ou une fonction de x; la fonction algébrique $t(y)$ vérifie une relation:

$$H(t, y, x) = 0 \tag{25}$$

où H est un polynôme en t, y, dont les coëfficients dépendent analytiquement de x. Les fonctions A, B, C s'expriment *rationnellement* [2] à l'aide de t et de y, soit:

$$A = L(t, y, x), \qquad B = M(t, y, x), \qquad C = N(t, y, x),$$

les coefficients $a(x)$, $b(x)$, ... des fonctions rationnelles $L(t, y)$, $M(t, y)$, $N(t, y)$ étant des fonctions analytiques de x.

---

[1] J'entends par là que les coëfficients a, b, c, d, l, de (22) sont des fonctions algébriques quelconques de X.

[2] La valeur de x étant arbitrairement choisie, il n'y a d'exception que pour un nombre fini de valeurs de λ; on donnera à λ une valeur distincte de ces valeurs exceptionnelles.

Inversement, la fonction $t(y)$ s'exprime *rationnellement* à l'aide de y, A, B, C, ou, si l'on veut, des variables y, y', y'' liées par la relation (E). Soit:

$$t = \rho(y'', y', y, x), \tag{26}$$

x figurant analytiquement[1] dans les coëfficients de la fraction rationnelle $\rho(y'', y', y)$.

Ceci posé, nous établissons d'abord ce théorème:

Pour que l'équation (E) *ait ses points critiques fixes, il faut que, pour x quelconque, le genre ϖ de la relation algébrique $H(t, y, x) = 0$ entre t, y soit égal à* 0 *ou à* 1.[2]

On sait reconnaître algébriquement si cette condition est remplie. Quand $\varpi = 0$, on sait exprimer *birationnellement*[3] y et t en fonction d'un paramètre Y, et quand $\varpi = 1$, en fonction de Y et de $\sqrt{Y(Y-1)(Y-H)}$; H désignant une combinaison algébrique des coëfficients $a(x)$, $b(x)$ ... de A, B, C. Si H est une *constante*, il est loisible de donner au radical la forme $\sqrt{4Y^3 - g_2 Y - g_3}$ (g_2, g_3 constantes numériques). Si H est une fonction de x, on posera $H = X$. Dans tous les cas, la fonction $Y(x)$ ou $Y(X)$ a ses points critiques fixes en même temps que l'intégrale générale $y(x)$ de (E).

32. Moyennant une transformation algébrique toute élémentaire, nous sommes ramenés ainsi aux cas où $R(y', y, x)$ est soit rationnel en y, soit rationnel en y, $\sqrt{P(y)}$, P désignant un des deux polynômes $(4y^3 - g_2 y - g_3)$ et $[y(y-1)(y-x)]$. Pour que l'équation donnée ait ses points critiques

---

[1] Si A, B, C sont algébriques en x, il suffit de choisir $\lambda(x)$ algébrique pour que x figure *algébriquement* dans toutes ces formules.

[2] Il est loisible de substituer à $t(y)$ toute irrationnelle $T(y)$ qui lui correspond par la transformation:

$$T = r(t, y, x), \qquad t = r_1(T, y, x)$$

où r, r_1 sont rationnels le premier en t, y, le second en T, y et analytiques en x. Inversement, toute irrationnelle $T(y)$ qui peut remplacer $t(y)$ s'en déduit par une transformation birationnelle de l'espèce précédente; cette transformation ne change pas le genre ϖ.

[3] J'entends par là que y et t sont rationnels en Y et qu'inversement Y est rationnel en y, t; x figure analytiquement.

fixes, il faut et il suffit que l'équation transformée jouisse elle-même de cette propriété.

D'après cela, deux cas sont à distinguer:

Si $\varpi = 0$, nous sommes ramenés au problème du n° 22 résolu plus haut dans tous ses détails.

Si $\varpi = 1$, je montre que l'équation transformée doit coïncider avec un des trois types du tableau X qui suit:

TABLEAU X.

$$(1) \qquad y'' = \frac{6y^2 - \frac{g_2}{2}}{4y^3 - g_2 y - g_3} y'^2 + q(x) y' + r(x) \sqrt{4y^3 - g^2 y - g_3}.$$

Intégration:

$$\frac{y'}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = u, \qquad u' = qu + r.$$

Une transformation $\eta = \varphi(y, x)$, $\xi = l(x)$, (où φ est algébrique en y mais qui exige 3 quadratures), ramène (1) à l'équation

$$\eta''_{\xi^2} = \frac{6\eta^2 - \frac{g_2}{2}}{4\eta^3 - g_2\eta - g_3} \qquad \text{(éq. (1) de III).}$$

$$(2) \quad y'' = \frac{y'^2}{2}\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right] + y'\left[\frac{1}{x-y} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\right] + \frac{y(y-1)}{2x(x-1)(y-x)}$$
$$+ q(x)\sqrt{y(y-1)(y-x)}.$$

Intégration:

$$J(y, x) = u, \qquad u'' + \frac{2x-1}{x(x-1)} u' + \frac{u}{4x(x-1)} = q,$$

où,

$$J(y, x) = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-x_0)}}$$

et par suite,

$$u = u_1(x) + K_1\omega_1 + K_2\omega_2;$$

($2\omega_1$ et $2\omega_2$ périodes de $J(y)$; K_1 et K_2 constantes arbitraires).

Une transformation $\eta = \varphi(y, y_1)$, où φ est algébrique en y, y_1 et où y_1

désigne une solution quelconque de (2), annule $q(x)$, c'est-à-dire ramène (2) à l'équation (2) de III.

$$(3)\qquad y'' = \frac{y'^2}{2}\left[\frac{6y^2-\frac{g_2}{2}}{4y^3-g_2y-g_3}+\frac{i\pi}{\omega\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}}\right] + q(x)y' + r(x)\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}$$

[2ω période quelconque de $\wp(u, g_2, g_3)$].

Intégration:

$$\frac{y'}{\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}} = u, \qquad u' = \frac{i\pi}{\omega}u^2 + qu + r.$$

Une transformation $\eta = \varphi(y, x)$, $\xi = l(x)$ [algébrique en y, mais qui exige la connaissance d'une intégrale de (3)] ramène (3) à l'équation:

$$\eta''_{\xi^2} = \eta'^2\left[\frac{6\eta^2-\frac{g_2}{2}}{4\eta^3-g_2\eta-g_3}+\frac{i\pi}{\omega\sqrt{4\eta^3-g_2\eta-g_3}}\right]$$

[équation (3) de III].

33. Les conclusions auxquelles nous arrivons peuvent s'énoncer ainsi:

Etant donnée une équation

$$(\mathrm{E})\qquad y'' = R(y', y, x)$$

où R est rationnel en y', algébrique en y, analytique en x, on sait reconnaître ***algébriquement***[1] *si son intégrale a ses points critiques fixes, ou bien on ramène algébriquement l'équation à la forme:*

$$(27)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = y'^2\left[\frac{6y^2-\frac{g_2}{2}}{4y^3-g_2y-g_3}+\frac{\alpha}{\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}}\right] + q(x)y' + r(x)\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}$$

(g_2, g_3, α constantes numériques).

[1] J'entends par là, comme je l'ai dit (n° 16), que les conditions pour que les points critiques de (E) soient fixes se traduisent par un nombre fini de relations différentielles algébriques entre les coefficients $a(x)$, $b(x)$, ... de (E).

Dans ce dernier cas, pour que l'équation donnée ait ses points critiques fixes, il faut encore que la quantité $\frac{2i\pi}{\alpha}$ soit une période de $\wp(u, g_2, g_3)$, *condition transcendante.* Quand cette condition est remplie, l'intégrale générale a ses points critiques fixes, *mais possède des points essentiels (isolés) mobiles.*

Dans tous les autres cas, l'intégrale ne présente d'autres singularités mobiles que des *pôles,* et l'équation se ramène *algébriquement* à un des types des tableaux IV, V, VI, VII, VIII, IX et X.

La discussion précédente indique avec une précision parfaite les opérations (très simples) qui réalisent cette réduction, ainsi que les intégrations à effectuer dans les divers cas où l'équation est intégrable.

Nous vérifions, là encore, en les précisant, les théorèmes généraux rappelés au n° 17.

34. Posons-nous maintenant la question suivante:

Déterminer toutes les équations à points critiques fixes de la forme:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right) \tag{e}$$

où R est rationnel en $\frac{dY}{dX}$ et algébrique en Y et en X.

La réponse est la suivante:

On considère toutes les équations du tableau IV [abstraction faite de l'équation (13)] et toutes les équations des tableaux VI et X, où les fonctions arbitraires $q(x)$, $r(x)$ etc.... sont supposées *algébriques.* On effectue dans ces équations la transformation la plus générale

$$Y = \varphi(y, x), \qquad X = \lambda(x)$$

où φ et λ sont algébriques en x et où φ est rationnel soit en y (pour les équations IV, VI) soit en y et $\sqrt{P(y)}$ (pour les équations X)

$$\left|\begin{array}{l} P \equiv 4y^3 - g_2 y - g_3 \ \text{ pour (1) et (3) de X} \\ P = y(y-1)(y-x) \ \text{ pour (2) de X} \end{array}\right|.$$

Toutes les équations ainsi obtenues ont leurs points critiques fixes et elles constituent les seules équations (e) *qui jouissent de cette propriété.*

35. *Remarques sur les équations* (e).

Parmi les équations (e) à points critiques fixes, celles dont l'intégrale est une fonction *essentiellement transcendante des deux constantes* peuvent seules conduire à des *transcendantes nouvelles.* D'après ce qui précède, ces dernières équations sont *réductibles algébriquement à un des quatre types:*

$$(28) \qquad y'' = 6y^2 + x$$

$$(29) \qquad y'' = 2y^3 + xy + \alpha$$

$$(30) \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{1}{x}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}$$

$$(31) \qquad y'' = \frac{y'^2}{2}\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right] + y'\left[\frac{1}{x-y} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\right] + \frac{y(y-1)}{2x(x-1)(y-x)} + q(x)\sqrt{y(y-1)(y-x)}.$$

L'intégrale $y(x)$ des deux premiers types est *méromorphe* dans tout le plan; celle du 3[e] admet deux points critiques *transcendants fixes* $x = 0$, $x = \infty$; *si on change* x *en* e^X, $y(X)$ est méromorphe dans tout le plan des X. — Enfin l'intégrale $y(x)$ de (31) admet trois points critiques fixes $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$; pour rendre la fonction uniforme, il faut faire un changement de variable $x = \psi(X)$, où $\psi(X)$ est une fonction telle que la fonction modulaire, qui doit présenter un ensemble parfait de singularités essentielles:[1] l'intégrale générale $y(X)$ est alors une fonction uniforme qui présente les mêmes singularités essentielles que $\psi(X)$, et ne saurait par suite être méromorphe.

Les seules fonctions méromorphes nouvelles qu'engendrent les équations (e) *à points critiques fixes, se laissent donc définir par les trois équations* (28), (29) *et:*

$$(32) \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(\alpha y^2 + \beta) + e^{2x}\left(\gamma y^3 + \frac{\delta}{y}\right).$$

[1] En effet, $\psi(X)$ est une fonction uniforme qui ne doit acquérir aucune des trois valeurs 0, 1, ∞.

Faisons une dernière remarque sur le cas où l'intégrale d'une équation (e) (à points critiques fixes) présente des *singularités essentielles mobiles:* ces singularités (qui sont toujours des points essentiels isolés au sens de WEIERSTRASS) peuvent être en nombre infini: elles admettent alors un nombre fini de *points-limites* qui sont *fixes.*

Considérons par exemple l'équation:

$$y'' = y'^2\left[\frac{\left(6y^2 - \frac{g_2}{2}\right)}{4y^3 - g_2y - g_3} + \frac{i\pi}{\omega}\frac{1}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}\right] - \frac{i\pi}{\omega}\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}$$

qui équivaut à la suivante:

$$\frac{y'}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}} = \frac{1 + e^{\frac{2i\pi}{\omega}(x+h)}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{\omega}(x+h)}};$$

l'intégrale est une fonction uniforme qui admet comme points essentiels les points $x = -h + n\omega$ (n entier positif, negatif ou nul), points en nombre infini, dont $x = \infty$ est le point limite.

Equations (E) *indépendantes de x.*

36. Les tableaux formés précedemment permettent de déterminer explicitement toutes les équations

$$\text{(f)} \qquad Y'' = R(Y', Y)$$

à intégrale générale uniforme [R est rationnel en $\frac{dY}{dX}$, algébrique en Y et indépendant de X].

Il suffit, dans les tableaux IV, VI, X, de ne considérer que les types où x ne figure pas[1] dans le coëfficient différentiel et de faire le changement de variables: $Y = \varphi(y)$, φ désignant une fonction *rationnelle* de y (ou de y et de $\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}$ pour les équations (1) et (3) de X); on ne change pas la variable indépendante.

Nous sommes ainsi conduits au tableau suivant:

[1] D'après cela, les types (7), (8), (12) et (13) de IV, (7) de VI, (2) de X doivent être exclus. Dans les autres types, les fonctions arbitraires $q(x)$, etc., doivent être remplacées par des constantes arbitraires.

TABLEAU XI.

(1) $$y'' = -3yy' - y^3 + \alpha y + \beta.$$

Intégration:

$$y = \frac{z'}{z}, \qquad z''' = \alpha z' + \beta z.$$

(2) $$y'' = -2yy' + \alpha(y' + y^2) + \beta.$$

Intégration:

$$y' + y^2 = Ke^{\alpha x} - \frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{si} \quad \alpha \neq 0, \quad \text{et} \quad y' + y^2 = \beta x + K, \quad \text{si} \quad \alpha = 0.$$

(3) $$y'' = \alpha y' + \beta y + \gamma,$$

équation linéaire du second ordre à coëfficients constants.

(4) $$y'' = 2\alpha y^3 + 6\beta y^2 + \gamma y + \alpha.$$

Intégration:

$$y'^2 = \alpha y^4 + 4\beta y^3 + \gamma y^2 + 2\delta y + K.$$

(5) $$y'' = 3\alpha y' + 2y^3 - 2\alpha^2 y, \qquad \alpha \neq 0.$$

Intégration:

$$y = i\alpha Ke^{\alpha x} sn_{k^2=-1}(u), \qquad u = Ke^{\alpha x} + K_1.$$

(6) $$y'' = \frac{5}{2}\alpha y' + 6y^2 - 3\frac{\alpha^2}{2}y, \qquad \alpha \neq 0.$$

Intégration:

$$y = \frac{\alpha^2 K^2}{4} e^{\alpha x} \wp(u, 0, -1), \qquad u = Ke^{\frac{\alpha x}{2}} + K_1.$$

(7) $$y'' = -yy' + y^3 + \alpha(3y' + y^2) - 2\alpha^2 y.$$

Intégration:

$$y = Ke^{\alpha x}\frac{\wp'(u, 0, 1)}{\wp(u, 0, 1)}, \qquad \begin{cases} u = \dfrac{K}{\alpha}e^{\alpha x} + K_1, & \text{si} \quad \alpha \neq 0 \\ u = Kx + K_1, & \text{si} \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

(8) $$y'' = -yy' + y^3 - \alpha^2 y, \qquad \alpha \neq 0.$$

Intégration:

$$y = \frac{\alpha}{2\sqrt{3}}\frac{\wp'(u, 12, K)}{\wp(u, 12, K) - 1}, \qquad u = \frac{\alpha x}{2\sqrt{3}} + K_1.$$

(9) $$y'' = -yy' + y^3 + \alpha(3y' + y^2) - 14\alpha^2 y - 24\alpha^3, \qquad \alpha \neq 0.$$

Intégration:

$$y = \alpha K e^{\alpha x}\frac{\wp'(u, 0, 1) + \dfrac{2e^{-3\alpha x}}{K^3}}{\wp(u, 0, 1) - \dfrac{e^{-2\alpha x}}{K^2}}, \qquad u = Ke^{\alpha x} + K_1.$$

---

(10) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + y'\left[\alpha\left(y + \frac{\varepsilon}{y}\right) + \beta\right] - \alpha\beta[y^2 - \varepsilon] + \gamma y, \qquad (\varepsilon = 0 \text{ ou } 1).$$

Intégration:

$$y' = \alpha(y^2 - \varepsilon) + uy, \qquad \begin{cases} u = Ke^{\beta x} - \dfrac{\beta}{\alpha}, & \text{si} \quad \beta \neq 0, \\ u = \gamma x + K, & \text{si} \quad \beta = 0. \end{cases}$$

(11) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + \alpha y'\left[\frac{1}{y} - 1\right] + (y + 1)[\beta^2 y^2 - \alpha^2].$$

Intégration:

$$y = -1 + Ke^{-\alpha x}\frac{1 + v^2}{1 - v^2}, \qquad 2v' = \beta[Ke^{-\alpha x}(1 + v^2) + v^2 - 1].$$

(12) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + y'\left[\alpha + \frac{1}{y}\right] + 2\beta^2 y^2 - 2\alpha^2 y + \alpha, \qquad (\alpha \text{ ou } \beta \neq 0).$$

Intégration:

$$y=\frac{1}{2\alpha}+e^{-2\alpha x}[K+u^2],\qquad u'=\beta e^{\alpha x}\left[\frac{1}{2\alpha}+(K+u^2)e^{-2\alpha x}\right],\quad \text{si}\quad \alpha\neq 0,$$

$$y=-x+K+u^2,\qquad u'=\beta[u^2+K-x],\quad \text{si}\quad \alpha=0,\ \beta\neq 0.$$

(13) $$y''=\frac{y'^2}{y}+\alpha y^3+\beta y^2+\gamma+\frac{\delta}{y}.$$

Intégration:

$$y'^2=\alpha y^4+2\beta y^3-2\gamma y-\delta+Ky^2.$$

(14) $$y''=\frac{y'^2}{y}+\frac{(j-1)}{2}\alpha y'-\frac{(j-1)}{2}\alpha^2 y+\frac{(j-1)}{2}y^j,\quad (j=2 \text{ ou } 3,\ \alpha\neq 0).$$

Intégration:

$$y=\frac{\alpha K}{2}\frac{e^{\alpha x+u}}{(1-e^{2u})},\qquad u=Ke^{\alpha x}+K_1,\quad \text{si}\quad j=3,$$

$$y=\frac{\alpha^2K^2e^{\alpha x+u}}{(1-e^u)^2},\qquad u=Ke^{\frac{\alpha}{2}x}+K_1,\quad \text{si}\quad j=2.$$

(15) $$y''=\frac{y'^2}{y}+\alpha y'+\beta y.$$

Intégration:

$$y=Ke^v,\qquad \begin{cases} v=-\dfrac{\beta}{\alpha}x+K_1e^{\alpha x}, & \text{si}\quad \alpha\neq 0,\\[2ex] v=\dfrac{\beta x^2}{2}+K_1x, & \text{si}\quad \alpha=0.\end{cases}$$

(16) $$y''=y'^2\left[\frac{6y^2-\frac{g_2}{2}}{4y^3-g_2y-g_3}+\frac{\lambda}{\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}}\right]+\alpha y'+\beta\sqrt{4y^3-g_2y-g_3},$$

$$\left[\lambda=0 \text{ ou } \lambda=\frac{i\pi}{\omega},\ 2\omega \text{ période quelconque de } \wp(u,g_2,g_3)\right].$$

Intégration:

$$y = \wp(u\,,\, g_2\,,\, g_3)$$

avec:

$$u = \frac{\beta y^2}{2} + Kx + K_1, \qquad \text{si} \quad \lambda = 0,\ \alpha = 0$$

$$u = -\frac{\beta}{\alpha}x + Ke^{\alpha x} + K_1, \qquad \text{si} \quad \lambda = 0,\ \alpha \neq 0$$

$$u = \int \frac{g + hKe^{\mu x}}{1 - Ke^{\mu x}}dx + K_1, \quad \text{si} \quad \lambda = \frac{i\pi}{\omega},\ \omega\alpha^2 \neq 4\beta i\pi$$

$$\left[\mu = \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\frac{i\pi}{\omega}}, \qquad g = \frac{\omega}{2i\pi}(\alpha + \mu), \qquad h = \frac{\omega}{2i\pi}(\alpha - \mu)\right]$$

$$u = -\frac{a\omega}{2i\pi}x + \frac{\omega}{i\pi}\log(x - K) + K_1, \quad \text{si} \quad \lambda = \frac{i\pi}{\omega},\ \omega\alpha^2 = 4\beta i\pi.$$

Toutes les équations (f) *à points critiques fixes se déduisent des* (16) *équations précédentes par le changement de variables:*

$$Y = \varphi(y),$$

φ *désignant une fonction rationnelle de* y (ou, pour l'équation (16), de y et de $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$).

37. Ces 16 équations XI sont toutes *intégrables,* j'entends réductibles aux quadratures et à une équation de Riccati. Leur intégrale est une combinaison de fonctions *rationnelles, exponentielles et elliptiques,* exception étant faite pour les (5) types (2), (10), (11), (12) et (16) (où $\lambda \neq 0$): l'intégrale des équations (2), (10), (11), (12) dépend *d'une équation de* Riccati dont le coëfficient différentiel est *linéaire en* x *ou* $e^{\mu x}$ (μ constante numérique). L'intégrale de l'équation (16) (où $\lambda \neq 0$) est donnée par $y = \wp(u)$ avec

$$u = \int \rho(e^{\mu x})dx \quad \text{ou bien} \quad u = \mu x + \nu \log(x - K) + K_1,$$

ρ désignant une fraction du premier degré en $e^{\mu x}$. Toutes les périodes de u sont périodes de $\wp(u\,,\, g_2\,,\, g_3)$. Tous les infinis de u sont des *points essentiels* de $y(x)$.

L'intégrale des 16 équations XI est une fonction *semi-transcendante* des constantes; abstraction faite des équations (1) et (3) qui renferment les constantes *au premier degré.*

38. Proposons-nous maintenant de former *toutes les équations*

$$Y'' = R(Y', Y) \tag{f'}$$

(où R est rationnel en Y', Y) dont l'intégrale générale est uniforme.

Ces équations se déduisent de la manière suivante du tableau XI.

Annulons, dans (16), λ et β; puis effectuons les transformations:

$Y = \dfrac{hy + k}{h_1 y + k_1}$, ($h$, k, h_1, k_1 constantes), dans les 16 équations XI,

$Y = \dfrac{hy^n + k}{h_1 y^n + k_1}$ (n entier) . . . dans l'équation (3) de XI où $\gamma = 0$,

$Y = \dfrac{hy^2 + k}{h_1 y^2 + k_1}$ . . . . $\begin{cases} \text{dans l'équation (4) où } \alpha = 1,\ \beta = 0,\ \delta = 0 \\ \text{et dans l'équation (5),} \end{cases}$

$Y = \dfrac{h(y + 1)^2 + k(y - 1)^2}{h_1(y + 1)^2 + k_1(y - 1)^2}$. $\begin{cases} \text{dans l'équation (10) où } \varepsilon = 1,\ \gamma = 0 \\ \text{dans l'équation (13) où } \alpha = -\delta,\ \beta = -\gamma \\ \text{dans l'équation (15) où } \beta = 0, \end{cases}$

$Y = \dfrac{hz + k}{h_1 z + k_1}$, avec $z = \dfrac{1}{2}[1 + i\sqrt{4y^3 - 1}]$ ou $z = 4y^3$ $\Big\}$ dans l'équation (16) où $\begin{cases} \lambda = \beta = g_2 = 0, \\ g_3 = 1, \end{cases}$

$Y = \dfrac{hz + k}{h_1 z + k_1}$, avec $z = \dfrac{1}{2}\left[1 + i\dfrac{\sqrt{4y^3 + y}}{\left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2}\right]$ dans l'équation (16) où $\begin{cases} \lambda = \beta = g_3 = 0, \\ g_2 = -1. \end{cases}$

Les équations obtenues par toutes ces transformations constituent les seules équations (f') *dont l'intégrale générale est uniforme.*

On peut donner au théorème une autre forme en adjoignant au tableau XI le tableau suivant:

TABLEAU XII.

(1)
$$y'' = \frac{y'^2}{y}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \alpha y' + \beta y, \quad (n \text{ entier}),$$

ou

$$y = z^n, \qquad z'' = \alpha z' + \frac{\beta}{n} z \quad (\text{éq. } (3) \text{ de XI où } \gamma = 0).$$

(2)
$$y'' = \frac{y'^2}{2y} + 2[2y^2 + \varepsilon y] \qquad (\varepsilon = 0 \text{ ou } 1),$$

ou

$$y = z^2, \qquad z'' = 2z^3 + \varepsilon z \;\; (\text{éq. } (4) \text{ de XI où } \alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = \varepsilon,\ \delta = 0).$$

(3)
$$y'' = \frac{y'^2}{2y} - 3\alpha y' + 4y^2 - 4\alpha^2 y$$

ou

$$y = z^2, \qquad z'' = 3\alpha z' + 2z^3 - 2\alpha^2 z \quad [\text{éq. } (5) \text{ de XI}].$$

(4)
$$y'' = y'^2\left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right] + \frac{2y'}{y-1}(\alpha y + \beta) + 2y(\alpha^2 - \beta^2)$$

ou

$$y = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2,$$

$$z'' = \frac{z'^2}{z} + z'\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\frac{1}{z} + z\right) + 2(\alpha - \beta)\right] + \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}\right)(1 - z^2),$$

$$(\text{éq. } (10) \text{ de XI où } \varepsilon = 1,\ \gamma = 0).$$

(5)
$$y'' = y'^2\left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right] + 4y\left[\gamma y + 2\delta\frac{y+1}{y-1}\right]$$

ou

$$y = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2, \qquad z'' = \frac{z'^2}{z} + \delta\left(\frac{1}{z} - z^3\right) + \gamma(1 - z^2)$$

$$(\text{éq. } (13) \text{ de XI où } \alpha = -\delta,\ \beta = -\gamma).$$

$$(6) \qquad y'' = y'^2\left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right] + \alpha y'$$

ou

$$y = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2, \qquad z'' = \frac{z'^2}{z} + \alpha z' \quad \text{(éq. (15) de XI où } \beta = 0\text{)}.$$

$$(7) \qquad y'' = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right]y'^2 + \alpha y'$$

ou

$$y = \frac{1}{2}\left[1 + i\sqrt{4z^3 - 1}\right], \qquad z'' = \frac{6z^2}{4z^3 - 1}z'^2 + \alpha z'$$

(éq. (16) de XI où $\lambda = 0$, $\beta = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = 1$).

$$(8) \qquad y'' = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{(y-1)}\right)y'^2 + \alpha y'$$

ou

$$y = \frac{1}{2}\left[1 + i\frac{\sqrt{4z^3 + z}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}\right], \qquad z'' = \frac{6z^2 + \frac{1}{2}}{4z^3 + z}z'^2 + \alpha z'$$

(éq. (16) de XI où $\lambda = 0$, $\beta = 0$, $g_2 = -1$, $g_3 = 0$).

$$(9) \qquad y'' = \left(\frac{2}{3y} + \frac{1}{2(y-1)}\right)y'^2 + \alpha y'$$

ou

$$y = 4z^3, \qquad z'' = \frac{6z^2}{4z^3 - 1}z'^2 + \alpha z'$$

(éq. (16) de XI où $\lambda = 0$, $\beta = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = 1$).

Toutes les équations:

$$Y'' = R(Y', Y) \quad [R \text{ rationnel en } Y', Y]$$

dont l'intégrale générale est uniforme s'obtiennent en effectuant sur les 25 *équations* XI *et* XII *la transformation*

$$y = \frac{hY + k}{h_1 Y + k_1}, \quad (h, k, h_1, k_1 \text{ constantes}),$$

la plus générale.

Le problème abordé par M. PICARD[1] dans son célèbre mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables se trouve ainsi résolu[2] avec une précision parfaite.

Les 9 premières équations XI ont été formées par M. MITTAG-LEFFLER[3] dans son étude des équations:

$$(\mathrm{f}'') \qquad y'' = a_1 yy' + a_2 y' + a_3 y^3 + a_4 y^2 + a_5 y + a_6$$

$$(a_1, \ldots, a_6 \text{ constantes}).$$

M. MITTAG-LEFFLER a déterminé tous les cas où l'intégrale de (f'') est *méromorphe* et admet effectivement des pôles.[4] Notre discussion suppose seulement l'intégrale *uniforme;* mais pour les équations (f'') l'intégrale ne peut être uniforme sans être méromorphe.

39. Pour ce qui est du problème:

Reconnaître si une équation donnée

$$Y'' = R(Y', Y) \quad \begin{pmatrix} R \text{ rationnel en } Y' \\ \text{algébrique en } Y \end{pmatrix}$$

a son intégrale uniforme,

la solution d'après ce qui précède est évidente.

Une transformation algébrique toute élémentaire permet de supposer que R est *rationnel soit en* Y, *soit en* Y *et* $\sqrt{4Y^3 - g_2 Y - g_3}$.

[1] Journal de LIOUVILLE, 4e série, t. 5 (1887), p. 277—293.

[2] J'ai résolu ce problème dès l'année 1893 (voir les Comptes Rendus de l'Ac. des sciences de Paris, 24 juillet 1893), mais par une méthode beaucoup plus compliquée.

[3] Comptes Rendus de l'Ac. des sc. de Paris, 10 juillet 1893; Acta mathematica, t. 18 (1894), p. 233—246.

[4] La méthode de M. MITTAG-LEFFLER négligeait l'hypothèse où l'intégrale serait holomorphe dans tout le plan. Mait il était bien facile de voir que cette hypothèse n'est réalisée que dans le cas où l'équation (f'') est *linéaire*.

Dans le premier cas, l'équation doit être réductible à une des 25 équations XI et XII par une transformation: $Y = \frac{hy + k}{h_1 y + k_1}$; ce qu'on reconnaît immédiatement.

Dans le second cas, l'équation doit coïncider avec une équation de la forme (16) de XI; pour que l'intégrale soit uniforme, il faut encore que λ soit nul ou égal à $\frac{i\pi}{\omega}$; cette dernière condition est *transcendante.*

Conclusions relatives aux équations (E).

40. Résumons, dans leurs grandes lignes, les résultats obtenus jusqu'ici.

Premier problème. *Déterminer toutes les équations à points critiques fixes de la forme:*

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right)$$

[R *rationnel* en $\frac{dY}{dX}$, *algébrique* en Y, *analytique* en X].

Considérons les huit équations:

TABLEAU XIII.[1]

(1) $\qquad y'' = -3yy' - y^3 + a(x)$

(2) $\qquad y'' = -2yy' + a(x)$

(3) $\qquad y'' = 2\alpha y^3 + 6\beta y^2 + (\gamma x + \delta)y + (\varepsilon x + \varkappa), \qquad [\gamma\beta = \alpha\varepsilon]$

(4) $\qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + \left[a(x)y + \frac{b(x)}{y}\right]y' + a'(x)y^2 - b'(x)$

[1] L'équation (3) de XIII comprend les types (3), (4), (5) des I; l'équation (5) comprend les types (2) et (3) de II; l'équation (6) comprend les types (4) et (5) de II.

Comme dans tous les tableaux précédents, $\alpha, \beta \ldots$, désignent des constantes numériques, $a(x)$, $b(x) \ldots$ des fonctions analytiques de x.

(5) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + a'(x)\frac{y}{y} + \delta y^3 + [a(x)\delta + \varepsilon]y^2 - a''(x)$$

$$\delta = 0 \text{ ou } 1, \quad \varepsilon = 0 \text{ ou } 1$$

(6) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + e^{\lambda x}(\alpha y^2 + \beta) + e^{2\lambda x}\left(\gamma y^3 + \frac{\delta}{y}\right)$$

(7) $$y'' = y'^2\left[\frac{\left(6y^2 - \frac{g_2}{2}\right)}{(4y^3 - g_2 y - g_3)} + \frac{\lambda}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}\right] + a(x)y' + b(x)\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$$

$\left[\lambda = 0 \text{ ou } \frac{i\pi}{\omega};\ 2\omega \text{ période quelconque de } \wp(u, g_2, g_3)\right]$.

(8) $$y'' = y'^2\frac{[3y^2 - 2(1 + x)y + x]}{2y(y - 1)(y - x)} + y'\left(\frac{1}{x - y} + \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{x}\right) + \frac{y(y - 1)}{2x(x - 1)(y - x)} + a(x)\sqrt{y(y - 1)(y - x)}$$

Toutes les équations (E) *à points critiques fixes s'obtiennent en effectuant sur ces huit équations* XIII *les transformations:*

$Y = \varphi(y, x)$,

$X = l(x)$,

($l(x)$ analytique en x ainsi que φ)

φ rationnel en y: dans les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6);

φ rationnel en y et $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$: dans l'équation (7);

φ rationnel en y et $\sqrt{y(y-1)(y-x)}$: dans l'équation (8);

et:

$Y = \varphi(z, x)$, $\quad z = \frac{y' - y_1'}{y - y_1}$, $\quad X = l(x)$

($l(x)$ analytique en x ainsi que φ, φ rationnel en z)

dans l'équation (3) où $\alpha = \gamma = \delta = 0$, $\beta = 1$, [$y_1(x)$ solution quelconque (3)].

41. **Deuxième problème.** *Déterminer toutes les équations à points critiques fixes de la forme:*

$$(E') \qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right), \quad R \begin{cases} \text{rationnel en } \dfrac{dY}{dX} \text{ et } Y, \\ \text{analytique en } X. \end{cases}$$

Toutes ces équations s'obtiennent en effectuant dans le tableau XIII les transformations:

(1°) $Y = \dfrac{q(x)y + r(x)}{q_1(x)y + r_1(x)}$, $X = l(x)$, dans les 8 équations XIII.

[On annule λ et $b(x)$ dans (7) et $a(x)$ dans (8)]:

(2°) $Y = \dfrac{q(x)y^n + r(x)}{q_1(x)y^n + r_1(x)}$, $X = l(x)$, dans l'équation (3) où $\alpha = \beta = \varepsilon = \varkappa = 0$.

(3°) $Y = \dfrac{q(x)y^2 + r(x)}{q_1(x)y^2 + r_1(x)}$, $X = l(x)$, dans l'équation (3) où $\alpha = 1$, $\beta = \varepsilon = \varkappa = 0$.

(4°) $Y = \dfrac{q(x)(y+1)^2 + r(x)(y-1)^2}{q_1(x)(y+1)^2 + r_1(x)(y-1)^2}$, $X = l(x)$,

$$\begin{cases} \text{dans l'équation (4) où } a = b, \\ \text{dans l'équation (6) où } \alpha = -\beta,\ \gamma = -\delta. \end{cases}$$

(5°), (6°), (7°) $Y = \dfrac{q(x)z + r(x)}{q_1(x)z + r_1(x)}$; $X = l(x)$,

avec

$$\begin{cases} \left. \begin{array}{c} z = \dfrac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{4y^3 - 1}\right) \\ \text{ou} \quad z = y^3 \end{array} \right| \text{dans l'équation (7) où } \lambda = 0,\ b \equiv 0,\ g_2 = 0,\ g_3 = 1, \\ z = \dfrac{1}{2}\left[1 + i\dfrac{\sqrt{4y^3 + y}}{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}\right] \text{ dans l'équation (7) où } \lambda = 0,\ b \equiv 0,\ g_2 = -1,\ g_3 = 0. \end{cases}$$

(8°) $Y = \dfrac{q(x)z + r(x)}{q_1(x)z + r_1(x)}$; $X = l(x)$, avec $z = \dfrac{y' - y_1'}{y - y_1}$,

dans l'équation (3) où $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = \delta = 0$,

[$y_1(x)$ intégrale quelconque de (3)].

42. **Troisième problème.** *Etant donnée une équation:*

$$\text{(E)}\qquad \frac{d^2Y}{dX^2}=R\left(\frac{dY}{dX},\ Y,\ X\right),\qquad R\begin{cases}\text{rationnel en } Y'_X,\ Y,\\ \text{algébrique en } X,\end{cases}$$

reconnaître si elle a ses points critiques fixes.

Il faut et il suffit qu'elle soit réductible, par une des transformations précédentes (n° 41) à une[1] des équations XIII; ce qu'on reconnaît algébriquement à l'aide d'un petit nombre d'opérations très simples. La transformation de passage de (E) à l'équation XIII correspondante se calcule algébriquement, ou par quadratures, ou par l'intégration d'une équation linéaire.

Quatrième problème. *Etant donnée une équation:*

$$\text{(E)}\qquad \frac{d^2Y}{dX^2}=R\left(\frac{dY}{dX},\ Y,\ X\right),\qquad R\begin{cases}\text{rationnel en } Y'_X,\\ \text{algébrique en } Y,\ X,\end{cases}$$

reconnaître si elle a ses points critiques fixes.

Une transformation algébrique toute élémentaire permet de supposer R rationnel soit en Y, soit en Y et $\sqrt{Y(Y-1)(Y-X)}$, soit en Y et $\sqrt{4Y^3-g_2Y-g_3}$ (X figurant algébriquement dans R).

Dans la première hypothèse, le problème est déjà résolu; dans la seconde hypothèse, l'équation doit coïncider avec une équation (8); et dans la 3e avec une équation (7). Ce dernier cas exige (si λ n'est pas nul) que la condition *transcendante* $\lambda=\frac{i\pi}{\omega}$ soit remplie.

43. **Cinquième problème.** *Déterminer les transcendantes nouvelles engendrées par les équations à points critiques fixes:*

$$\text{(E)}\qquad \frac{d^2Y}{dX^2}=R\left(\frac{dY}{dX},\ Y,\ X\right),\qquad R\begin{cases}\text{rationnel en } Y'_X,\\ \text{algébrique en } Y,\ X.\end{cases}$$

Les équations (E) à points critiques fixes qui engendrent des transcendantes vraiment nouvelles sont réductibles aux deux types (3) et (6) de XIII, ou, d'une façon plus précise, aux équations:

$$(33)\qquad y''=2\alpha y^3+6y^2+\alpha xy+x$$

$$(34)\qquad y''=\frac{y'^2}{y}+e^x(\alpha y^2+\beta)+e^{2x}\left(\gamma y^3+\frac{\delta}{y}\right),\qquad (\beta \text{ ou } \delta\neq 0,\ \alpha \text{ ou } \gamma\neq 0).$$

[1] On annule préalablement λ et $b(x)$ dans (7) et $a(x)$ dans (8).

La transformation de passage entre l'équation (E) et les équations (33) ou (34) est:

$$Y = \varphi(y, X), \qquad x = l(X) \quad \text{pour } (33),$$

$$Y = \varphi(y, X), \qquad e^x = l(X) \quad \text{pour } (34),$$

φ étant *rationnel* en y et *algébrique* (ainsi que l) en X.

Les intégrales de (33) et (34) sont des *transcendantes méromorphes nouvelles* (voir les nos 11—16).

Tous les autres types d'équations (E) à points critiques fixes sont *intégrables,* et les tableaux précédents font connaître avec une précision parfaite les opérations qui effectuent cette intégration.

Equations différentielles (algébriques) quelconques du second ordre à points critiques fixes.

44. La détermination des équations (E) à points critiques fixes est maintenant achevée. Si, au lieu d'une équation résolue par rapport à y'', on considère *une équation algébrique quelconque du second ordre,* ***de degré donné en*** y'', notre méthode s'applique sans modification.

Soit, pour fixer les idées, une équation *du second degré en* y'':

$$(35) \qquad P(y'', y', y, x) = 0,$$

où P désigne un polynôme en y'', y', dont les coëfficients sont fonctions algébriques de y, x.[1]

Tout d'abord, l'équation (pour avoir ses points critiques fixes) doit être de la forme:

$$y''^2 + (A_1 y'^2 + A_2 y' + A_3) y'' + A_4 y'^4 + A_5 y'^3 + A_6 y'^2 + A_7 y' + A_8$$

les A désignant des fonctions algébriques de y, x.

Je montre ensuite, que, moyennant une transformation algébrique toute élémentaire, il est loisible de supposer (pour x quelconque) les A *rationnels soit en* y, *soit en* y *et* $\sqrt{y(y-1)[y-H(x)]}$.

Le degré des A en y peut dès lors être limité, et la méthode permet de former un nombre *fini* de types d'équations (35), *dépendant explicitement*

[1] Il est loisible de supposer ces coëfficients analytiques (et non algébriques) en x.

d'un nombre fini de constantes et de fonctions arbitraires de x, qui épuisent toutes les équations (35) à points critiques fixes.

Je n'ai pas achevé encore l'énumération complète de ces types, mais ce n'est qu'une question de patience. J'ai poussé d'ailleurs la discussion assez loin pour établir *l'existence de transcendantes méromorphes vraiment nouvelles, engendrées par des types d'équations* (35), ***et irréductibles aux transcendantes que définissent les équations*** (E) ***du premier degré en*** y''.

45. Ce que je viens de dire peut se répéter pour les équations (35) du 3^e^ degré, ou du 4^e^ degré, etc., en y''. Mais un nouvel effort sera nécessaire pour traiter le même problème *sans se donner le degré de P en y'';* autrement dit, pour déterminer explicitement toutes les équations différentielles (algébriques) du second ordre à points critiques fixes, et la nature de leur intégrale.

Je voudrais indiquer ici quelques considérations générales qui sont de nature à faciliter la solution de ce problème.

Donnons à x une valeur *numérique* quelconque $\bar{x}$; posons, pour plus de clarté, $y' = z$, $y'' = u$, et regardons y, z, u comme les coordonnées d'un point de l'espace à 3 dimensions. Si (quel que soit $\bar{x}$) on peut passer *rationnellement*[1] d'une certaine courbe algébrique:

$$G(\xi, \eta, \bar{x}) = 0$$

à la surface

$$P(u, z, y, \bar{x}) = 0,$$

la courbe $G(\xi, \eta, \bar{x}) = 0$ est de genre 0 *ou* 1.

Dans le cas particulier d'une équation (E) (résolue en y''), c'est ce théorème qui m'a permis de supposer le coëfficient différentiel R rationnel soit en y, soit en y et $\sqrt{y(y-1)(y-H)}$.

Voici maintenant deux théorèmes généraux que j'ai signalés jadis comme *très vraisemblables* sans en avoir de démonstration satisfaisante.

---

[1] J'entends par là qu'on a

$$\xi = r(u, z, y, \bar{x})$$

$$\eta = r_1(u, z, y, \bar{x})$$

r et r_1 étant rationnels en u, z, y.

Théorème I. Si l'intégrale d'une équation (35) à points critiques fixes est une fonction essentiellement transcendante des deux constantes,[1] la surface

$$P(u\,,\,z\,,\,y\,,\,\bar{x}) = 0$$

correspond birationnellement soit à un plan, soit au cylindre de l'espace $(\xi\,,\,\eta\,,\,\zeta)$ défini par l'équation

$$\xi^2 = \eta(\eta - 1)[\eta - H(\bar{x})].$$

L'équation, dans ce cas, équivaudrait donc à un système:

$$\frac{d\eta}{dx} = M + N\sqrt{\eta(\eta-1)(\eta-H)}, \qquad \frac{d\zeta}{dx} = M_1 + N_1\sqrt{\eta(\eta-1)(\eta-H)}$$

où $M\,,\,N\,,\,M_1\,,\,N_1$ seraient *rationnels* en $\eta\,,\,\zeta$, (algébriques en x), N et N_1 pouvant être identiquement nuls.

Théorème II. Si l'intégrale d'une équation (35) à points critiques fixes, présente des singularités essentielles mobiles, ces singularités sont des *points essentiels isolés;* l'intégrale est une fonction *semi-transcendante* des constantes et par suite se laisse définir par une combinaison d'équations de Riccati ou de quadratures.

Ces deux théorèmes sont maintenant démontrés *en toute rigueur* pour les équations (35) *du premier degré en y''.* Il resterait à les démontrer *sans se donner le degré de P en y''.* La détermination complète des équations différentielles du second ordre à points critiques fixes, serait alors bien près d'être achevée.

Equations différentielles du troisième ordre.

46. *Equations résolues en y'''.*

Quand on passe aux équations du *troisième* ordre, la première partie de la méthode (recherche des conditions *nécessaires* pour que les points critiques soient fixes) s'applique d'elle-même; mais la question de savoir si ces conditions sont *suffisantes* entraîne des complications nouvelles.

[1] Dans les autres cas, l'équation (35) (à points critiques fixes) est réductible aux quadratures ou aux équations linéaires, et ne saurait définir de transcendantes nouvelles.

Parmi les conditions nécessaires que notre méthode met en évidence d'une façon en quelque sorte intuitive, je me bornerai à citer ici les plus simples et les plus caractéristiques, celles notamment qui précisent la nature du coëfficient différentiel y''' regardée comme fonction (algébrique) de y'' et de y'.

Je considérerai d'abord les équations résolues en y'''.

Soit donc:

$$y''' = R(y'', y', y, x) \tag{36}$$

(R rationnel en y'', y', algébrique en y, x).[1]

Si l'équation (36) a ses points critiques fixes, elle satisfait aux conditions suivantes:

1°. *R est un polynôme, du second degré ou plus, en y'', soit:*

$$y'' = R \equiv A(y', y, x)y''^2 + B(y', y, x)y'' + C(y', y, x); \tag{37}$$

(A, B, C fractions rationnelles en y', dont les coëfficients sont algébriques en y, x).

2°. *A coïncide avec une des douze expressions suivantes:*

$$0, \quad \frac{1}{y'+a}, \quad \frac{1-\frac{1}{n}}{y'+a} \quad (n \text{ entier } + \text{ ou } - \text{ mais } \neq -1),$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y'+a}+\frac{1}{y'+b}\right), \quad \frac{1}{y'+a}+\frac{1}{2(y'+b)}, \quad \frac{1}{2(y'+a)}+\frac{2}{3(y'+b)},$$

$$\frac{1}{2(y'+a)}+\frac{3}{4(y'+b)}, \quad \frac{1}{2(y'+a)}+\frac{5}{6(y'+b)},$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{y'+a}+\frac{1}{y'+b}\right), \quad \frac{2}{3(y'+a)}+\frac{5}{6(y'+b)}, \quad \frac{3}{4}\left(\frac{1}{y'+a}+\frac{1}{y'+b}\right),$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y'+a}+\frac{1}{y'+b}+\frac{1}{y'+c}\right)$$

(a, b, c, fonctions de y, x).

---

[1] Il serait loisible de supposer R analytique (et non algébrique) en x et même en y.

3°. *B et C, considérés comme fonctions de y', n'ont d'autres pôles $y' = g(y, x)$ que ceux de A, et ces pôles sont tous simples.*

4°. Posons: $A = \frac{Q}{D}$, $B = \frac{R}{D}$, $C = \frac{S}{D}$; D, Q, R, S désignant des polynômes en y' premiers entre eux. *Les degrés de R et de S en y' surpassent le degré de D le premier d'une unité, le second de trois unités, au plus.*

Ces théorèmes limitent le degré des fractions rationnelles A, B, C en y'. Les degrés respectifs de D, Q, R, S en y' sont en plus égaux à 3, 2, 4 et 6.

On peut former d'après cela un nombre *fini* de fractions rationnelles $R(y, y')$ dont les coëfficients a, b, ... l sont des fonctions indéterminées de y, x. Toutes les équations (36) à points critiques fixes rentrent dans un de ces types.

47. *Introduction de la **simplifiée** de l'équation* (36).

Mais notre méthode fournit en outre des conditions très précises sur ces fonctions encore indéterminées $a(y, x)$, $b(y, x)$, etc. . . . Signalons seulement la suivante.

D'après ce qui précède, les fractions A, B, C, pour $y' = \infty$ sont de la forme:

$$A = \frac{1}{y'}(\alpha + \varepsilon), \qquad B = y'[\mu(y, x) + \varepsilon_1], \qquad C = y'^3[\nu(y, x) + \varepsilon_2]$$

$$\left(\alpha = 1 - \frac{1}{n}, \quad n \text{ entier} \neq -1 \text{ ou } n = \infty\right);$$

ε_1, ε_2, ε_3 désignent des fonctions de y', y, x qui tendent vers zéro avec $\frac{1}{y'}$.

Les fonctions $\mu(y, x)$, $\nu(y, x)$ peuvent être identiquement nulles.

Appelons ***simplifiée*** de l'équation (36) l'équation:

$$(38) \qquad y''' = \alpha \frac{y''^2}{y'} + y''y'\mu_0(y) + y'^3\nu_0(y)$$

$$\left\{\alpha = 1 - \frac{1}{n}, \qquad \mu_0(y) = \mu(y, x_0), \qquad \nu_0(y) = \nu(y, x_0)\right\}.$$

Si l'équation (36) *a ses points critiques fixes, sa simplifiée* (38) *a son intégrale uniforme.*

L'équation (38) se ramène *par une quadrature* à une équation linéaire. Elle équivaut en effet au système:

$$(39) \qquad \frac{dx}{dy} = u^{\frac{-n}{n+1}}, \qquad \frac{d^2u}{dy^2} = \mu_0(y)\frac{du}{dy} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\nu_0(y)u$$

(n entier $+$ ou $-$, $\neq -1$, ou $n = \infty$).

48. Un problmèe préliminaire s'impose donc:

Déterminer tous les cas où les fonctions $y(x)$ définies par un système (39) *sont uniformes.*

La résolution de ce problème n'est pas sans présenter des difficultés sérieuses.

Pour $n = -2$ et $\mu_0(y) \equiv 0$, les fonctions uniformes $y(x)$ définies par un système (39) constituent la classe des fonctions *automorphes (fuchsiennes ou kleinéennes).*

Dans les autres cas, j'ai montré que l'intégrale générale $y(x)$ d'un système (39), quand elle est uniforme, est une *dégénérescence de fonctions automorphes ou une combinaison de telles dégénérescences* (combinaisons telles que $y = e^{e^x}$, etc. . . .).

La nature de l'intégrale $y(x)$ de la *simplifiée* (38) fournit des indications évidentes sur l'intégrale de l'équation (36) (à points critiques fixes):

1°. Si l'intégrale uniforme $y(x)$ de (38) présente *des lignes singulières,* a fortiori l'intégrale $y(x)$ de (36) présente des *lignes singulières mobiles.*

2°. Si l'intégrale uniforme $y(x)$ de (38) présente des *ensembles parfaits (discontinus)* de points singuliers, a fortiori l'intégrale $y(x)$ de (36) présente des *ensembles parfaits de points singuliers mobiles (ensembles discontinus ou continus).*

3°. Si l'intégrale uniforme $y(x)$ de (38) *n'est par méromorphe,* a fortiori l'intégrale $y(x)$ de (36) présente des *singularités essentielles mobiles (isolées ou non).*

D'autre part, les coëfficients $a(y, x)$, $b(y, x)$ . . . des fractions rationnelles $A(y')$, $B(y')$, $C(y')$ sont, par hypothèse, algébriques en y. Donnons à x une valeur numérique quelconque x_0 et exprimons *birationnellement*[1] ces coëfficients

[1] J'entends par là que $a(y, x_0)$, $b(y, x_0)$ etc. . . . sont rationnels en y, t et qu'inversement $t(y, x_0)$ s'exprime rationnellement en fonction de y et de $a, b, \ldots$

$a(y, x_0)$, $b(y, x_0)$ etc.... à l'aide de y et d'une irrationnelle $t(y, x_0)$ définie par la relation algébrique

$$G(t, y, x_0) = 0. \tag{40}$$

Représentons par $y = \varphi(x, K, K_1, K_2, x_0)$, l'intégrale générale de la *simplifiée* (38) et par $t = \psi(x, K, K_1, K_2, x_0)$ la fonction t correspondante définie par (40). Si l'équation (36) a ses points critiques fixes, la fonction $\varphi(x)$ est, nous le savons, *uniforme;* j'ai pu établir qu'il en *est de même pour la fontion* $\psi(x)$ et cela lors même que les coëfficients $\mu_0(y)$, $\nu_0(y)$ de (38) sont *rationnels.*

Il suit de là que le *genre de la relation algébrique* $G = 0$ *est égal à* 0 *ou à* 1, *sauf dans le cas où l'intégrale générale de la simplifiée* (38) *présente des ensembles parfaits (discontinus ou continus) de points singuliers.* Dans ce cas on a nécessairement $n = -2$, $\mu(y, x) \equiv 0$.

49. On ne saurait espérer former, comme pour les équations du second ordre, un nombre *fini* de types d'équations (36) à points critiques fixes, auxquels toutes les autres soient réductibles. La considération des fonctions *automorphes* suffit à montrer qu'une solution de cette nature est impossible. En effet, à chaque *classe* de courbes algébriques correspondent des types distincts de fonctions automorphes et par conséquent des types distincts d'équations (38) (où $n = -2$, $\mu_0 \equiv 0$) à intégrale uniforme.

Je voudrais indiquer brièvement le genre de solution que semble comporter le problème. Cette solution résulte de ce fait que les propriétés d'une équation (38) à points critiques fixes se reflètent dans sa simplifiée d'une façon beaucoup plus précise que je ne l'ai indiqué jusqu'ici.

Supposons connue la simplifiée:

$$y''' = \frac{y''^2}{y'}\alpha + \mu(y, x_0)y''y' + \nu(y, x_0)y'^3 \tag{38}$$

de l'équation (36) (problème préliminaire).

Les résultats suivants me paraissent très vraisemblables:

1°. Toutes les équations (36) à points critiques fixes qui admettent la simplifiée donnée (38) sont réductibles à un nombre fini de types, dépendant d'un nombre fini de constantes et de fonctions de x.

2°. Si l'intégrale de l'équation (38) à points critiques fixes admet un ensemble parfait (discontinu ou continu) de points singuliers mobiles,

il en est de même pour l'équation (38), et l'intégrale de (36) se déduit de celle de la simplifiée (38) par des quadratures ou par l'intégration d'une équation linéaire.[1]

3°. Si l'intégrale de (38) admet des points essentiels mobiles, elle est réductible à une équation du second ordre (à points critiques fixes) par des quadratures ou par l'intégration d'une équation linéaire.

Admettons pour un instant ces théorèmes: la difficulté la plus grave qu'introduit l'élévation de l'ordre différentiel — à savoir l'existence de singularités essentielles mobiles très compliquées — se trouve dès lors surmontée. La seule classe vraiment nouvelle d'équations qu'il reste à étudier est celle des équations (36) *dont l'intégrale n'a d'autres singularités mobiles que des pôles.* Or j'ai tout lieu de penser (d'après les premiers types que j'ai déjà élucidés) que la méthode appliquée au second ordre permet de former les conditions *suffisantes* pour qu'une équation (36) rentre dans cette classe.

Mais je n'insiste pas davantage sur ces *prévisions.* Les résultats rigoureusement acquis suffisent à mettre en lumière deux points: 1° la formation des équations (36) à points critiques fixes est un problème dès maintenant abordable; 2° dans l'étude rationnelle de ces équations, les travaux de M. Poincaré sur les fonctions *automorphes* doivent jouer un rôle primordial.

50. *Equations différentielles algébriques du troisième ordre à points critiques fixes.*

---

[1] La *simplifiée* de (36) peut s'obtenir en remplaçant, dans (36), la variable x par $x_0 + \lambda x$, et en faisant tendre λ vers zéro. La même transformation effectuée sur une équation:

$$y'' = A(y, x)y'^2 + B(y, x)y' + C(y, x) \tag{E}$$

conduit à l'équation:

$$y'' = A(y, x_0)y'^2 \tag{e}$$

qui joue pour l'équation (E) (à points critiques fixes), le même rôle que la *simplifiée* (38) pour l'équation (36). Si l'intégrale (uniforme) de l'équation (e) présente des singularités essentielles mobiles, il en est de même *a fortiori* pour (E); mais ce qui est remarquable, c'est que *la réciproque est vraie;* l'intégrale de (E) se déduit alors de celle de (e) par l'intégration d'une équation de Riccati. Des circonstances analogues se présentent pour le 3° ordre.

Les résultats qui précèdent peuvent être étendus (moyennant quelques modifications) aux équations (37) où A, B, C sont, non plus rationnels, mais *algébriques* en y'. On s'appuie sur la proposition suivante: si (pour y, x quelconques) on exprime *birationnellement* les fonctions algébriques $A(y')$, $B(y')$, $C(y')$ à l'aide de y' et d'une irrationnelle $t(y')$ définie par la relation

$$H(t, y', y, x) = 0,$$

le genre de cette relation (entre t et y') est au plus égal à l'unité.

Mais, plus généralement, considérons *une équation algébrique quelconque du 3^e^ ordre*, soit:

$$P(y''', y'', y', y, x) = 0$$

où P désigne un polynôme en y''', y'', y' dont les coefficients sont[1] algébriques en y, x.

Quand l'équation a ses points critiques fixes, les conditions suivantes sont remplies:

1°. Si p est le degré de P en y''', l'équation est de la forme:

$$(41) \qquad y'''^p + \Pi_2(y'', y', y, x)y'''^{p-1} + \ldots + \Pi_{2p}(y'', y', y, x) = 0,$$

Π_{2i} désignant un polynôme en y'' de degré $2i$ au plus, rationnel en y', algébrique en y, x.

2°. Des propositions semblables à celles du n° 46 limitent le degré auquel y' figure dans P ou dans les Π_{2i}; *ce degré est au plus égal à $6p$.*

3°. Si dans l'équation (41) on remplace x par $(x_0 + \lambda X)$, le premier membre admet $\lambda = 0$ comme pôle d'ordre exactement[2] égal à $3p$; autrement dit, l'équation transformée peut s'écrire:

$$\frac{1}{\lambda^{3p}}\left[y'''^p + y'''^{p-1}H_2(y'', y', y, x_0) + \ldots + H_{2p}(y'', y', y, x_0) + \lambda(\ldots)\right] = 0.$$

4°. Convenons d'appeler **simplifiée** de l'équation (41), l'équation:

$$(42) \qquad y'''^p + y'''^{p-1}H_2(y'', y', y, x_0) + \ldots + H_{2p}(y'', y', y, x_0).$$

L'équation (42) *a son intégrale générale uniforme.*

[1] Il serait loisible, là encore, de supposer P non pas algébrique, mais analytique en x et même en y.

[2] $\lambda = 0$ ne peut être pôle d'ordre inférieur.

Cette équation épuivaut à un système:

$$(43) \qquad \frac{d}{dy}\left(\log\frac{dx}{dy}\right) = u, \qquad G\left(\frac{du}{dy}, u, y\right) = 0,$$

où l'équation du premier ordre $G = 0$ a ses points critiques fixes.

L'équation (42) se laisse donc remplacer par un système:

$$(44) \qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{d}{dy}\left(\log\dfrac{dx}{dy}\right) = \rho(v, y) \quad \text{avec} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dv}{dy} = h(y)v^2 + k(y)v + l(y), \\ \text{ou } \dfrac{dv}{dy} = h(y)\sqrt{4v^3 - g_2 v - g_3}, \end{array}\right. \\ \text{ou } \dfrac{d}{dy}\left(\log\dfrac{dx}{dy}\right) = r(K, y); \end{array}\right.$$

ρ désigne une fonction algébrique de y, rationnelle en v (ou en v et $\sqrt{4v^3 - g_2 v - g_3}$ dans le second cas); r désigne une fonction algébrique de y et de la constante arbitraire K.

Ce ne sont là d'ailleurs que quelques-unes des plus caractéristiques parmi les conditions que fournit immédiatement notre méthode. Elles montrent l'importance du problème préliminaire qui consiste à *déterminer* les systèmes (44) *qui définissent des fonctions $y(x)$ uniformes.*

Dans l'hypothèse

$$\rho = -2v, \qquad h(y) \equiv -1, \qquad k = 0,$$

les systèmes (44) à intégrale $y(x)$ uniforme définissent les fonctions automorphes.

Equations différentielles d'ordre quelconque à points critiques fixes.

51. Des théorèmes analogues s'appliquent aux équations différentielles d'ordre m quelconque et fournissent notamment des renseignements très précis sur la nature du coëfficient différentiel $y^{(m)}$ considéré comme fonction (algébrique) de $y^{(m-1)}$, $y^{(m-2)}$ et de $y^{(m-3)}$.

Posons pour plus de clarté

$$y^{(m-3)} = z, \qquad y^{(m-2)} = z', \qquad y^{(m-1)} = z'', \qquad y^{(m)} = z''',$$

et considérons d'abord une équation résolue par rapport à z''', soit:

(45) $$z''' = R(z'', z', z, y^{(m-4)}, \ldots y'', y', y, x)$$

où R est rationnel en z'', z', algébrique[1] en z, $y^{(m-4)}, \ldots y', y, x$.

Si l'équation (45) *a ses points critiques fixes les conditions suivantes sont remplies:*

1°. R est un polynôme du second degré au plus en z''; soit donc:

(46) $$z''' = z''^2 A(z') + z'' B(z') + C(z'),$$

A, B, C étant rationnels en z', algébriques en $z, y^{(m-4)}, y', \ldots y, x$.

2°. $A(z')$ coïncide avec une des expressions suivantes:

$$0, \quad \frac{1-\frac{1}{n}}{z'+a}, \quad \frac{1}{z'+a}, \quad \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z'+a}+\frac{1}{z'+b}\right]$$

(n entier + ou $< 2-m$, a et b fonctions algébriques de $z, y^{(m-4)}, \ldots y', y, x$), expressions auxquelles il faut joindre:

$$\frac{1}{2(z'+a)}+\frac{2}{3(z'+b)} \quad \text{pour } m \leq 7,$$

$$\frac{1}{2(z'+a)}+\frac{3}{4(z'+b)} \quad \text{pour } m \leq 5,$$

$$\frac{1}{2(z'+a)}+\frac{5}{6(z'+b)}, \quad \frac{2}{3}\left[\frac{1}{z'+a}+\frac{1}{z'+b}\right] \quad \text{pour } m = 4.$$

3°. Les fractions rationnelles $B(z')$, $C(z')$ n'ont [pour $z, y^{(m-4)}, \ldots y', y, x$ quelconques] d'autres pôles que ceux de A, et ces pôles sont tous simples. De plus, les degrés des numérateurs de B et C surpassent respectivement d'une unité et de trois unités au plus celui de leur dénominateur. Le degré auquel z' figure dans A, B, C est donc inférieur à 5.

4°. On peut écrire d'après ce qui précède:

$$A = \frac{1}{z'}(\alpha+\varepsilon), \qquad B = z'\left[\mu(z, y^{(m-4)}, y', y, x)+\varepsilon_1\right],$$

$$C = z'^3\left[\nu(z, y^{(m-4)}, \ldots y', y, x)+\varepsilon_2\right]$$

$$\left(\alpha = 1-\frac{1}{n}, \ n \text{ entier + ou } < 2-m, \text{ ou } n = \infty\right);$$

[1] Il serait loisible de supposer R analytique en $z, y^{(m-4)}, \ldots y', y, x$.

ε, ε_1, ε_2 sont des fonctions de z', z, $y^{(m-4)}$, ... y', y, x qui tendent vers zéro avec $\frac{1}{z'}$.

Représentons par μ_0, ν_0 ce que deviennent les fonctions μ et ν quand on y remplace $y^{(m-4)}$, ... y', y, x par des constantes numériques quelconques $y_0^{(m-4)}$, ... y'_0, y_0, x_0, et appelons *simplifiée* de (45) l'équation d'ordre m qui suit:

$$z''' = \frac{z''^2 \alpha}{z'} + z''z'\mu_0(z) + z'^3\nu_0(z) \tag{47}$$

où

$$z = \frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}}.$$

Cette équation a son intégrale uniforme.

Elle équivaut au système (de l'espèce 44)

$$\frac{dx}{dz} = u^{-\frac{n}{n+1}}, \qquad \frac{d^2u}{dz^2} = \mu_0(z)\frac{du}{dz} + \frac{n}{n+1}\nu_0(z)u, \tag{48}$$

[n entier + ou $< (2 - m)$, ou $n = \infty$], auquel il faut joindre la condition:

$$\frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} = z.$$

Il faut donc que les fonctions $z(x)$ définies par le système (48), non seulement soient uniformes, mais soient encore dérivées $(m-3)^{es}$ de fonctions uniformes.

L'entier n étant plus petit que -2, les intégrales $z(x)$ du système (48) (quand elles sont uniformes) sont des dégénérescences de fonctions automorphes, ou des combinaisons de telles dégénérescences.

5°. Pour des valeurs arbitraires données à $y^{(m-4)}$, ... y', y, x, les coëfficients a, b, ... des fractions rationnelles $A(z')$, $B(z')$, $C(z')$ sont des fonctions algébriques de z qui se laissent exprimer *birationnellement* à l'aide de z et d'une irrationnelle $t(z)$, définie par une relation

$$G(t, z) = 0 \tag{49}$$

($y^{(m-4)}$, ... y', y, x figurant algébriquement dans G).

Le genre de la relation (49) *est égal à zéro ou à un.*

52. Il est facile d'étendre les résultats précédents (moyennant quelques modifications) aux équations (46) dans lesquelles A, B, C sont non plus *rationnels,* mais *algébriques* en z'.[1]

Plus généralement, considérons *une équation différentielle quelconque d'ordre* m:

$$(50)\qquad P(z''', z'', z', z, y^{(m-4)}, \ldots y', y, x) = 0, \qquad \frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} = z,$$

où P est un polynôme en z''', z'', z' de degré p en z''', algébrique en x, $y^{(m-4)}$, $\ldots y'$, y, x.

Si l'équation a ses points critiques fixes, elle satisfait aux conditions suivantes:

1°. P est de la forme

$$(51)\quad z'''^{p} + z'''^{(p-1)}\Pi_2(z'', z') + \ldots + z'''^{(p-i)}\Pi_{2i}(z'', z') + \ldots + \Pi_{2p}(z'', z') = 0,$$

où Π_{2i} *désigne un polynôme de degré* $2i$ *au plus en* z'', *rationnel en* z', algébrique en z, $y^{(m-4)}$, $\ldots y'$, y, x.

2°. Dans les Π_{2i}, z' figure au plus au degré $5p$.

3°. Si dans l'équation (51), on remplace z' par $\frac{z'}{\lambda}$, z'' par $\frac{z''}{\lambda^2}$, z''' par $\frac{z'''}{\lambda^2}$, le premier membre admet la valeur $\lambda = 0$ comme pôle d'ordre $3p$. Lorsqu'on le multiplie par λ^{3p}, il se réduit donc pour $\lambda = 0$ à une expression:

$$z'''^{p} + z'''^{(p-1)}H_2(z'', z', z, y^{(m-4)}, \ldots y', y, x) + \ldots$$

Par définition, on appelle simplifiée de l'équation (51) l'équation d'ordre m:

$$(52)\qquad z'''^{p} + z'''^{(p-1)}H_2(z'', z', z, y_0^{(m-4)}, \ldots y_0', y_0, x_0) + \ldots = 0$$

où

$$z = \frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}}.$$

Cette simplifiée a son intégrale uniforme.

---

[1] On peut [pour z, $y^{(m-4)}$, $\ldots y'$, y, x quelconques] exprimer $A(z')$, $B(z')$, $C(z')$ *birationnellement* à l'aide de z' et d'une irrationnelle $\theta(z')$ définie par une relation $H(\theta, z') = 0$, H renfermant algébriquement z, $y^{(m-4)}$, $\ldots y'$, y, x: on commence par établir que la courbe algébrique $H(\theta, z') = 0$ est unicursale, ou encore (si $m \leq 7$) est une courbe de genre 1 (dont un des modules g_2, g_3 est nul).

L'équation (52) équivaut à un système (44), c'est-à-dire à un système:

$$(53) \qquad \frac{d}{dz}\log\left(\frac{dx}{dz}\right) = u, \qquad G\left(\frac{du}{dz}, u, z\right) = 0$$

où l'équation du premier ordre $G = 0$ a ses points critiques fixes. Les fonctions $z(x)$ définies par (53) doivent être non-seulement uniformes, mais dérivées $(m - 3)^{es}$ de fonctions uniformes.

J'arrête ici l'énoncé de ces conditions qui montrent suffisamment la fécondité de la méthode.

Conclusions générales.

53. Si, pour plus de clarté, nous nous limitons aux équations (d'ordre quelconque m) *résolues par rapport à* $\frac{d^m y}{dx^m}$, les conclusions auxquelles nous aboutissons s'énoncent ainsi:

La détermination des équations différentielles à points critiques fixes qui semblait récemment comme inabordable dès que l'ordre différentiel dépasse l'unité est complètement effectuée dans le cas du 2^e ordre, et elle est assez avancée dans le cas du 3^e ordre pour qu'on puisse espérer la voir achevée dans quelques années.

Jusqu'ici c'est au point de vue de la théorie des équations différentielles que nous nous sommes placés, le but que nous poursuivions était de former des équations nouvelles, intégrables de par la théorie des fonctions, sans être réductibles aux équations classiques.

Mais il est naturel de se demander quel rôle sont appelées à jouer, dans la théorie des fonctions, les nouvelles transcendantes méromorphes que j'ai mises en évidence (n^{os} 11 ... 16), ainsi que toutes les autres transcendantes uniformes que pourront introduire les équations du 2^e ordre non résolues, les équations du 3^e ordre, etc.

Ces transcendantes, ou du moins certaines d'entre elles, jouissent-elles de nombreuses propriétés remarquables et comportent-elles des applications importantes à l'étude générale des fonctions?

Pour prévoir le sens dans lequel il convient de trancher la question, deux remarques, je crois, suffiront: d'une part, toutes les transcendantes usuelles [à l'exception de la fonction Γ] sont les intégrales d'équations différentielles algébriques très simples; d'autre part, dans une étude systéma-

tique des équations à points critiques fixes du premier, du second, du troisième ordre, toutes ces transcendantes (fonctions exponentielle, elliptiques, abéliennes, fuchsiennes, etc.) se mettraient en évidence d'elle-même, si on en ignorait l'existence. Il apparaît donc comme bien peu vraisemblable que le champ des transcendantes remarquables engendrées par les équations différentielles soit dès maintenant épuisé.

Mais, d'un autre côté, les transcendantes uniformes qui jouissent (comme les fonctions elliptiques, fuchsiennes,[1] etc.) de propriétés *exactes* très nombreuses, qui sont notamment susceptibles de plusieurs générations simples très différentes, doivent former une classe extrêmement restreinte. C'est dans un autre ordre d'idées sans doute qu'on obtiendra des résultats généraux embrassant toutes les nouvelles transcendantes: il faudra, par exemple, étudier les nouvelles fonctions entières au point de vue de la croissance pour $x = \infty$, de la fréquence des zéros, etc.; en un mot, approfondir leurs propriétés *approchées*.

Des résultats de cette nature peuvent d'ailleurs rendre les plus grands services dans la théorie des fonctions, comme le montrent les conséquences qu'on a tirées du mode de croissance de e^x, de l'existence de fonctions uniformes qui n'atteignent pas trois valeurs connues, etc.

J'ajoute que la méthode même qui m'a permis de former les équations différentielles du second ordre à intégrale uniforme, fournit, quant aux propriétés *approchées* de leurs intégrales, des indications très précieuses.

54. Toutefois, quel que doive être l'intérêt intrinsèque des nouvelles transcendantes, c'est la théorie des équations différentielles qui a été, je le répète, le véritable objet de mes recherches et dans laquelle les méthodes que j'ai développées se montreront le plus efficaces. Les questions qu'elles sont susceptibles de résoudre sont, en effet, extrêmement diverses. J'en citerai, en terminant, quelques exemples caractéristiques.

Tout d'abord, il n'est nullement indispensable de se limiter aux équations différentielles où la variable indépendante est unique. Il suffit que l'intégrale du système différentiel considéré ne dépende que d'un

---

[1] Les fonctions elliptiques peuvent être définies par une équation différentielle, ou par une condition fonctionnelle (la double périodicité), ou par des séries à loi de récurrence très simple. La fonction modulaire, en outre des trois définitions analogues, se laisse aussi engendrer par l'intermédiaire d'une intégrale *définie*.

nombre fini de constantes. C'est ainsi que ces mêmes méthodes m'ont permis d'établir le célèbre théorème de WEIERSTRASS sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition — de déterminer toutes les fonctions uniformes définies par l'inversion d'un couple de différentielles totales (algébriques) à deux variables; enfin de montrer (en partant du système de différentielles totales qui les définissent) que les fonctions abéliennes sont le quotient de deux fonctions *entières* jouissant des propriétés qui caractérisent les fonctions θ. On est ainsi en état de constituer toute la théorie des fonctions abéliennes, en les définissant par des équations aux différentielles totales, sans rien emprunter à la doctrine des séries θ ni des courbes algébriques.

Mais ce n'est pas seulement à la recherche des intégrales uniformes que s'appliquent les méthodes que j'ai introduites. Elles interviennent utilement dans toutes les questions qui concernent les propriétés analytiques des intégrales, par exemple quand il s'agit de reconnaître si les intégrales possèdent ou non des singularités transcendantes mobiles. Pour fixer les idées, prenons l'équation:

$$y'' = R(y', y, x)$$

(R rationnel en y', y, x), et étudions les intégrales $y(x)$ définies par les conditions initiales x_0, y_0, y'_0 qui donnent à R la forme $\frac{0}{0}$; la méthode fournit des conditions *nécessaires* pour que toutes ces intégrales admettent le point x_0 comme point singulier algébrique, et permet de voir (au moins dans des cas très étendus) que ces conditions sont suffisantes.

55. Une autre considération qui ajoute à l'importance des questions dont je me suis occupé ici, c'est que les équations différentielles à points critiques fixes interviennent, et d'une façon bien inattendue, dans les théories les plus diverses.

C'est ainsi qu'elles se relient à la théorie des groupes par un théorème précis que j'ai établi récemment. Ce théorème concerne les groupes continus finis de la forme:

$$(G)\quad \begin{cases} Y_i = r_i(y_1, \ldots y_n, y_{n+1}, x, a, b, \ldots l), & [i = 1, 2, \ldots (n+1)], \\ X = x, \end{cases}$$

où les r_i sont rationnels en $y_1, \ldots y_{n+1}$, analytiques en x.

J'ai montré que *les fractions rationnelles* r_i, *regardées comme fonctions de* x, *ont toujours leurs singularités non polaires fixes (indépendantes des paramètres* $a, b \dots l$ *du groupe).*

Il suit de là que tout système différentiel d'ordre n, portant sur les fonctions $y_1(x), \dots y_n(x)$, et qui admet un groupe continu transitif tel que G, a ses points critiques fixes.

Un théorème analogue s'applique, avec quelques modifications, aux groupes G où les r_i sont algébriques en $y_1 \dots y_n$.

Le caractère algébrique des r_i par rapport aux y donnerait à penser que les systèmes différentiels à points critiques fixes qui rentrent dans la catégorie précédente sont de ceux dont l'intégrale renferme *algébriquement* ses constantes. Il n'en est rien: il existe des systèmes différentiels d'ordre quelconque à points critiques fixes dont l'intégrale est une fonction transcendante de toutes les constantes de quelque façon qu'on les choisisse, et qui cependant admettent un groupe continu transitif G. Comme types de tels systèmes, j'ai indiqué les systèmes différentiels algébriques que vérifient les fonctions abéliennes (et dégénérescences) regardées comme fonctions de leurs modules. En particulier la fonction $y = sn_x(h)$ (où on a posé $k^2 = x$) vérifie une équation connue du second ordre qui se ramène algébriquement au type (8) du tableau XIII. Cette équation admet le groupe de transformations:

$$Y = \frac{y cn_x u \, dn_x u + \sqrt{(1 - y^2)(1 - xy^2)} \, sn_x u}{1 - x sn_x^2 u} \quad \text{où} \quad u = a\omega_1 + b\omega_2$$

$(2\omega_1, 2\omega_2$ périodes de sn, a et b constantes arbitraires),

et son intégrale générale $y = sn_x(a\omega_1 + b\omega_2)$ est une fonction essentiellement transcendante des deux constantes.

Si on réfléchit à la difficulté du problème qui consiste à reconnaître si une équation d'ordre $m (m > 2)$ a ses points critiques fixes, on conçoit combien il serait intéressant de former les équations du troisième ordre qui admettent un groupe transitif de la nature de G.

Ces équations (qui se déterminent par des conditions algébriques) ont sûrement leurs points critiques fixes. Il est vrai qu'en vertu de la théorie des groupes, ces équations se ramènent à des combinaisons d'équations linéaires et de quadratures. Mais cette réduction n'est pas explicite, et

les transcendantes ainsi définies, peuvent être, comme les fonctions fuchsiennes, des fonctions uniformes d'une nature nouvelle.

56. Une relation plus importante est celle que j'ai établie entre les équations à points critiques fixes et *les intégrales premières des systèmes différentiels.* Cette relation résulte d'un théorème général que je me bornerai à indiquer dans le cas particulier où les équations différentielles définissent le mouvement d'un système matériel soumis à des liaisons et à des forces indépendantes des vitesses. Le théorème s'énonce ainsi:

Les intégrales premières algébriques et de degré donné par rapport aux vitesses sont déterminées par des équations différentielles dont tous les points singuliers (non polaires) sont fixes.

De même, les intégrales premières *uniformes* par rapport aux vitesses ont leurs points critiques fixes (dans tout le champ des paramètres $x_1, \ldots x_n$).

C'est en m'appuyant sur ces théorèmes que j'ai pu généraliser les propositions bien connues de M. Bruns et de M. Poincaré sur le *problème des n corps:* j'ai fait voir que toutes les intégrales premières analytiques et uniformes dans tout le champ réel des vitesses mais fonctions quelconques des coordonnées, sont des combinaisons des intégrales classiques.

J'ai même étendu la proposition aux *équations intégrales* algébriques par rapport aux vitesses, où les coordonnées peuvent figurer de façon quelconque. J'en ai déduit que les conditions du choc sont sûrement transcendantes, et même transcendantes par rapport aux vitesses.

57. Jusqu'ici nous avons embrassé dans nos recherches le champ complexe des variables. Mais les méthodes que j'emploie trouvent aussi bien leur application quand on se restreint au domaine réel. La remarque suivante le fait aussitôt comprendre: admettons qu'il soit établi que l'intégrale d'une équation différentielle ne présente dans tout le champ réel d'autres singularités que des pôles; l'intégration quantitative de l'équation est achevée: j'entends par là que l'on peut représenter l'intégrale $y(x)$ (pour toutes les valeurs réelles de x) par le quotient de deux séries de polynômes uniformément convergentes, et dont les coëfficients se calculent par dérivations successives. Or les méthodes que j'ai développées dans le domaine complexe ont précisément comme objet de former les conditions

nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale d'une équation n'admette pas de singularités transcendantes.

Considérons, par exemple, une équation de la forme:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = R(y\,,\,x) = \frac{P(y\,,\,x)}{Q(y\,,\,x)},$$

P et Q désignant deux polynômes en $x\,,y$, et le polynôme Q ne s'annulant pour aucune valeur réelle de $x\,,y$. Pour que les intégrales réelles $y(x)$ ne présentent d'autres singularités mobiles que des pôles, il faut d'abord que le degré p de P en y surpasse au plus de *trois* unités le degré q de Q.

Si $p \leq q + 1$, les intégrales réelles $y(x)$, comme il est bien connu sont holomorphes quel que soit x.

Si $p = q + 2$, pour que $y(x)$ n'ait d'autres singularités que des pôles, il faut et il suffit que par une transformation:

$$y = a(X)Y + b(X), \qquad x = \varphi(X)$$

l'équation soit réductible à la forme:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6Y^2 + a(X) + \frac{b(X)Y^{(q-1)} + c(X)Y^{(q-2)} + \ldots}{Y^q + d(X)Y^{(q-1)} + \ldots}, \quad \text{où} \quad \frac{a''(X)}{2} + b(X) \equiv 0,$$

ce qu'on reconnaît algébriquement.

Les conditions ne sont guère plus compliquées dans le cas où $p = q + 3$.

La méthode peut d'ailleurs s'étendre aux équations différentielles non analytiques; il suffit de substituer, dans les raisonnements, la méthode de Cauchy-Lipschitz à celle du calcul des limites.

58. Une classe de problèmes où cette étude générale des équations différentielles trouvera naturellement son application, ce sont les problèmes de la Mécanique.

On peut d'abord se proposer de reconnaître si les paramètres qui définissent la position d'un système matériel sont des fonctions uniformes du temps t (pour toutes les valeurs réelles et imaginaires de t).

Dans le cas du corps pesant fixé par un point, le problème n'est autre que celui de M^e Kowalevski, mais élargi: M^e Kowalevski se propose de trouver les cas où le mouvement du solide est défini par des *fonctions méromorphes de t qui possèdent effectivement des pôles.* Son procédé laisse échapper les cas où ces fonctions seraient uniformes sans avoir de

pôles, soit qu'elles fussent *holomorphes*, soit que toutes leurs singularités fussent transcendantes.

De plus, après avoir formé les conditions pour qu'il existe des pôles mobiles, Me Kowalevski remarque que ces conditions entraînent l'intégrabilité des équations du mouvement, ce qui lui permet de mener la question jusqu'au bout. Mais cette remarque laisse échapper un cas où il existe des pôles et qui n'est pas un cas d'intégration. Toutefois les géomètres Russes ont montré, par la suite, que, dans ce cas, les équations du mouvement n'ont pas leur intégrale uniforme.

Les résultats de Me Kowalevski subsistent donc en fait. Mais si intéressante que soit la voie suivie par Me Kowalevski, il était désirable de reprendre la question d'une façon plus rationnelle. C'est ce que permettent les procédés que j'ai employés pour les équations du second ordre: ils fournissent de la manière la plus naturelle et la plus simple les conditions nécessaires pour que *ce mouvement soit représenté par des fonctions uniformes de t*, sans qu'il soit besoin de faire aucune autre hypothèse sur ces fonctions. Les conditions auxquelles on parvient ainsi ne diffèrent pas d'ailleurs de celles de Me Kowalevski. Pour ce problème particulier, on n'arrive donc pas à des cas nouveaux.

Il est bien certain d'ailleurs que les problèmes de mécanique qui s'intègrent par les fonctions uniformes forment une classe très exceptionnelle. Mais on obtient des résultats autrement généraux en se restreignant au domaine réel: les systèmes dont le mouvement est représenté par des fonctions de t qui restent régulières ou méromorphes pour toutes les valeurs réelles de t sont extrêmement nombreux. Nous possédons maintenant une méthode pour les mettre en évidence.

59. J'ai cherché, dans cette exposition, à donner un aperçu des diverses questions auxquelles sont applicables les méthodes qui m'ont permis de trouver les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. La démonstration détaillée des théorèmes que j'ai énoncés plus haut et d'autres propositions qui les complètent seront développées dans une suite de mémoires dont le premier sera consacré à la formation explicite de toutes les équations à points critiques fixes de la forme:

$$y'' = R(y', y, x)$$

(R rationnel en y', algébrique en y, analytique en x).

Les trois classes de transcendantes méromorphes nouvelles engendrées par ces équations feront ensuite l'objet de trois monographies distinctes.

J'aborderai dans des publications ultérieures l'étude des équations différentielles (algébriques) d'ordre quelconque à points critiques fixes, en particulier des équations du second ordre non résolues en y'' et des équations du troisième ordre résolues en y'''. Enfin, les applications et questions connexes (inversion des intégrales de différentielles totales, étude des singularités des intégrales d'une équation quelconque, intégration quantitative dans le domaine réel, application aux équations de la mécanique, etc. . . .) seront traitées dans des mémoires séparés.

La variété de ces applications m'a fait juger utile de donner un exposé détaillé de la méthode dans le cas le plus simple, de façon à la rendre accessible au plus grand nombre possible de lecteurs. On trouvera cet exposé dans un mémoire du Bulletin de la société mathématique de France (tome XXVIII, p. 201—261, juin 1900); ce mémoire contient notamment la détermination explicite de toutes les équations à points critiques fixes qui rentrent dans le type

$$y'' = a(x)y' + b(x)y^2 + c(x)y + d(x),$$

la démonstration des propriétés fondamentales de l'équation

$$y'' = 6y^2 + x,$$

enfin les premières conditions précises auxquelles est assujettie une équation différentielle du troisième ordre pour avoir ses points critiques fixes.

L'ŒUVRE SCIENTIFIQUE DE CHARLES HERMITE[1]

PAR

EMILE PICARD

À PARIS.

Vous savez, Messieurs, la perte immense qu'a faite la Science française le 14 janvier dernier. La mort de M. HERMITE touche particulièrement l'Université de Paris, où l'illustre géomètre a occupé de 1869 à 1897 la chaire d'Analyse supérieure. Il n'a pas voulu qu'on prît la parole sur sa tombe; nous n'avons donc pas pu entendre les voix autorisées qui auraient dit ce que lui doivent la Science et l'Enseignement. Cette grande vie scientifique demandera des études approfondies, qui se préparent certainement de différents côtés. A défaut d'une telle étude, qu'il me soit permis aujourd'hui, en reprenant cette année mon cours dans cette chaire qui fut celle de M. HERMITE, de jeter un coup d'œil sur son œuvre.

I.

CHARLES HERMITE naquit à Dieuze, en Lorraine, le 24 décembre 1822; il fit ses études au collège de Nancy, et les termina à Paris au collège Henri IV et au collège Louis-le-Grand. Il eut à Louis-le-Grand comme professeur de mathématiques spéciales un maître distingué, M. RICHARD, qui, quinze ans auparavant, avait été le professeur d'Évariste GALOIS. Tout en suivant les cours du collège, le jeune Hermite allait lire à la bibliothèque Sainte-Geneviève le *Traité de la résolution des équations numériques* de LAGRANGE, et il achetait avec ses économies la traduction française des

[1] Leçon faite à l'Université de Paris le samedi 2 mars 1901.

Recherches arithmétiques de Gauss; »C'est surtout dans ces deux livres, aimait-il plus tard à répéter, que j'ai appris l'Algèbre.« L'excellent M. Richard s'alarmait un peu de voir son élève si loin des programmes d'examen, mais il n'en disait pas moins un jour au père d'Hermite, qui ne se rendait peut-être pas très bien compte de la valeur du compliment: »C'est un petit Lagrange.« Le premier volume des Nouvelles Annales de Mathématiques, fondées en 1842, renferme deux Notes signées de Charles Hermite, élève du collège Louis-le-Grand; l'une n'est qu'un exercice, mais, dans la seconde, on reconnait un lecteur assidu de Lagrange qui a déjà beaucoup réfléchi sur la théorie des équations. L'objet de ce travail est de démontrer l'impossibilité de la résolution algébrique des équations du cinquième degré; la démonstration très simple qu'on y trouve pourrait, avec de légères additions, devenir classique. Hermite entre à l'Ecole Polytechnique à la fin de 1842; les exercices de l'Ecole ne l'empêchent pas de poursuivre ses méditations mathématiques, et, dès le mois de janvier 1843, il écrit à Jacobi, sur le conseil de Liouville, pour lui faire part de ses recherches sur les fonctions abéliennes. Le grand géomètre allemand avait, par une merveilleuse divination, montré quelques années auparavant comment on devait généraliser le problème de l'inversion de l'intégrale elliptique. Mais les propriétés essentielles des nouvelles transcendantes étaient si peu connues, qu'un géomètre, doué cependant d'une rare pénétration, se méprenait encore en 1844 sur leur nature, faute d'avoir saisi le principe fondamental relatif à la coexistence des périodes; les travaux de Göpel et de Rosenhain ne devaient venir que quelques années plus tard. Hermite étend aux fonctions abéliennes le théorème donné par Abel pour la division de l'argument dans les fonctions elliptiques; il montre que les équations correspondantes sont résolubles par radicaux, et il traite de l'abaissement de l'équation relative à la division des fonctions complètes. L'année suivante, en août 1844, Hermite envoie à Jacobi une seconde Lettre où il étudie le problème de la transformation des fonctions elliptiques. Son but est d'abord de retrouver les résultats énoncés par Jacobi sur cette question capitale, mais on trouve, en réalité, dans ce Mémoire, tous les principes de la théorie des fonctions θ de différents ordres, fonctions quelquefois désignées sous le nom de *fonctions intermédiaires* et si importantes pour la théorie générale des fonctions doublement périodiques. Ces deux lettres intéressèrent vivement Jacobi, qui fit au jeune mathé-

maticien français l'honneur de les insérer dans l'édition complète de ses *Œuvres.* On a souvent cité les dernières phrases de la réponse de JACOBI, qui possédait de son côté plusieurs des résultats indiqués par son correspondant. »Ne soyez pas fâché, Monsieur, si quelques-unes de vos découvertes se sont rencontrées avec mes anciennes recherches. Comme vous dûtes commencer par où je finis, il y a nécessairement une petite sphère de contact. Dans la suite, si vous m'honorez de vos Communications, je n'aurai qu'à apprendre.» Une autre phrase, celle-là d'un intérêt purement mathématique, mérite encore d'être retenue: »En cherchant, disait JACOBI, à tirer la transformation directement des propriétés des fonctions θ, sans faire usage de leurs décompositions en facteurs infinis, vous avez pensé savamment aux cas plus généraux, où probablement on doit se résigner à l'impossibilité d'une décomposition en facteurs.» Cette remarque devait fructifier dans l'esprit d'Hermite: nous la retrouverons plus tard dans son Mémoire célèbre sur la transformation des fonctions abéliennes.

C'est principalement de le théorie des nombres que s'occupe Hermite dans les années suivantes. Il y est conduit d'abord par le théorème purement arithmétique de JACOBI sur l'impossibilité d'une fonction d'une variable à trois périodes, et peu à peu la lecture assidue des *Recherches arithmétiques* de GAUSS l'amène à des problèmes de plus en plus étendus. La théorie des formes et les irrationnelles algébriques font alors l'objet des méditations profondes d'Hermite qui, continuant sa correspondance avec JACOBI, lui envoie quatre Lettres sur la théorie des nombres. Rien ne montre mieux que ces Lettres le génie d'Hermite; la puissance d'invention sur des sujets aussi nouveaux et aussi difficiles y est prodigieuse. Les idées s'y pressent abondantes et touffues; elles seront développées et précisées dans des Mémoires ultérieurs, et il en est plus d'une dont la fécondité n'est pas aujourd'hui épuisée. C'est dans la théorie des formes quadratiques à un nombre quelconque de variables que se trouvent les principes des méthodes employées: il est d'abord établi que, étant donnée une forme quadratique à n variables et à coefficients réels quelconques, le minimum de la forme pour des valeurs entières qui ne sont pas toutes nulles est inférieur à $\rho_n \sqrt[n]{D}$, en désignant par D la valeur absolue du déterminant, et par ρ_n une quantité numérique dépendant seulement de n. Hermite a donné pour ce nombre $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}$; on a depuis obtenu une valeur inférieure,

mais le point essentiel est, pour un nombre donné de variables, la limitation du minimum à l'aide du déterminant seul de la forme, quoique dans certaines questions il puisse y avoir avantage à avoir la moindre valeur possible. Ce résultat obtenu, une considération extrêmement originale permet, en premier lieu, à Hermite de l'appliquer à la généralisation de la théorie des fractions continues, en cherchant l'approximation simultanée de plusieurs quantités au moyen de fractions ayant même dénominateur m; l'erreur dans cette représentation approchée de n quantités est de l'ordre $\frac{1}{m\sqrt[n]{m}}$. C'est un point sur lequel il convient d'insister, non pas seulement à cause de l'intérêt du résultat, mais parce que nous avons là le premier et mémorable exemple de cette introduction des variables continues dans la théorie des nombres, que nous allons bientôt retrouver dans des problèmes plus vastes.

Dans le cas d'une seule grandeur A, le résultat est bien simple, mais met remarquablement en évidence le rôle de la variable continue; Hermite considère la forme quadratique linéaire

$$(x - Ay)^2 + \frac{y^2}{\Delta},$$

Δ étant une quantité positive quelconque; du théorème précédent on conclut de suite que l'on peut trouver deux entiers m et n, tels que

$$|m - An| < \frac{1}{n\sqrt{3}},$$

résultat plus précis, d'ailleurs, que celui donné par la théorie des fractions continues, à cause du facteur $\sqrt{3}$. Quand Δ croît d'une manière continue, les mêmes entiers m et n peuvent d'abord être conservés pour satisfaire aux conditions voulues; mais, au passage de Δ par une certaine valeur, il faut brusquement prendre deux nouveaux nombres m' et n', et l'on a la relation

$$mn' - m'n = \pm 1.$$

La théorie élémentaire des fractions continues se présente ainsi sous un jour essentiellement nouveau et se trouve susceptible d'être généralisée, en même temps que la continuité avec la variable Δ se trouve introduite dans une question arithmétique.

Dans le cas de n quantités données $A_1, A_2, \ldots, A_n$, il faudra envisager la forme quadratique à $n + 1$ variables $x_0, x_1, \ldots, x_n$

$$(x_1 - A_1 x_0)^2 + (x_2 - A_2 x_0)^2 + \ldots + (x_n - A_n x_0)^2 + \frac{x_0^2}{\Delta^2},$$

où Δ est une quantité positive quelconque. En appliquant à cette forme le résultat énoncé sur le minimum d'une forme quadratique, on arrive de suite à la représentation approchée des quantités A, l'approximation étant liée à la quantité Δ qu'on peut prendre aussi grande que l'on veut. Le théorème de Jacobi sur l'impossibilité d'une fonction à trois périodes peut être aussi établie par des considérations analogues, et Hermite fut ainsi conduit à la démonstration de l'impossibilité pour une fonction de n variables complexes d'avoir plus de $2n$ systèmes de périodes simultanées, théorème que Riemann devait retrouver ultérieurement. Il faut encore citer, quoiqu'elle n'ait été donnée que plus tard par Hermite, la démonstration d'un résultat établi autrement par Tchebycheff et susceptible de généralisations extrêmement étendues; étant données deux constantes quelconques a et b, on peut trouver deux entiers x et y, tels que

$$|x - ay - b| < \frac{1}{2y}.$$

La méthode de Hermite lui permet même de remplacer le facteur $\frac{1}{2}$ par le facteur plus petit $\sqrt{\frac{2}{27}}$.

L'introduction de variables continues dans certaines formes quadratiques a été l'idée fondamentale qui a dominé la longue suite des travaux arithmétiques d'Hermite. Je ne puis songer à entrer dans le détail de ces profondes recherches; arrêtons-nous seulement sur les points de vue nouveaux, qui ont été si féconds dans l'étude des formes quadratiques à un nombre quelconque de variables, des irrationnelles algébriques et des formes décomposables en facteurs linéaires. On sait que Gauss, dans ses recherches arithmétiques, a élevé un monument à la théorie arithmétique des formes quadratiques à deux variables dont l'étude avait été commencée par Lagrange et Legendre, et a posé les bases de la théorie des formes quadratiques ternaires. Le problème de la réduction des formes quadratiques est

d'une importance capitale; la difficulté n'est pas la même suivant qu'il s'agit de formes définies ou indéfinies. Hermite, traitant d'abord le cas plus simple des formes quadratiques définies à un nombre quelconque de variables et dont les coefficients sont des quantités réelles quelconques, donne différents procédés de réduction, d'où se déduit immédiatement que, pour les formes définies à coefficients entiers et de déterminant donné, il n'y a qu'un nombre limité de classes. L'étude des formes indéfinies à coefficients entiers présente des difficultés beaucoup plus considérables, qui tiennent en grande partie à ce qu'il y a une infinité de substitutions semblables, comme les appelle Hermite, c'est-à-dire de substitutions à coefficients entiers transformant la forme en elle-même. Les points essentiels de la théorie des formes indéfinies sont rattachés, d'une manière vraiment géniale, à la considération d'une forme définie associée dépendant d'un certain nombre de paramètres arbitraires, et ici nous voyons apparaître les variables continues dans un problème arithmétique extrêmement difficile. Les substitutions à coefficients entiers, permettant de *réduire successivement* cette forme définie, quand, par une variation continue des paramètres, elle cesse d'être réduite, conduisent aux substitutions semblables, et l'on peut démontrer qu'il existe un nombre fini de substitutions à l'aide desquelles on obtient toutes les substitutions transformant la forme en elle-même. Il résulte aussi de cette admirable analyse que, pour les formes indéfinies à coefficients entiers comme pour les formes définies, il n'y a qu'un nombre limité de classes pour un déterminant donné; on en déduit la solution du problème de l'équivalence de deux formes.

Les principes précédents s'appliquent aussi aux formes à coefficients entiers de degré quelconque décomposables en facteurs linéaires; leur théorie est même à bien des égards beaucoup plus simple que celle des formes quadratiques. Les substitutions semblables sont ici deux à deux permutables, et elles peuvent toutes s'exprimer par un produit de puissances de certaines substitutions, dont le nombre s'obtient d'une manière très remarquable: Si a désigne le nombre des facteurs réels dans la forme, et b le nombre des couples de facteurs imaginaires conjugués, il y a $a+b$ substitutions semblables fondamentales. La démonstration de ce beau théorème, énoncé seulement par Hermite au commencement d'un de ses Mémoires, n'a jamais, je crois, été développée. A l'égard des formes quadratiques indéfinies, on ne connait aujourd'hui encore aucune proposition analogue relative au

nombre des substitutions fondamentales, qui ne sont pas, en général, permutables; ce serait là un difficile, mais bien intéressant sujet de recherches.

Les formes quadratiques binaires indéfinies appartiennent en même temps aux deux types précédents; l'application à ce cas très particulier des principes généraux pourra donner une idée des méthodes d'Hermite. Soit une forme indéfinie f à coefficients entiers que nous mettons sous la forme

$$f = a(x + \alpha y)(x + \beta y).$$

La forme définie associée est alors

$$\varphi = (x + \alpha y)^2 + \Delta(x + \beta y)^2 \qquad (\Delta > 0)$$

et l'on doit en faire la *réduction continuelle* en donnant à Δ toutes les valeurs positives. Pour la variation de Δ dans un intervalle convenable ne comprenant pas l'origine, on obtient un certain nombre de réduites de la forme proposée, qui se reproduisent ensuite périodiquement quand Δ va vers l'infini ou vers zéro. On retrouve ainsi, comme chez Gauss, une sorte de périodicité, mais sous un point de vue bien différent et susceptible des généralisations les plus étendues.

Nous n'avons parlé jusqu'ici que des formes à variables réelles. Hermite a introduit dans la Science la notion de formes à indéterminées conjuguées, qui a ouvert à l'Arithmétique et à l'Algèbre un champ extrêmement vaste. Ces formes se partagent encore en formes définies et formes indéfinies; laissant de côté ces dernières, Hermite fait une théorie complète de la réduction des formes définies à indéterminées conjuguées. Les conséquences qu'il en tire sont très nombreuses. Il en est d'une rare élégance. Telles sont les recherches concernant l'approximation des quantités complexes par des fractions dont les éléments sont des entiers complexes de Gauss; la méthode d'Hermite lui donne des résultats plus précis que ceux de Dirichlet, et surtout elle lui permet de trouver les rapports existant entre deux approximations consécutives, ce qui est indispensable pour mettre dans toute son évidence l'analogie entre les nombres réels et les nombres complexes. Citons encore la démonstration des théorèmes de Jacobi sur le nombre des représentations d'un nombre par une somme de quatre carrés.

Des applications d'un caractère plus général concernent les formes à coefficients entiers complexes et à variables complexes de degré quelconque décomposables en facteurs linéaires; en supposant qu'une telle forme φ est irréductible, c'est-à-dire que l'équation $\varphi = 0$ n'admet d'autres solutions entières que les valeurs nulles des variables, Hermite démontre qu'elles ne forment qu'un nombre limité de classes pour un déterminant donné. De ce théorème il déduit une des plus admirables propositions de la science des nombres, à savoir que: les racines de toutes les équations à coefficients entiers complexes d'un degré donné, et pour lesquelles le discriminant a la même valeur, ne représentent qu'un nombre essentiellement limité d'irrationnelles distinctes. Nous pouvons, en deux mots, esquisser la démonstration: à l'équation proposée de degré n, à coefficients entiers,

$$Pv^n + Qv^{n-1} + \ldots + Rv + S = 0,$$

et dont nous désignerons les racines par $a, b, \ldots, l$, on fait correspondre la forme φ à n variables $x, y, z, \ldots, u$,

$$\varphi = P^{n-1}(x + ay + a^2z + \ldots + a^{n-1}u)$$
$$\times (x + by + b^2z + \ldots + b^{n-1}u) \ldots (x + ly + l^2z + \ldots + l^{n-1}u),$$

dont le déterminant ne dépend que du discriminant de l'équation. Les formes φ appartenant à un nombre limité de classes, il en résulte de suite que le nombre des irrationnelles distinctes est limité.

Au début de sa carrière, les fonctions elliptiques et abéliennes avaient appelé l'attention d'Hermite sur certaines irrationnelles algébriques. Depuis cette époque, les nombres algébriques avaient toujours été l'objet de ses méditations. C'est, sans doute, à leur occasion qu'il entreprit la longue suite de ses recherches arithmétiques. »Permettez-moi, disait-il dans une de ses Lettres à Jacobi, de revenir sur les circonstances remarquables auxquelles donne lieu la réduction des formes dont les coefficients dépendent des racines d'équations algébriques à coefficients entiers. Peut-être parviendra-t-on à déduire de là un système complet de caractères pour chaque espèce de ce genre de quantités, analogue, par exemple, à ceux que donne la théorie des fractions continues pour les racines des équations du second degré», et, plus loin, il ajoute: »Quelle tâche immense pour la théorie des nombres de pénétrer dans la nature d'une telle multiplicité d'êtres, en les classant

en groupes irréductibles entre eux, de les constituer tous individuellement par des définitions caractéristiques et élémentaires. » On le voit à plusieurs reprises revenir sur ce programme. La question capitale de la recherche des unités complexes dans un corps algébrique est liée par lui à la réduction de certaines formes quadratiques; dès 1845, il passe bien près du théorème célèbre de DIRICHLET donnant le nombre exact des unités complexes indépendantes. Mais il s'attache surtout à trouver pour les irrationnelles algébriques un algorithme mettant en évidence les propriétés de ces irrationnelles. Pour les irrationnelles du troisième degré en particulier, le résultat est remarquablement simple: on est conduit à un algorithme périodique entièrement analogue à celui des fractions continues dans leur application aux irrationnelles du second degré. Ainsi, en envisageant une équation du troisième degré à coefficients entiers ayant une racine réelle α et deux racines imaginaires β et γ, on est conduit, d'après ce point de vue, à réduire pour toutes les valeurs positives de la quantité Δ la forme ternaire

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)^2 + \Delta(x + \beta y + \beta^2 z)(x + \gamma y + \gamma^2 z),$$

et dans cette réduction continuelle se manifeste une périodicité caractéristique des irrationnelles du troisième degré. Il serait intéressant de comparer les vues générales d'Hermite sur les irrationnelles avec les résultats donnés récemment par M. MINKOWSKI où la considération de certaines chaînes de substitutions permet de donner des critériums nécessaires et suffisants pour qu'un nombre soit algébrique.

II.

La théorie arithmétique des formes binaires rentre évidemment dans le même ordre d'idées que celle des irrationnelles algébriques. Hermite lui a consacré plusieurs Mémoires et a étudié particulièrement le cas des formes de degré impair et le cas des formes quadratiques. Mais, tandis que pour les formes quadratiques les préliminaires algébriques de la théorie arithmétique des formes sont immédiats, il n'en est plus de même quand on s'élève aux formes de degré quelconque; la partie algébrique de la théorie prend alors un développement inattendu et présente un intérêt

considérable. C'est ce qui amena Hermite à s'occuper de divers problèmes d'algèbre et particulièrement de la théorie des formes binaires où il allait obtenir de magnifiques résultats en même temps que ses émules CAYLEY et SYLVESTER.

Les théorèmes de STURM et de CAUCHY sur le nombre des racines, des équations satisfaisant à certaines conditions avaient vivement frappé les géomètres. Sur ce sujet on doit à Hermite quelques résultats qui resteront classiques. En partant de la remarque relative à la décomposition des formes quadratiques en somme de carrés, que SYLVESTER, qui l'a trouvée en même temps, nomme la *loi d'inertie* et que JACOBI avait aussi rencontrée, Hermite considère d'abord une équation à coefficients réels, et construit une forme quadratique associée à l'équation renfermant une arbitraire réelle t. Quand cette forme est réduite à une somme de carrés, le nombre des carrés négatifs est égal au nombre des couples de racines imaginaires de l'équation augmenté du nombre des racines réelles inférieures à t. Un cas particulier dont la démonstration est immédiate se formule ainsi: dans la forme quadratique à n variables

$$\sum(x_0 + \alpha x_1 + \ldots + \alpha^{n-1} x_{n-1})^2$$

où la somme est étendue aux n racines α de l'équation, le nombre des carrés négatifs est égal au nombre des couples de racines imaginaires. Poussant la question plus loin, Hermite considère une équation à coefficients complexes; il associe alors à l'équation une forme quadratique à indéterminées conjuguées, et, quand celle-ci, par une transformation élémentaire, a été débarrassée de ses termes rectangles, le nombre des coefficients positifs est égal au nombre des racines dont le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif. Le théorème de STURM, le théorème de CAUCHY relatif au nombre des racines d'une équation contenue dans un contour et donnant par un calcul algébrique ce nombre de racines quand le contour est formé d'une courbe unicursale, se déduisent des résultats précédents, et sont ainsi établis, comme le remarque Hermite, sans faire intervenir aucune considération de continuité.

Les travaux d'Hermite relatifs à la théorie algébrique des formes binaires sont d'une rare perfection; la simplicité des méthodes et l'élégance des résultats en font de véritables œuvres d'art. La théorie des invariants devait son origine à un Mémoire de BOOLE, mais le vrai fondateur en fut

Cayley qui sut créer toute une nouvelle branche de l'algèbre. Sylvester vint ensuite et apporta un grand nombre de résultats nouveaux, parmi lesquels la découverte des premiers covariants. L'idée des invariants n'était pas neuve pour Hermite; une notion générale sur les invariants s'était offerte jadis à lui, amenée par une considération purement arithmétique. Il entre dans la lice, et Sylvester pouvait dire plus tard: »Nous formions alors, Cayley, Hermite et moi, une trinité invariantive.» Un calcul symbolique extrêmement ingénieux permet à Hermite de montrer qu'à tout covariant d'une forme de degré m, et qui par rapport aux coefficients de cette forme est du degré p, correspond un covariant du degré m par rapport aux coefficients d'une forme de degré p. Les deux covariants sont d'ailleurs du même degré par rapport aux indéterminées: c'est la célèbre loi de réciprocité d'Hermite. Ses applications sont innombrables. Pour citer un exemple relatif aux invariants, la forme quadratique ayant comme invariant de degré 2μ la puissance μ de son discriminant, il résulte de la loi de réciprocité que toutes les formes de degré pair ont un invariant du second degré. La loi est surtout intéressante pour les covariants. Hermite démontre que toutes les formes binaires, sauf les formes biquadratiques, ont un covariant quadratique. L'importance de ces covariants quadratiques est capitale; on en déduit la notion de substitution canonique, celle-ci étant une substitution ramenant le covariant quadratique à la forme xy. Au moyen de cette substitution, des invariants et des covariants d'une forme, qu'il eût été presque impossible d'obtenir jamais en fonction explicite des coefficients de cette forme, prennent une forme simple. Grâce à cette théorie, Hermite découvre l'invariant du dix-huitième degré des formes du cinquième degré; c'était le premier exemple d'un invariant gauche, c'est-à-dire se reproduisant multiplié par une puissance impaire du déterminant de la substitution. Nous devons noter particulièrement la découverte des covariants linéaires pour les formes de degré impair à partir du cinquième degré; elle a conduit Hermite, au moyen d'un changement de variables effectué à l'aide de deux covariants linéaires, aux formes-types dont les coefficients sont tous des invariants de la forme initiale. Une application extrêmement intéressante de ces théorèmes généraux concerne les formes du cinquième degré. Ces formes possèdent quatre invariants fondamentaux, en fonctions entières desquels s'expriment tous les autres invariants; les trois premiers avaient été découverts par Sylvester, et le quatrième est

l'invariant gauche dont j'ai parlé plus haut. Les coefficients de la forme-type du cinquième degré s'expriment rationnellement à l'aide de ces invariants; Hermite en déduit qu'on peut amener toute équation du cinquième degré à ne dépendre que de deux paramètres qui sont des invariants absolus, et la discussion complète de la nature, réelle ou imaginaire, des racines de l'équation générale du cinquième degré se fait de la manière la plus élégante.

La lecture de ces beaux Mémoires laisse une impression de simplicité et de force; aucun mathématicien du XIX^e^ siècle n'eut, plus qu'Hermite, le secret de ces transformations algébriques profondes et cachées qui, une fois trouvées, paraissent d'ailleurs si simples. C'est à un tel art du calcul algébrique que pensait sans doute Lagrange, quand il disait à Lavoisier que la chimie deviendrait un jour facile comme l'algèbre.

Nous avons dit que l'objet primitif d'Hermite dans ses Études sur les formes binaires avait été arithmétique. Il voulait en particulier approfondir cette proposition, que les formes à coefficients entiers et en nombre infini, qui ont les mêmes invariants, ne forment qu'un nombre limité de classes distinctes. Il a développé surtout ses recherches pour les formes cubiques et les formes biquadratiques, mais il a indiqué sur les formes de degré impair quelconque un théorème bien inattendu, qui se déduit de la considération des formes types: toutes les formes binaires de degré impair (à partir du cinquième) à coefficients entiers ne forment qu'un seul genre, au sens d'Eisenstein, c'est-à-dire sont transformables les unes dans les autres par des substitutions linéaires de déterminant *un* à coefficients entiers ou fractionnaires. Que de problèmes restent ouverts dans cette vaste théorie des formes! Quelles seront les transcendantes numériques permettant d'exprimer le nombre des classes en fonction des invariants? C'est le secret de l'avenir.

Détourné par de nouvelles études, Hermite ne devait plus revenir qu'incidemment sur ses premières recherches arithmétiques; je l'ai entendu plusieurs fois regretter de ne pas avoir approfondi davantage certaines parties des Mémoires dont je viens d'essayer de donner une idée. Gauss eut sans doute de tels regrets en relisant vers la fin de sa vie ses *Disquisitiones arithmeticæ*. Une grande œuvre scientifique n'est jamais achevée. Les méthodes générales introduites par Hermite ont ouvert à la théorie des nombres des horizons entièrement nouveaux qui ne sont pas encore

complètement explorés. Tous ceux qui, depuis lui, se sont occupés de la théorie des formes ont profondément subi son influence; il suffira de citer le beau Mémoire de M. Camille Jordan sur l'équivalence des formes, et de rappeler que le merveilleux principe de la réduction continuelle s'adapte même à des recherches toutes modernes sur la théorie de certaines fonctions uniformes.

Hermite, dans la première partie de sa carrière, que je viens de retracer, c'est-à-dire jusque vers 1855, fut en relations suivies, d'abord avec Jacobi et ensuite avec Dirichlet, qui était peut-être à cette époque le plus apte à le comprendre: il avait, à ses débuts, trouvé auprès de ces grands géomètres le meilleur accueil et en avait gardé un fidèle souvenir. Il écrivait encore quelques semaines avant sa mort qu'il avait toujours été et qu'il serait jusqu'à son dernier jour un disciple de Gauss, de Jacobi et de Dirichlet. Les affinités entre esprits de premier ordre sont toujours intéressantes et utiles à suivre; le témoignage d'Hermite à ce sujet est précieux, et l'étude de la plus grande partie de son œuvre le confirme bien. Cauchy, qu'il a cependant beaucoup connu, n'a pas exercé sur lui, au moins à ses débuts, la même influence scientifique.

III.

La théorie des fonctions abéliennes n'avait jamais cessé de préoccuper Hermite depuis l'époque où il était élève à l'Ecole Polytechnique. Il voulut étendre à ces fonctions le problème de la transformation qu'avaient traité avec tant d'éclat Abel et Jacobi dans le cas des fonctions elliptiques; son Mémoire de 1855 sur la transformation des fonctions abéliennes est une de ses plus belles œuvres. Etant données les deux équations différentielles qui, pour un radical portant sur un polynome d'ailleurs arbitraire du cinquième ou du sixième degré, définissent les fonctions abéliennes, Hermite considère simultanément les quinze fonctions uniformes quadruplement périodiques introduites par Göpel et Rosenhain, et qui sont les analogues de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ et $\operatorname{dn} x$. Le problème de la transformation est alors ainsi posé: Pour un polynome donné, déterminer un nouveau polynome tel qu'en formant deux combinaisons linéaires convenables des équations différentielles relatives à ce polynome, les quinze fonctions abéliennes correspon-

dantes s'expriment rationnellement à l'aide des quinze premières. Pour la solution de ce problème algébrique, Hermite se place au point de vue transcendant, et cherche d'abord à étendre aux fonctions θ de deux variables l'analyse indiquée jadis dans sa seconde lettre à JACOBI pour les fonctions θ d'un variable. Mais des difficultés d'une nature arithmétique, que n'avait pas connues la théorie des fonctions elliptiques, se présentent dans le nouveau problème. Les périodes des anciennes fonctions doivent être des sommes de multiples des périodes des nouvelles. Or il existe une relation bilinéaire bien connue entre ces périodes; les nombres entiers figurant dans la transformation des périodes ne sont donc pas arbitraires, ce qui conduit à un ensemble remarquable de substitutions linéaires de coefficients entiers dont les propriétés doivent d'abord être étudiées. Un nombre entier k joue dans l'étude de ces substitutions un rôle essentiel; la notion de systèmes équivalents et non équivalents se pose alors, et il est établi que le nombre des substitutions non équivalentes est égal à $1 + k + k^2 + k^3$, si k est premier. On en peut conclure que le nombre des transformations distinctes des fonctions abéliennes relatives à un nombre premier k est égal à $720 \times (1 + k + k^2 + k^3)$. En même temps que ce théorème fondamental, correspondant au théorème d'ABEL et de JACOBI sur le nombre $6(n + 1)$ des transformations d'ordre n des fonctions elliptiques (n étant premier), Hermite donne le moyen de former les relations algébriques entre les anciennes et les nouvelles fonctions, résolvant ainsi complètement le problème qu'il s'était posé. Cet admirable travail, rédigé d'une manière très concise, a fait l'objet de nombreux commentaires, et ouvert la voie à des recherches de nature variée, dont quelques-unes ne se rapportent qu'indirectement à la théorie des fonctions abéliennes. Citons entre autres le Mémoire de LAGUERRE sur le Calcul des systèmes linéaires, où se trouve généralisée la notion de formes quadratiques correspondant aux substitutions linéaires indiquées plus haut; en Algèbre, à un point de vue tout différent, la notion importante de substitution abélienne, telle qu'elle est utilisée par M. JORDAN, trouve son point de départ dans une importante remarque du Mémoire sur la transformation des fonctions abéliennes.

Au milieu de tant de travaux, Hermite ne cessait de s'intéresser à la théorie des fonctions elliptiques. Je crois bien qu'elle a été son étude de prédilection. Les belles formules, d'une allure si parfaite, qu'on y ren-

contre, remplissaient de joie, comme il le disait, son âme d'algébriste, ainsi que les rapports si remarquables de ces transcendantes avec l'Algèbre et les propriétés des nombres; les *Fundamenta nova* de JACOBI étaient toujours sur sa table de travail. Une addition à la sixième édition du Traité de LACROIX est restée célèbre dans la théorie des fonctions doublement périodiques; c'est de l'intégration d'une fonction doublement périodique, le long d'un parallélogramme de périodes, qu'Hermite, ici disciple de CAUCHY, déduit les propriétés fondamentales de ces fonctions, et en particulier la décomposition en éléments simple si importante pour le Calcul intégral.

En 1858, Hermite reprend l'étude de la transformation des fonctions elliptiques, et cherche à en approfondir davantage le mécanisme. Il rencontre ainsi une abondante moisson et tout d'abord la résolution de l'équation du cinquième degré. JACOBI avait montré que, dans la transformation de degré n (n étant premier), il y a une relation de degré $n+1$ entre les racines quatrièmes de l'ancien et du nouveau module; c'est l'équation qu'on appelle l'*équation modulaire*. Deux fonctions vont jouer un rôle essentiel. Employant les notations de JACOBI, on sait que $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k'}$ sont des fonctions uniformes de $\omega = \frac{K'i}{K}$; Hermite les désigne par $\varphi(\omega)$ et $\psi(\omega)$ et étudie les transformations qu'elles subissent quand on effectue sur ω une substitution linéaire. Le fait que les modules satisfaisant à l'équation modulaire s'expriment, en utilisant les fonctions précédentes, par des fonctions uniformes d'un paramètre avait vivement frappé Hermite; il eut le pressentiment que cette circonstance n'était possible qu'à cause de la nature singulière de ces fonctions, et la fonction $\varphi(\omega)$ sur laquelle il attira si vivement l'attention forme le premier exemple de ces fonctions, ayant des lignes de singularités essentielles, dont M. POINCARÉ devait plus tard faire une étude générale sous le nom de *fonctions fuchsiennes*.

GALOIS avait énoncé que pour $n = 5, 7, 11$ les équations modulaires sont susceptibles d'un abaissement au degré inférieur d'une unité; ce résultat, retrouvé aussi par M. BETTI, avait été vérifié par Hermite dès l'époque déjà lointaine de ses lettres à JACOBI. Il effectue maintenant la réduction d'une manière complète pour $n = 5$, en employant pour former une réduite une fonction convenable des six racines; il trouve ainsi une équation du cinquième degré, susceptible d'être identifiée avec l'équation

$$x^5 - x - a = 0,$$

forme à laquelle un géomètre anglais, JERRARD, avait ramené l'équation générale du cinquième degré sans employer d'autres irrationnels que des radicaux carrés et cubiques. a étant donné, l'identification conduit à une équation du quatrième degré pour trouver le module de la fonction elliptique. L'équation du cinquième degré se trouve donc résolue, en ce sens que ces racines se trouvent représentées par des expressions s'exprimant simplement à l'aide de $\varphi(\omega)$ et $\psi(\omega)$. Cette résolution de l'équation du cinquième degré frappa vivement l'attention des géomètres et, quelque temps après, KRONECKER et BRIOSCHI traitaient la même question sans faire la réduction préalable à l'équation de JERRARD et en utilisant la relation algébrique entre le module et le multiplicateur dans la transformation du cinquième ordre.

Dans un Mémoire étendu sur l'équation du cinquième degré, Hermite exposa ensuite ses travaux, ainsi que ceux de KRONECKER et de BRIOSCHI, en utilisant ses anciennes recherches sur les formes du cinquième degré. On trouve, de plus, dans ce Mémoire, quelques résultats généraux concernant les équations de degré quelconque. Il y est montré que, pour une équation de degré quelconque, on peut former un certain nombre d'invariants dont les signes donnent le nombre des racines réelles et imaginaires de l'équation; pareillement on peut former un système de covariants doubles, c'est-à-dire à deux séries de variables, servant, comme les fonctions de STURM, à déterminer le nombre des racines réelles comprises entre deux nombres. Hermite complétait ainsi d'une manière remarquable ses premières études sur des suites analogues à celle de STURM.

Nous rencontrons bientôt après un long Mémoire sur la théorie des équations modulaires. Pour réaliser effectivement l'abaissement de l'équation modulaire dans les trois cas prévus par GALOIS, il fallait calculer le discriminant de cette équation. Hermite entreprend alors d'une manière générale une étude du discriminant des équations modulaires et sa décomposition en facteurs, et est ainsi conduit à d'importantes notions arithmétiques sur le nombre des classes de formes quadratiques. La théorie des équations modulaires n'est, d'ailleurs, pas le seul lien où la théorie des fonctions elliptiques vient se lier à la théorie des formes quadratiques binaires de déterminant négatif. Un autre plus élémentaire s'offre lorsqu'on développe en séries trigonométriques certains quotients de fonctions θ; on obtient ainsi des identités, d'où découlent des propositions très cachées d'Arith-

métique, et c'est ainsi, entre autres résultats, qu'Hermite retrouve les propositions de LEGENDRE et de GAUSS sur la décomposition des nombres en trois carrés. Ces rapprochements étranges, entre des questions de natures si différentes, exerçaient sur son esprit une sorte de fascination et étaient une des causes de l'attrait qu'il eut toujours pour la théorie des fonctions elliptiques. Aussi écrivait-il un jour à propos des travaux de LEGENDRE et de GAUSS sur la décomposition des nombres en carrés: »Ces illustres géomètres, en poursuivant au prix de tant d'efforts leurs profondes recherches sur cette partie de l'Arithmétique supérieure, tendaient ainsi à leur insu vers une autre région de la Science et donnaient un mémorable exemple de cette mystérieuse unité, qui se manifeste parfois dans les travaux analytiques en apparence les plus éloignés.

IV.

De telles analogies et de tels rapprochements se retrouvent dans d'autres parties de Mathématiques. La théorie des fractions continues en Arithmétique, c'est-à-dire la représentation approchée d'un nombre incommensurable par un nombre rationnel, avait été étendue aux fonctions d'une variable. Etant donnée une fonction d'une variable x développée suivant les puissances positives et entières de x, on peut se proposer de représenter cette fonction par une fonction rationnelle de x, dont le numérateur et le dénominateur soient de degré n, avec une approximation de l'ordre $2n + 1$ par rapport à x; cette théorie des fractions continues algébriques offre la plus grande analogie avec la théorie des fractions continues arithmétiques. Hermite, qui s'était occupé de la représentation simultanée de plusieurs nombres par des fractions de même dénominateur, devait naturellement s'attacher au problème analogue pour plusieurs fonctions. Ce mode nouveau d'approximations algébriques simultanées le conduisit à une de ses plus belles découvertes, je veux parler de la transcendance du nombre e, base des logarithmes népériens. Son point de départ, dans ce Mémoire célèbre *Sur la fonction exponentielle*, publié en 1873, est l'approximation simultanée d'un certain nombre d'exponentielles de la forme e^{ax} au moyen de fractions rationnelles; les différences entre ces exponentielles et leurs valeurs approchées sont représentées à l'aide d'intégrales définies, et ces approximations permettent d'établir en

faisant $x = 1$ et en supposant entiers les nombres a, que e ne peut satisfaire à aucune équation algébrique à coefficients entiers. On savait depuis longtemps former des séries représentant des nombres transcendants; LIOUVILLE paraît avoir donné le premier de tels exemples, mais ces nombres ne jouaient aucun rôle en Analyse. L'intérêt, qui s'attache à un nombre aussi fondamental que e, donnait, au contraire, un prix immense à la démonstration de sa transcendance. Quelques années après, M. LINDEMANN, en s'inspirant des études d'Hermite, démontrait la transcendance du rapport π de la circonférence au diamètre; en même temps se trouvait, par suite, établi l'impossibilité de la quadrature de cercle. L'étude de ces belles questions a été, dans ces dernières années, notablement simplifiée, mais les principes au fond sont restés les mêmes, et les démonstrations très simples que nous possédons aujourd'hui ont été suggérées par les méthodes d'Hermite.

Après son Mémoire sur l'exponentielle, Hermite continua ses recherches sur des fractions continues algébriques. On connaissait depuis GAUSS le rôle des polynomes de LEGENDRE dans le développement de $\log\frac{x-1}{x+1}$ en fraction continue, et les recherches de M. HEINE et de M. CHRISTOFFEL avaient montré les rapports de la théorie des fractions continues avec certaines équations différentielles linéaires du second ordre. Hermite étend tous ces résultats en montrant comment une certaine équation linéaire d'ordre $n+1$, généralisant l'équation de GAUSS, se lie aux modes d'approximations simultanées dont il avait donné une application dans son Mémoire *Sur la fonction exponentielle;* il étend ainsi, pour ne citer qu'un exemple, le résultat de GAUSS, en développant n logarithmes de la forme $\log\frac{x-z_i}{x-z_0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ en fractions continues, ce qui le conduit à généraliser à un point de vue très intéressant les polynomes de LEGENDRE.

Nous avons déjà eu l'occasion de dire que la théorie des fractions continues arithmétiques peut se généraliser de diverses manières. De même, la théorie des fractions continues algébriques peut être étendue dans des directions différentes. Le problème suivant paraissait à Hermite de grande importance et l'a souvent préoccupé: étant données n séries $S_1, S_2, \ldots, S_n$ procédant suivant les puissances croissantes de x, déterminer les polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de degrés $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ de manière à avoir pour la somme $S_1X_1 + S_2X_2 + \ldots + S_nX_n$ une approximation d'ordre $\mu_1 + \ldots + \mu_n + n - 1$.

Il en donne une solution très simple dans le cas où les S sont des exponentielles e^{ax}, et réussit dans le cas géneral, pour $n = 3$, à trouver un algorithme conduisant au résultat cherché sans avoir de systèmes d'équations à résoudre. Chemin faisant, il traite, mais d'une tout autre manière, le problème suivant, résolu par TCHEBYCHEFF et analogue à un problème déjà mentionné d'Arithmétique: Trouver deux polynomes X et Y de degrès m et n, de manière à avoir pour $S_1X + S_2Y - S_3$ une approximation d'ordre $m + n - 2$. L'allure arithmétique, si j'ose le dire, de ces problèmes intéressait vivement Hermite; ils se rattachaient pour lui à des questions importantes d'Analyse; le Mémoire sur e en est la meilleure preuve. Il avait antérieurement consacré un élégant Mémoire au cas particulier de la détermination d'un système de polynomes U, V, W, tels que $U \sin x + V \cos x + W$ commence par la plus haute puissance possible de la variable; il en avait tiré une démonstration immédiate du théorème de LAMBERT sur l'incommensurabilité de π^2, et peut-être avait-il songé un instant à déduire de ce genre de considérations la transcendance de π.

La puissance de travail d'Hermite était considérable. La transcendance de e, les fractions continues algébriques ne lui font pas abandonner les fonctions elliptiques. Dès 1872, il est en possession de l'intégration de l'équation de LAMÉ, comme le montrent les feuilles lithographiées de son cours de l'Ecole Polytechnique. En 1877, il commence la publication dans les Comptes rendus de son grand Mémoire *Sur quelques applications des fonctions elliptiques.* Les fonctions doublement périodiques de seconde espèce, c'est-à-dire les fonctions qui se reproduisent à un facteur constant près par l'addition d'une période, jouent un rôle capital dans le travail d'Hermite; il étend à ces fonctions la décomposition en éléments simples qu'il avait donnée jadis pour les fonctions de première espèce. Il est prêt alors pour faire l'intégration d'une équation rencontrée par LAMÉ dans la théorie de la chaleur. Cette équation linéaire du second ordre renferme une constante arbitraire. LAMÉ en avait fait l'intégration pour certaines valeurs de cette constante; Hermite l'intègre dans tous les cas au moyen des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, et rattache à cette intégration la solution de quelques problèmes classiques de Mécanique, comme la recherche du mouvement d'un corps solide ayant un point fixe et n'étant soumis à aucune force, et celui du pendule conique. Le côté algébrique tient aussi une grande place dans ce Mémoire, et les

équations correspondant aux cas examinés par LAMÉ y sont l'objet d'une discussion approfondie. Ces études sur l'équation de LAMÉ ont ouvert la voie à bien des recherches analytiques; mais, ce qui intéressait le plus Hermite, ce sont les applications qu'on en pouvait faire à la Mécanique et à l'Astronomie. Le titre qu'il avait donné à son Mémoire est à cet égard significatif, ainsi que la sympathie avec laquelle il suivit les efforts de GYLDÉN pour introduire les fonctions elliptiques en Mécanique céleste.

J'ai déjà bien longuement parlé des travaux d'Hermite sur les fonctions elliptiques. Je ne puis m'arrêter sur toutes les questions qu'il a étudiées dans cette théorie. Que de Mémoires seraient encore à citer, renfermant des idées ingénieuses et originales sur lesquelles il revenait avec joie: décomposition des fonctions doublement périodiques de troisième espèce, à laquelle M. APPELL devait apporter des compléments très importants, développements des fonctions elliptiques suivant les puissances croissantes de la variable, recherches des valeurs asymptotiques de quelques fonctions numériques, et tant d'autres.

Hermite, comme KRONECKER, s'est toujours servi des notations de JACOBI. Il se trouvait trop vieux pour adopter les notations de WEIERSTRASS, quand elles ont commencé à se répandre. Il en reconnaissait sans doute l'avantage au point de vue de la théorie générale, et certains invariants mis en évidence étaient faits pour lui plaire. Mais je crois que la symétrie introduite le touchait peu, la dissymétrie entre les périodes se produisant nécessairement dans les applications. Rien n'aurait pu le décider à abandonner les fonctions θ et les admirables identités, si précieuses pour l'Arithmétique, dont la forme lui était familière depuis tant d'années.

V.

C'est en 1869 qu'Hermite fut nommé professeur à la Faculté des Sciences. Au début, il traita de la théorie des équations, mais à partir de 1875, abandonnant l'Algèbre dans ses Leçons, il se consacra au Calcul intégral et à la théorie des fonctions. Ceux qui l'ont entendu, et il y en a certainement parmi vous, garderont toujours le souvenir de cet enseignement incomparable. Quelles merveilleuses causeries, d'un ton grave que relevait par moments l'enthousiasme, où, à propos de la qustion la plus

élémentaire il faisait surgir tout d'un coup d'immenses horizons, et où à côté de la Science d'aujourd'hui on apercevait la Science de demain. Jamais professeur ne fut moins didactique, mais ne fut plus vivant. Je ne puis, dans mes souvenirs, le comparer qu'à Wurtz; sous des formes très différentes l'enseignement fut pour eux un apostolat, et j'ai connu des auditeurs peu familiers avec les sciences et égarés dans les amphitéâtres de l'illustre géomètre et de l'illustre chimiste, sortir stupéfaits de voir qu'une leçon d'Analyse et une leçon de Chimie pussent être si poignantes et si dramatiques. Quand Hermite parlait de la Science, il faisait songer à Pasteur, et il aurait pu faire sienne cette phrase qui revenait souvent sur les lèvres de son grand contemporain, que la Science se fait non seulement avec l'esprit mais aussi avec le cœur. C'est ce dont témoigne l'inépuisable dévouement d'Hermite pour ses élèves; que d'heures il a passées à correspondre avec des géomètres de tous pays, connus ou inconnus, lui soumettant leurs essais et sollicitant ses avis. Vrai directeur scientifique, il répondait à tous avec une exquise bienveillance, donnant sans compter son temps et ses idées, persuadé qu'un savant ne contribue pas seulement aux progrès de la Science par ses travaux personnels, mais aussi par les conseils donnés, particulièrement à ceux qui entrent dans la vie scientifique. Une manifestation grandiose devait montrer à Hermite, au soir de sa vie, qu'il n'avait pas eu affaire à des ingrats; beaucoup d'entre nous ont sans doute assisté à cette belle et touchante cérémonie du 24 décembre 1892, où a été fêté son soixante-dixième anniversaire.

L'enseignement d'Hermite à la Sorbonne a exercé une très grande influence. Ses cours ont été lithographiés et ont été lus et médités par tous les géomètres contemporains. Il ne craignait pas de s'arrêter sur les débuts du Calcul intégral, et il donnait à réfléchir à ses lecteurs sur les sujets les plus élémentaires. Ainsi une remarque immédiate sur l'expression de $\log\frac{x-a}{x-b}$ par une intégrale définie l'amène un jour à la notion de ce qu'il appelle une *coupure*, notion qu'il développe ensuite d'une manière générale. Les théories fondamentales de Cauchy relatives aux fonctions d'une variable complexe tenaient une grande place dans son cours. Vers 1880, un Mémoire de Weierstrass récemment paru appela vivement l'attention; les leçons d'Hermite firent connaître en France les idées du grand analyste allemand. Depuis vingt ans, tous les géomètres ont étudié dans ces leçons la théorie

des fonctions analytiques; les idées essentielles, dégagées de tout ce qui est accessoire, y sont mises en évidence avec un relief singulier. En même temps s'aperçoit l'esprit précis de l'algébriste que fut toujours Hermite. Il aimait certes les théorèmes généraux, mais à condition qu'on les appliquât ensuite à quelque question spéciale. Tous les géomètres n'ont pas à cet égard les mêmes besoins; il suffit à quelques-uns de jouir d'un bel énoncé général et il semble qu'ils craignent presque de gâter leur plaisir artistique par la pensée d'une application à un problème spécial. Il est heureux, je crois, que tous les esprits n'aient pas les mêmes tendances, mais Hermite sur ce point avait une opinion bien arrêtée. Aussi cherchait-il à illustrer par de nombreux exemples les propositions générales de Weierstrass et de Mittag-Leffler sur la théorie des fonctions. Les fonctions elliptiques lui donnaient un beau champ d'applications. Son cours lui était l'occasion de travaux portant toujours une marque personnelle. D'une année à l'autre, il étendait le cercle des questions traitées; dans les derniers temps de son enseignement, il s'était attaché particulièrement à la théorie des intégrales eulériennes. Outre les applications qu'il y pouvait faire des théorèmes généraux de l'Analyse, il se plaisait dans les transformations difficiles des intégrales définies, qu'il maniait avec un art consommé rappelant les grands géomètres de la première moitié du siècle dernier, art qui semble se perdre aujourd'hui. Des Mémoires élégants sur une extension de la formule de Stirling et sur la fonction $\log \Gamma(a)$ furent le fruit de ces nouvelles recherches.

Hermite, dans ses leçons, ne s'arrêtait pas à discuter les premiers principes de l'Analyse. Il pensait modestement que les études de philosophie mathématique, si en honneur aujourd'hui, devaient être de grande importance puisque tant d'esprits éminents s'y adonnent; mais, malgré toute sa bonne volonté, il ne pouvait arriver à s'y intéresser. La cause en était peut-être dans sa philosophie un peu mystique sur l'essence du nombre; il croyait que les nombres forment un monde ayant son existence propre en dehors de nous, monde dont nous pouvons saisir seulement ici bas quelques-unes des harmonies profondes. Dans l'antiquité il eût été platonicien, et au moyen âge, dans la longue querelle entre le réalisme et le nominalisme, il aurait suivi Guillaume de Champeaux avec les réalistes. Dans une sphère moins élevée, mais dans un ordre d'idées se rattachant à ce qui précède, il avait vu avec regrets les efforts faits depuis une vingtaine

d'années pour introduire l'extrême rigueur dans l'enseignement élémentaire. On lit, dans un article écrit quelques semaines avant sa mort et destiné à un journal d'enseignement: »L'admiration, a-t-on dit, est le principe du savoir, ...; je m'autoriserai de cette pensée pour exprimer le désir qu'on fasse la part plus large, pour les étudiants, aux choses simples et belles, qu'à l'extrême rigueur aujourd'hui si en honneur, mais bien peu attrayante, souvent même fatigante et sans grand profit pour le commençant qui n'en peut comprendre l'intérêt«. Toute la méthode d'enseignement d'Hermite tient en raccourci dans ces quelques lignes: personne plus que lui ne sut exciter l'admiration pour les choses simples et belles.

Arrivé au terme de cette leçon, je suis loin d'avoir énuméré tous les mémoires ou notes d'Hermite qui demanderaient une mention. Il faut au moins citer ses recherches sur la représentation analytique des substitutions, ses belles études sur les polynomes à deux variables qui généralisent les polynomes de LEGENDRE, sur l'interpolation, sur les nombres de BERNOULLI, sur les fonctions sphériques, etc.; toutes portant la trace de sa rare pénétration.

LAGRANGE vieillissant, à ce que raconte DELAMBRE, avait perdu le goût des Mathématiques, et son enthousiasme s'était éteint. Hermite fut plus heureux; les fatigues de l'âge ne ralentirent pas son activité intellectuelle, ni l'intérêt qu'il prenait aux choses de la pensée. Sa belle intelligence garda jusqu'à la fin toute sa vivacité; il continuait à suivre de près le mouvement scientifique contemporain. Sans doute, chose bien naturelle chez un vieillard de son âge, il avait à faire des réserves au sujet de certaines hardiesses de la pensée mathématique actuelle; mais, plus optimiste sur ce terrain qu'il ne l'était dans d'autres domaines, il aimait à espérer que de cette vie intense sortirait quelque chose de grand et de durable, et il entrevoyait un bel avenir pour la Science mathématique du XX^e^ siècle. Parfois il regrettait que la théorie des nombres fût peu cultivée en France, regret d'autant mieux justifié que la pénétration fatale de la théorie des nombres dans la théorie des fonctions donnera une grande force à ceux qui seront pénétrés des principes de l'Arithmétique supérieure, et que certaines recherches relatives à la fois à l'Arithmétique et à l'Analyse des fonctions pourraient donner, semble-t-il, dès aujourd'hui une fructueuse moisson. Il se rappelait qu'il n'aurait jamais pu écrire son Mémoire sur la transformation des fonctions abéliennes s'il n'avait été familier avec les questions arithmétiques, exemple de l'appui que se prêtent les diverses parties

de la Science et du danger qu'il y a, pour les chercheurs, à se cantonner dans des domaines spéciaux.

Dans ses dernières années, l'immense correspondance d'Hermite l'occupait de plus en plus. Il n'avait jamais aimé le monde, et il en redoutait les obligations qui ne sont souvent pour l'homme d'étude que de grandes pertes de temps. Toute son activité extérieure se concentrait dans de longues causeries épistolaires avec de lointains amis. Les Mathématiques en formaient une bonne part, mais aussi bien d'autres sujets, et entre deux pages consacrées aux fonctions elliptiques et aux nombres de Bernoulli venait s'intercaler une page sur la politique européenne. Ses lectures s'étendaient sur les sujets les plus variés, et son excellente mémoire retenait fidèlement tout ce qu'il avait lu. A côté du savant, il y avait chez Hermite un écrivain. Dans les Notices qu'il eut à écrire de temps à autre, son style grave, exempt de toutes recherches, laissait une impression profonde; plus d'une page dans sa correspondance mériterait d'être conservée, s'il était permis de la publier.

L'œuvre d'Hermite se trouve dispersée dans un grand nombre de journaux scientifiques français et étrangers; elle grandira encore quand elle se trouvera rassemblée et qu'on pourra ainsi mieux juger de sa belle unité. A peu d'exceptions près, les mémoires sont courts. La marche générale des idées y est toujours mise en évidence, mais, surtout dans la première partie de la carrière d'Hermite, la rédaction se présente sous une forme synthétique, et le soin d'établir de nombreuses propositions intermédiaires, dont l'énoncé seul est indiqué, est laissé à la charge du lecteur. Quel fructueux exercice que la lecture d'un de ces mémoires fondamentaux pour l'étudiant bien doué qui cherche à en rétablir tous les détails.

Le temps n'est pas encore venu, et d'ailleurs il ne m'appartient pas de porter un jugement sur l'œuvre d'Hermite. Certaines parties de cette œuvre sont aujourd'hui en pleine lumière et ont rendu son nom célèbre, d'autres seront dans l'avenir la source de belles découvertes et contribueront encore à sa renommée. Une impression peut toutefois se dégager de cette étude sommaire. Les Travaux les plus importants d'Hermite se rapportent aux fonctions elliptiques et abéliennes, aux formes algébriques et à la théorie des nombres; mais ces divers Travaux ne sont pas isolés et on éprouve un singulier embarras à les faire rentrer dans une classification qui, en Mathématiques comme ailleurs, est toujours insuffisante et provisoire. Les re-

cherches sur l'équation du cinquième degré appartiennent-elles à l'Algèbre ou à la Théorie des fonctions elliptiques, et le Mémoire sur la transformation des fonctions abéliennes relève-t-il de l'Arithmétique ou de la Theorie des fonctions? Si cependant, en restant dans les cadres habituels, on veut essayer de définir le génie d'Hermite, on peut dire que les points de vue arithmétique et algébrique prédominent dans son œuvre. C'est en Algèbre et en Arithmétique qu'il a été surtout un inventeur et un créateur. Avec Cayley et Sylvester, il a fondé la théorie des covariants des formes algébriques, et les admirables recherches, où il a introduit le continu dans le domaine du discontinu, lui assurent dans la Théorie des nombres, cette reine des Mathématiques, une place d'honneur à côté des deux grands géomètres, dont il aimait à ce dire le disciple, Gauss et Dirichlet.

DAS MAXIMALGESCHLECHT DER ALGEBRAISCHEN CURVEN IM R_r

VON

S. KANTOR

HALPHEN hat bekanntlich zuerst im 70. Bande der Comptes rendus de l'Académie de Sciences de Paris die Zahl $\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right]$, wo [. . .] die grösste im eingeklammerten Bruche enthaltene ganze Zahl bedeutet, als die Minimalzahl der scheinbaren Doppelpunkte der windschiefen Curve der Ordnung p bezeichnet. Daraus wurden dann Formeln für das Maximalgeschlecht und später auch für Curven im R_r hergeleitet.

Eine allgemeine in meiner Abh. Acta Math. Bd. 21. angewandte Schlussfolgerung gestattet, nicht nur einen Beweis des Halphen'schen Resultates, sondern auch ein entsprechendes Resultat für den R_r zu geben. Ich lege meinem hier zu gebenden Beweise aber noch deswegen ein besonderes Gewicht bei, weil er dazu führt, derartige Formeln, wie sie HALPHEN und seine Nachahmer (CASTELNUOVO, STURM) gegeben haben, Formeln mit dem unwissenschaftlichen Symbole [. . .] für eine grösste oder bei anderen für eine kleinste ganze Zahl, aus diesem Gebiete für immer zu beseitigen, und aber auch weil er die erste Methode enthält, mit deren Hilfe man auch Maximalgeschlechter für $M_2, M_3, \ldots, M_i$ im R_r berechnen kann. Auf diesen letzteren Punkt möge diesmal noch nicht eingegangen werden.

I.

Theorem. *Das Maximalgeschlecht, das eine algebraische Curve C_n im R_r haben kann, ohne einem niederen Raume anzugehören, ist*

$$p_n = \frac{(n-1)(n-r)}{2(r-1)} - \frac{(q-1)(q-r)}{2(r-1)}$$

wo q der um 1 verminderte kleinste Rest von n nach dem Divisor $r-1$ ist.

Dieser Ausdruck ist stets eine ganze Zahl. Er fällt durch den gleichen Bau der beiden Terme auf. Aus ihm schliessen wir, dass wenn

$$(q-1)(q-r) < 2(r-1),$$

das ist, wenn $r < 8$, man den durch den ersten Term dargestellten Bruch nur auf die nächste ganze Zahl zu ergänzen hat und dass, wenn $q = 1$, also $n - 1$ (und $n - r$) ein Vielfaches von $r - 1$ ist, der erste Term allein schon der Werth p_n ist. Also:

Corollar. Für alle Werthe von n, für welche $n - 1$ Vielfaches von $r - 1$ ist, ist

$$p_n = \frac{(n-1)(n-r)}{2(r-1)}$$

und für alle Werthe von $r < 8$ kann man symbolisch setzen (bei willkürlichem n)

$$p_n = \left[\frac{(n-1)(n-r)}{2(r-1)}\right]$$

gleich der kleinsten ganzen Zahl, welche nicht kleiner als der eingeklammerte Bruch ist.

Ich gebe nun in den nächsten Numern den Beweis des Theoremes.

II.

Eine Transformation im R_r, welche in der Form $x' = 1 : x_i$ geschrieben werden kann, also $r + 1$ Fundamentalpunkte 1. Art, sonst aber

nur Fundamental $-M_1$, $-M_2$, ..., $-M_{r-2}$ von höherer als der 1. Art (d. h. mit zugehörigen Abfalls $-M_{r-2}$ höchstens, nicht aber mit $-M_{r-1}$) besitzt, bezeichne ich als eine Reciprokaltransformation $(RT)_r$ im R_r. Durch Zusammensetzung einer willkürlichen Anzahl solcher Transformationen entstehen immer wieder nur Transformationen ohne Fundamental $-M_1$, ..., M_{r-2} 1. Art, also nur mit Fundamentalpunkten 1. Art und solchen Fundamental $-M_i$, welche eine nothwendige Consequenz der Fundamentalpunkte sind, und jede solche Transformation kann durch Zusammensetzung einer Reihe von $(RT)_r$ gewonnen werden.[1] Ich nenne sie Rec. tr. m. O., bezeichnet $(RT)_m$.[2]

Nun benutze ich die für den R_3 in Acta Math. Bd. 21. gemachte Schlussfolgerung, dass die homaloiden Curven dieser $(RT)_m$, dass sind die Curven, welche den Geraden des einen R_r durch die $(RT)_m$ entsprechen, nothwendig solche Curven sein müssen, welche das Geschlecht Null nur in Folge ihrer vielfachen Punkte, welche sie in den Fundamentalpunkten der $(RT)_m$ besitzen, aufgezwungen erhalten. Sie müssten also vermöge ihrer Entstehung als Schnittcurven von je $r-1$ M_{r-1} der m. Ordnung, wenn sie nicht ihre vielfachen Punkte hätten, das *maximale Geschlecht* haben, das für sie als algebraische Curven m. Ordnung im R_r möglich ist. Sei dieses p_m und seien die Vielfachheiten, welche die Curven in den Fundamentalpunkten besitzen, a_1, ..., a_σ. Jeder a_i-fache Punkt erniedrigt das Geschlecht der Curve um $a_i(a_i-1):2$, also besteht die Gleichung

$$(1) \qquad 2p_m - \sum a_i(a_i - 1) = 0.$$

Um diese allgemeinere und energischere Form der Anwendung des Princips aus Acta Math. Bd. 21. und also einen auf sehr breiten Grundlagen ruhenden Beweis zu geben, wäre uns die Auswerthung der beiden Summen $\sum a_i$, $\sum a_i^2$ nothwendig die in folgenden Weise geschehen kann.

[1] Diese Eigenschaft wird im unseren Beweise (IV., V.) nicht erfordert.

[2] Es kann wie aus der Abhandlung hervorgeht, geschehen, dass es mehrere der Art nach verschiedene Rec. tr. gleicher Ordnung m gebe.

III.

Jede Vielfachheit a_i ist gleich der Ordnung der dem Fundamentalpunkte entsprechenden Abfallsmannigfaltigkeit M_{r-1}. Die Summe der Ordnungen aller Abfallsmannigfaltigkeiten, wobei jede einzelne, weil sie Fundamentalpunkten 1. Art entsprechen, $(r-1)$-fach zu zählen ist,[1] ist gleich der Ordnung der Jacobi'schen Mannigfaltigkeit, also gleich $(r+1)(m-1)$, daher besteht die Gleichung

$$(r-1)\sum a_i = (r+1)(m-1). \tag{2}$$

Um $\sum a_i^2$ zu berechnen, bediene ich mich der »fundamentalen linearen Substitutionen«, welche nach meiner Abh. Crelles Journal, Bd. 114, und Acta Math., Bd. 21., jeder $(RT)_r$ zukommen, indem sie die Verwandlung der M_i $(i = 1, \ldots, r-1)$ durch die Transformation wenigstens arithmetisch vollständig enthalten. Die Substitution für die Verwandlung der M_1 durch die $(RT)_r$ ist (mit Beibehaltung der Schreibweise aus Acta Math., Bd. 21):

$$\begin{array}{llllll} n' & = rn - (r-1)\mathfrak{x}_1 - & & \ldots - (r-1)\mathfrak{x}_{r-1}, \\ \mathfrak{x}'_n & = n - & - \mathfrak{x}_2 & \ldots - & \mathfrak{x}_{r+1}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{x}'_{r+1} & = n - & \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 & \ldots - \mathfrak{x}_r. \end{array} \tag{3}$$

Diese Substitution lässt, wovon man sich bei der Einfachheit der Coefficienten leicht durch Ausrechnung überzeugt, die quadratische Form

$$n^2 - (r-1)\mathfrak{x}_1^2 - \ldots - (r-1)\mathfrak{x}_{r+1}^2 \tag{4}$$

invariant. Vermöge eines Schlusses, der seine Begründung in meinen ausführlichen Erläuterungen an jener Stelle findet, können wir behaupten, dass auch die zu $(RT)_m$ gehörigen fundamentalen linearen Substitutionen für die M_1, welche die Form

$$
\begin{aligned}
n' &= mn - b_1\mathfrak{x}_1 - \ldots - b_\sigma\mathfrak{x}_\sigma, \\
\mathfrak{x}'_1 &= a_1 n - a_{11}\mathfrak{x}_1 - \ldots - a_{1\sigma}\mathfrak{x}_\sigma, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{x}_\sigma &= a_\sigma n - a_{\sigma 1}\mathfrak{x}_1 - \ldots - a_{\sigma\sigma}\mathfrak{x}_\sigma,
\end{aligned} \tag{5}
$$

haben, die quadratische Form

$$n^2 - (r - 1)\sum_1^\sigma \mathfrak{x}_i^2 \tag{6}$$

invariant lassen. Aus dieser Invarianz rechnen wir dann durch Einsetzen der (5) in (6) sofort die Gleichung

$$(m^2 - 1) - (r - 1)\sum a_i^2 = 0 \tag{7}$$

und andererseits von neuem die Gleichung (2), welche so ein zweites Mal bewiesen ist.

Hiemit haben wir die Werthe von $\sum a_i$ und $\sum a_i^2$ und erhalten aus (1), (2), (7)

$$2p_m = \frac{(m - 1)(m - r)}{r - 1}. \tag{8}$$

Da in der Formel (2) $\sum a_i$ und in (7) $\sum a_i^2$ ganz nothwendig eine ganze Zahl ist, so gilt die Formel (8) bislang sicher nur dann, wenn die rechte Seite eine ganze Zahl ist, wenn also auch $m - 1 \equiv 0 \mod (r - 1)$, da die Differenz der beiden Factoren $m - 1$, $m - r$ eben $r - 1$ ist, aber überdies muss die rechte Seite $\equiv 0 \mod 2$ sein.

Ob dann (8) für *alle* solche Zahlen gelte, dies ist eine Frage, die erfordert, für jedes solche m eine $(RT)_m$ nachzuweisen. Dies ist bisher nur für $r = 3$ von mir in Acta Math. Bd. 21 geschehen.

IV.

Um dieser Frage aus dem Wege zu gehen, und auch um die Formel (8) leichter auf solche Werthe[1] von m auszudehnen, für welche die vorige

[1] Auch für $(RT)_m$ kann man ein dem in IV. durchzuführenden analoges Verfahren anlegen. Hatten die Transformirten der Geraden die Vielfachheiten $a_1, \ldots, a_\sigma$ in den

Congruenz nicht gilt, stelle ich den Beweis auf eine schmälere Basis, ohne dass er deshalb an Tragweite einbüsste.

Ich benütze nur die Rec. tr. $(RT)_r$ und aber nicht nur die Transformirten der Geraden sondern die Transformirten aller Curven m. Ordnung. Diese Transformirten haben den Singularitätencomplex

$$(9) \qquad \mathfrak{n} = nr\,,\ \mathfrak{x}_1 = n_1\,,\ \ldots\,,\ \mathfrak{x}_{r+1} = n\,.$$

Sie müssen dasselbe Geschlecht haben, wie die Curven der Ordnung n, deren Transformirte sie sind. Dann aber gilt wieder für sie derselbe Schluss wie für die Transformirten der Geraden (homaloidalen Curven), dass sie sämmtlich dieses Geschlecht nur durch die vielfachen Punkte aufgezwungen erhalten und dass sie also ohne diese Verminderung, welche $(r+1)n(n-1):2$ beträgt, das Maximalgeschlecht, das für ihre Ordnung nr im R_r möglich ist, haben müssten. Das Geschlecht, das sie nun wirklich haben, ist sogleich das »Geschlecht der Curven n. Ordnung«, nämlich *aller* im R_r (unbestimmt welcher) und es ist selbstverständlich, dass sich darunter auch Curven vom Maximalgeschlechte finden; also kann das Geschlecht der allgemeinen Transformirten C_{nr} nicht kleiner und aber es kann gewiss auch nicht grösser sein als das Maximalgeschlecht der C_n im R_r, das ist als p_n, daher:

$$(10) \qquad 2p_{nr} - 2p_n = (r+1)n(n-1).$$

Diese Formel kann sofort verallgemeinert werden, wenn wir C_n benützen, welche durch b Fundamentalpunkte von $(RT)_r$ gehen. Ihre Transformirten haben

$$(11) \quad \mathfrak{n} = nr - b(r-1),\quad \mathfrak{x}_1 = \ldots = \mathfrak{x}_{r-b+1} = n-b,\quad \mathfrak{x}_{r-b+1} = \ldots = \mathfrak{x}_{r+1} = n-b+1$$

Fundamentalpunkten, so haben die Transformirten der C_n die Vielfachheiten $na_1, \ldots, na_\sigma$ in jenen Punkten und die Ordnung mn. Sie müssen dasselbe Geschlecht haben, wie die Curven C_n und indem wir denselben Schluss wie im Anfange von IV. anwenden, können wir sagen, dass dieses Geschlecht das Maximalgeschlecht der C_n sein müsse. Also ist

$$2p_{mn} - 2p_n = \sum na_i(na_i - 1) = n^2\sum a_i^2 - n\sum a_i$$

und durch Einsetzung der in III. gefundenen Werthe

$$p_{mn} - p_n = \frac{(nm-1)(nm-r)}{2} - \frac{(n-1)(n-r)}{2}$$

eine theils mehr, theils weniger allgemeine Gleichung als (14).

und es folgt daraus durch denselben Schluss wie soeben die Formel

$$(12) \quad 2p_{nr-b(r-1)} - 2p_n = (r+1-b)(n-b)(n-b-1) + (n-b+1)(n-b)b,$$

wobei der erste Term rechts von den $r+1-b$ je $(n-b)$-fachen, der zweite von den b je $(n-b+1)$-fachen Punkten herrührt.

Es ist nun wirklich merkwürdig zu sehen, wie durch eine einfache algebraische Umformung die rechte Seite von (12) den Werth annimmt

$$(13) \quad \frac{(nr-b(r-1)-1)(nr-b(r-1)-r)}{r-1} - \frac{(n-1)(n-r)}{r-1}.$$

Wir setzen $nr - b(r-1) = n_1$ und erhalten

$$(14) \quad 2p_{n_1} - 2p_n = \frac{(n_1-1)(n_1-r)}{r-1} - \frac{(n-1)(n-r)}{r-1}.$$

Hier ist zu bemerken, dass in dieser unbedingten Gleichheit die Differenz rechts stets eine ganze Zahl ist, dass aber die beiden Terme einzeln, in welche der Ausdruck (14) gespalten erscheint, nicht ganze Zahlen sein müssen. Es darf also nicht aus (14) auf: $p_n =$ dem einen Terme geschlossen werden.

V.

Wir hatten $n_1 = nr - b(r-1) = (n-b)r + b$, mit b von 0 bis $r+1$, da $r+1$ Fundamentalpunkte vorhanden sind, dagegen $n > 0$. Aber es genügt für die Berechnung aller p_{n_1}, das b stets nur bis $r-1$ zu nehmen; denn ist $b = r$, dann entsteht n_1 auch als $(n-\beta)r$, wo $\beta = r-1$, und ist $b = r+1$, dann entsteht n_1 auch als $(n-\beta)\,r+1$, wo $\beta = r-1$.

Ist also eine Zahl n_σ vorgelegt, für welche p_{n_σ} zu berechnen ist, so stelle man zunächst dar $n_\sigma = g_{\sigma-1}r + q_{\sigma-1}$, wo $q_{\sigma-1} < r$. Dann kann man (14) auf n_σ anwenden, wenn man dort $g_{\sigma-1} + q_{\sigma-1}$ für n nimmt. Aber es ist $n_\sigma = g_{\sigma-1}(r-1) + n_{\sigma-1}$, wenn $g_{\sigma-1} + q_{\sigma-1} = n_{\sigma-1}$ gesetzt ist, also $g_{\sigma-1} + q_{\sigma-1} < n_\sigma$. Wir wenden nun auf $n_{\sigma-1}$ dieselbe Zerlegung an und setzen so fort, wodurch wir eine Succession von Zahlen $n_\sigma, n_{\sigma-1}, \ldots, n_1, n$ erhalten, deren letzte sicherlich $\leq r-1$ sein wird. Es war nun jedesmal

$$(15) \quad 2p_{n_i} - 2p_{n_{i-1}} = \frac{(n_i-1)(n_i-r)}{r-1} - \frac{(n_{i-1}-1)(n_{i-1}-r)}{r-1}$$

$$i = 1, \ldots, \sigma$$

und die Addition aller Gleichungen (15) liefert

$$(16) \qquad p_{n_\sigma} - p_n = \frac{(n_\sigma - 1)(n_\sigma - r)}{2(r-1)} - \frac{(n-1)(n-r)}{2(r-1)}$$

mit $n < r$.

Wir kennen aber a priori die Werthe $p_1 = p_2 = \ldots = p_{r-1} = p_r = 0$. Daher ist in (16) $p_n = 0$ einzusetzen.

Die Beziehung von n zu n_σ ist aus den Gleichungen

$$n_\sigma = g_{\sigma-1} r + q_{\sigma-1}, \quad n_{\sigma-1} = g_{\sigma-2} r + q_{\sigma-2}, \ \ldots, \ n_2 = g_1 r + q_1, \quad n_1 = gr + q,$$

ferner

$$n_{\sigma-1} = g_{\sigma-1} + q_{\sigma-1}, \quad n_{\sigma-2} = g_{\sigma-2} + q_{\sigma-2}, \ \ldots, \ n_1 = g_1 + q_1, \quad n = g + q$$

und

$$n_\sigma = g_{\sigma-1}(r-1) + n_{\sigma-1}, \quad n_{\sigma-1} = g_{\sigma-2}(r-1) + n_{\sigma-2}, \ \ldots, \ n_2 = g_1(r-1) + n_1,$$
$$n_1 = g(r-1) + n$$

sofort zu erkennen. n aus (16) ist der um 1 verkleinerte Rest, der bei der Division $n_\sigma : r - 1$ verbleibt.

Werden die Bezeichnungen n_σ, n in (16) mit n, q vertauscht, so entsteht die Formel[1] des zu beweisenden Theoremes.

Rom, den 28. Januar 1900.

---

[1] Die von Castelnuovo und Bertini (1889, 1890) auf total verschiedene Art bewiesene Formel

$$(\alpha) \qquad \chi\left\{n - \frac{r+1}{2} - \chi\frac{r-1}{2}\right\}$$

wo $\chi = \left[\frac{n-r}{r-1}\right]$ die kleinste ganze Zahl ist, welche nicht unterhalb des eingeklammerten Bruches liegt, kann durch einige Umformungen in meine obige Formel verwandelt werden.

Man setze präciser $\chi = \frac{n-r}{r-1} + \frac{q_1}{r-1}$, wo q_1 der Rest der Division $(n-r):(r-1)$ ist, so entsteht aus dieser Formel (α) die andere

$$\frac{(n-1)(n-r)}{2(r-1)} - \frac{q_1(r-1-q_1)}{2(r-1)}.$$

Wenn man aber jetzt $q_1 = q - 1$ hier einsetzen will, um meine Formel zu erhalten, muss man gleichzeitig die Reste aus dem Systeme $0, 1, \ldots, r-2$, in dem q_1 zu nehmen war, um 1 verkleinern. Hiedurch wird der Definition für χ Rechnung getragen.

SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET LA GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DE DIRICHLET.

(Extrait d'une lettre de M. Emile Picard à M. Mittag-Leffler.)

Mon cher ami.

Je suis revenu dans mon cours, au printemps de 1899, sur mes anciennes recherches relatives à l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du type elliptique au moyen des valeurs données de l'intégrale sur un contour fermé, et j'ai publié un résumé très succinct de ces leçons dans les Comptes Rendus de l'académie des Sciences (19 juin 1899 et 19 février 1900). Mon principal objet dans ces leçons était de bien mettre en évidence les hypothèses nécessaires pour la complète rigueur des raisonnements. Le premier problème fondamental est, comme vous vous le rappelez, l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu \tag{I}$$

quand on se donne les valeurs de l'intégrale supposée continue sur un contour *suffisamment petit*, contour que je supposerai *régulièrement analytique*. Si on suppose seulement relativement aux fonctions a, b, c de x et y, qu'elles sont continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre dans la région considérée du plan, il est nécessaire pour la complète rigueur des raisonnements tels que je les ai présentés dans mon mémoire du Journal de mathématiques en 1890, de supposer que la succession des valeurs données sur le contour admet *des dérivées des trois premiers ordres;* c'est ce que j'ai indiqué dans la première des notes citées ci dessus,

et ce qui se trouve développé dans un petit mémoire inséré dans le premier fascicule du Journal de mathématiques (1900). Aussi je ne m'occuperai pas de ce cas, et je vais me placer ici dans le cas où les coefficients a, b, c sont des fonctions *analytiques* réelles des deux variables réelles x et y. C'est un cas que j'ai déjà examiné dans un mémoire du Journal de l'Ecole Polytechnique en 1890, et je ne vais d'abord que reprendre, avec plus de détails, la méthode que j'ai suivie alors et qui m'a permis notamment de démontrer ce résultat intéressant que *toutes les intégrales de l'équation* (I) *sont analytiques.* Une des conclusions, auxquelles j'arriverai encore, relativement aux valeurs données sur le contour, est que l'on peut supposer seulement pour traiter le problème proposé que *leur ensemble forme une fonction continue.* J'ajouterai aussi une remarque importante concernant une méthode de prolongement dont je me suis occupé à deux reprises différentes (Journal de mathématiques, 1896 et 1898). J'ai donné un résumé de cette étude dans les Comptes-Rendus (23 avril, 1900).

1. Considérons d'abord l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi(x, y), \tag{1}$$

en supposant que $\varphi(x, y)$ soit une fonction analytique de x et y. On la développe en série trigonométrique, en posant

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

et on a ainsi

$$\varphi(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos\nu\theta + b_\nu \sin\nu\theta).$$

Les coefficients a_ν et b_ν sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de r, commençant par un terme en r^ν; d'ailleurs dans ces séries les exposants des puissances de r sont de même parité. Soit donc

$$a_\nu = \left(\frac{r}{R}\right)^\nu \left[\alpha_{0\nu} + \alpha_{1\nu}\frac{r^2}{R^2} + \ldots + \alpha_{m\nu}\frac{r^{2m}}{R^{2m}} + \ldots\right].$$

Plaçons-nous un moment à un point de vue purement formel, c'est à dire ne nous préoccupons pas de la question de convergence, et cherchons

l'intégrale de l'équation (1), continue dans le cercle de rayon R, et s'annulant sur la circonférence. En posant

$$u(x\,,\,y) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (p_\nu \cos \nu\theta + q_\nu \sin \nu\theta),$$

p_ν sera déterminé par l'équation

$$\frac{d^2 p_\nu}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dp_\nu}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} p_\nu = a_\nu$$

avec la condition que p_ν soit finie pour $r = 0$, et s'annule pour $r = R$.

La valeur de p_ν se trouve par un calcul facile, et on obtient

$$2\nu p_\nu = r^\nu \int_R^r \frac{a_\nu}{r^{\nu-1}} dr - \frac{1}{r^\nu} \int_0^r a_\nu r^{\nu+1} dr + \frac{r^\nu}{R^{2\nu}} \int_0^R a_\nu r^{\nu+1} dr\,.$$

En remplaçant a_ν par sa valeur, on trouve de suite

$$p_\nu = R^2 . \frac{r^\nu}{R^\nu} \sum_{m=0}^{m=\infty} \alpha_{m,\nu} \left(\frac{r^{2m+2}}{R^{2m+2}} - 1 \right) \frac{1}{(2m+2)(2m+2\nu+2)}$$

et cette formule subsiste pour $\nu = 0$.

2. Ces préliminaires posés, envisageons l'équation

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu$$

où a, b, c sont des fonctions analytiques de x et y.

Voici tout d'abord quelques remarques immédiates sur les développements de a, b, c. D'après la définition même que nous donnons des fonctions analytiques réelles de deux variables réelles x et y, nous aurons certainement pour le développement de $a(x\,,\,y)$ en série trigonométrique

$$a = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (P_\nu \cos \nu\theta + Q_\nu \sin \nu\theta)$$

où P_ν et Q_ν sont des séries de la forme

$$P_\nu = r^\nu[\alpha_{0,\nu} + \alpha_{1,\nu} r^2 + \ldots + \alpha_{m,\nu} r^{2m} + \ldots]$$

et si l'on pose $A_{m,\nu} = |\alpha_{m,\nu}|$ la série

$$\sum r^{\nu}[A_{0,\nu} + A_{1,\nu} r^2 + \ldots + A_{m,\nu} r^{2m} + \ldots]$$

est convergente pour r assez petit, soit pour $r \leq \rho$. Il en résulte d'abord que le produit

$$A_{m,\nu} \cdot \rho^{\nu+2m}$$

est moindre qu'un nombre fixe. Ecrivons alors P_ν sous la forme

$$P_\nu = \left(\frac{r}{R}\right)^{\nu} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{\nu} \left[\alpha_{0,\nu} \cdot \rho^{\nu} + \ldots + \alpha_{m,\nu} \rho^{2m+\nu} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2m} \left(\frac{r}{R}\right)^{2m} + \ldots\right].$$

Or donnons un nombre ε compris entre zéro et un, et qui va rester fixe dans toute la suite des calculs. Si $\frac{R}{\rho}$ est assez petit, on aura pour toutes valeurs de m et ν

$$\left(\frac{R}{\rho}\right)^{\nu} < \frac{\varepsilon^{2\nu}}{(\nu + 1)^3} \quad \text{et} \quad \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2m} < \frac{\varepsilon^{2m}}{(m + 1)^3}.$$

Il suffira évidemment que

$$\frac{R}{\rho} < \frac{\varepsilon^2}{(m + 1)^{\frac{3}{m}}},$$

pour toute valeur de l'entier positif m, ce qui entraîne

$$\frac{R}{\rho} < \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Par suite, en représentant P_ν par l'expression

$$(2) \qquad P_\nu = \left(\frac{r}{R}\right)^{\nu} \left[p_{0,\nu} + p_{1,\nu} \frac{r^2}{R^2} + \ldots + p_{m,\nu} \frac{r^{2m}}{R^{2m}} + \ldots\right]$$

on aura

$$(3) \qquad |p_{m,\nu}| < H \cdot \frac{\varepsilon^{2m}}{(m + 1)^3} \cdot \frac{\varepsilon^{2\nu}}{(\nu + 1)^3}$$

H étant un nombre fixe, c'est à dire indépendant de m, ν et R. Nous supposons donc, comme il est permis d'après ce qui précède, que dans le développement trigonométrique de la fonction $a(x, y)$, les coefficients

P_ν et Q_ν soient réprésentés par des développements de la forme (2) avec les conditions (3).

3. Revenons maintenant à l'équation (E) et supposons que u soit une fonction de x et y susceptible d'être mise sous la forme

$$u = \sum a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta$$

où

$$a_\nu = \left(\frac{r}{R}\right)^\nu \left[\alpha_{0,\nu} + \alpha_{1,\nu}\frac{r^2}{R^2} + \ldots + \alpha_{m,\nu}\frac{r^{2m}}{R^{2m}} + \ldots\right]$$

et supposons d'abord que l'on ait

$$|\alpha_{m,\nu}| < \frac{K\varepsilon^{2m}}{(\nu + 1)^2},$$

K étant un nombre fixe indépendant de m, ν et R, et ε étant toujours le nombre inférieur à *un* considéré plus haut.

Cherchons quelle sera la forme du second membre de l'équation (E). En faisant le calcul de $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, on trouve facilement comme coefficient de $\cos \nu\theta$ provenant de la partie $\sum a_\nu \cos \nu\theta$

$$\left(\frac{r}{R}\right)^\nu \times \frac{1}{2R} \times \left[\begin{array}{l} 2\alpha_{1,\nu-1} + \ldots + 2m\alpha_{m,\nu-1}\dfrac{r^{2m-2}}{R^{2m-2}} + \ldots \\ + 2\alpha_{1,\nu+1}\dfrac{r^2}{R^2} + \ldots + 2m\alpha_{m,\nu+1}\dfrac{r^{2m}}{R^{2m}} + \\ + 2(\nu + 1)\left(\alpha_{0,\nu+1} + \ldots + \alpha_{m,\nu+1}\dfrac{r^{2m}}{R^{2m}} + \ldots\right) \end{array}\right]$$

et une expression analogue pour la seconde partie.

Ecrivons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum (A_\nu \cos \nu\theta + B_\nu \sin \nu\theta).$$

Il résulte des développements précédents que l'on a pour A_ν et B_ν des développements de la forme

$$\left(\frac{r}{R}\right)^\nu \left[\beta_{0,\nu} + \ldots + \beta_{m,\nu}\frac{r^{2m}}{R^{2m}} + \ldots\right]$$

avec des inégalités de la forme

$$|\beta_{m,\nu}| < \frac{K.\theta.(m+1)}{R(\nu+1)}\varepsilon^{2m},$$

θ étant un nombre fixe, indépendant de m, ν, K et R.

Il faut maintenant former le produit

$$a\frac{\partial u}{\partial x}$$

et avoir une limite des coefficients de $\cos\nu\theta$ et $\sin\nu\theta$ dans ce produit. C'est ce que l'on obtiendra, en mettant d'abord à part le facteur indépendant de ν

$$\frac{KH\theta}{R}\left[1+2\varepsilon^2\frac{r^2}{R^2}+\ldots+(m+1)\varepsilon^{2m}\frac{r^{2m}}{R^{2m}}+\ldots\right]$$

$$\times\left[1+\frac{\varepsilon^2}{2^3}\frac{r^2}{R^2}+\ldots+\frac{\varepsilon^{2m}}{(m+1)^3}\frac{r^{2m}}{R^{2m}}+\ldots\right]$$

et faisant le produit

$$(\alpha)\qquad \left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{\varepsilon^{2\lambda}}{(\lambda+1)^3}\left(\frac{r}{R}\right)^{\lambda}\cos\lambda\theta\right]\times\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{1}{(\lambda+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^{\lambda}\cos\lambda\theta\right]$$

et les produits analogues. Or dans le produit précédent, il est facile de trouver le coefficient de $\cos\nu\theta$. Ce coefficient provient de termes de différentes natures. Tout d'abord en multipliant

$$\frac{1}{\nu+h+1}\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu+h}\cos(\nu+h)\theta \quad \text{par} \quad \frac{\varepsilon^{2h}}{(h+1)^3}\left(\frac{r}{R}\right)^{h}\cos h\theta$$

on a un terme en $\cos\nu\theta$, et la somme de ces termes a pour coefficient

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\sum_{h=0}^{h=\infty}\frac{1}{\nu+h+1}\cdot\frac{\varepsilon^{2h}}{(h+1)^3}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{2h}.$$

En second lieu, on aura encore un terme en $\cos\nu\theta$, en multipliant

$$\frac{1}{h+1}\left(\frac{r}{R}\right)^{h}\cos h\theta \quad \text{par} \quad \frac{\varepsilon^{2(\nu+h)}}{(\nu+h+1)^3}\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu+h}\cos(\nu+h)\theta.$$

et la somme de ces termes a pour coefficients

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\varepsilon^{2\nu}\cdot\sum_{h=0}^{h=\infty}\frac{1}{h+1}\cdot\frac{\varepsilon^{2h}}{(\nu+h+1)^3}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{2h}.$$

On a encore deux autres types de terme en $\cos\nu\theta$; le premier provient de la multiplication de

$$\frac{1}{\nu-h+1}\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu-h}\cos(\nu-h)\theta \quad \text{par} \quad \frac{\varepsilon^{2h}}{(h+1)^3}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{h}\cos h\theta, \qquad (0<h<\nu)$$

ce qui donne un coefficient

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\cdot\sum_{h=0}^{h}\frac{1}{\nu-h+1}\cdot\frac{\varepsilon^{2h}}{(h+1)^3};$$

et de la même façon, le produit provenant de la multiplication de

$$\frac{1}{h+1}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{h}\cos h\theta \quad \text{par} \quad \frac{\varepsilon^{2(\nu-h)}}{(\nu-h+1)^3}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu-h}\cos(\nu-h)\theta, \qquad (0\leq h\leq\nu)$$

conduit au coefficient

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\cdot\sum_{h=0}^{h=\nu}\frac{1}{h+1}\cdot\frac{\varepsilon^{2(\nu-h)}}{(\nu-h+1)^3}.$$

On voit alors immédiatement, d'après la forme de ces termes, que le produit (α) étant mis sous la forme

$$\sum S_\nu\cos\nu\theta+T_\nu\sin\nu\theta$$

où S_ν et T_ν ont la forme

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\left[S_{0\nu}+S_{1\nu}\frac{r^2}{R^2}+\ldots+S_{m\nu}\frac{r^{2m}}{R^{2m}}+\ldots\right]$$

on aura

$$|S_{m\nu}|<\frac{H'.\,\varepsilon^{2m}}{(\nu+1)(m+1)^3},$$

H' étant une constante purement numérique indépendante de m et ν.

Donc enfin dans

$$a\frac{\partial u}{\partial x}$$

le coefficient de $\cos\nu\theta$ sera égal à $\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}$ multiplié par une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{r}{R}$; désignons ce coefficient par

$$(4)\qquad \left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\left[\gamma_{0\nu}+\ldots+\gamma_{m\nu}\frac{r^{2m}}{R^{2m}}+\ldots\right].$$

La valeur absolue de $\gamma_{m\nu}$ sera moindre que le coefficient de $\left(\frac{r}{R}\right)^{2m}$ dans le produit

$$\frac{KHH'\theta}{R\,\nu+1}\left[1+2\varepsilon^2\frac{r^2}{R^2}+\ldots+(m+1)\varepsilon^{2m}\frac{r^{2m}}{R^{2m}}+\ldots\right]$$
$$\times\left[1+\frac{\varepsilon^2}{2^3}\cdot\frac{r^2}{R^2}+\ldots+\frac{\varepsilon^{2m}}{(m+1)^3}\cdot\frac{r^{2m}}{R^{2m}}+\ldots\right]^2.$$

On en conclut facilement que

$$|\gamma_{m\nu}|<\frac{KHH'H''(m+1)}{R(\nu+1)}\varepsilon^{2m}, \tag{5}$$

H'' étant encore un nombre fixe.

Dans *le second membre de l'équation* (E) *développé en série trigonométrique, nous pouvons donc dire que les coefficients de* $\cos\nu\theta$ *et* $\sin\nu\theta$ *sont de la forme* (4) *avec les conditions* (5).

4. En se reportant au § 1, nous avons maintenant immédiatement l'intégrale U de l'équation (E) s'annulant sur le cercle de rayon R.

En posant

$$U=\sum p_\nu\cos\nu\theta+q_\nu\sin\nu\theta$$

et

$$p_\nu=\frac{r^\nu}{R^\nu}\left(\delta_{0\nu}+\ldots+\delta_{m\nu}\frac{r^{2m}}{R^{2m}}+\ldots\right)$$

il suffit de se reporter au § 1 et à l'inégalité (5) pour voir que

$$|\delta_{m\nu}|<\frac{KHH'H''H'''R}{(\nu+1)^2}\varepsilon^{2m}=\frac{K\eta R}{(\nu+1)^2}\varepsilon^{2m}$$

η étant un nombre fixe, indépendant de m, ν, K et R. Relativement à la convergence sur le bord il n'y a aucune difficulté à cause du dénominateur $(\nu+1)^2$. *Nous concluons donc de là, qu'en passant des* α, *relatifs au développement de* u, *pour lesquels on avait*

$$|\alpha_{m\nu}|<\frac{K}{(\nu+1)^2}\varepsilon^{2m}$$

aux δ *qui se rapportent à* U, *il suffit de remplacer* K *par* $K\eta R$.

5. Reprenons les calculs du § 3, en supposant que l'on ait

$$|\alpha_{m\nu}| < K\varepsilon^{2m},$$

K étant un nombre fixe. En suivant le développement du calcul et employant les mêmes notations, on aura tout d'abord

$$|\beta_{m\nu}| < \frac{K.\Theta.(m+1)(\nu+1)\varepsilon^{2m}}{R}.$$

Le produit (α) sera remplacé ici par

$$\left|\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\varepsilon^{2\lambda}}{(\lambda+1)^3}\left(\frac{r}{R}\right)^{\lambda}\cos\lambda\theta\right| \times \left|\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu}(\lambda+1)\left(\frac{r}{R}\right)^{\lambda}\cos\lambda\theta\right|$$

et l'on aura

$$|S_{m\nu}| < \frac{H'.(\nu+1)\varepsilon^{2m}}{(m+1)^2}.$$

Enfin $a\dfrac{\partial u}{\partial x}$ étant mis sous la forme trigonométrique, les coefficients de $\cos\nu\theta$ et $\sin\nu\theta$ seront de la forme

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\left[\gamma_{0\nu} + \ldots + \gamma_{m\nu}\frac{r^{2m}}{R^{2m}} + \ldots\right],$$

avec les inégalités

$$|\gamma_{m\nu}| < \frac{K.HH'H''(m+1)(\nu+1)}{R}\varepsilon^{2m}.$$

Si on passe enfin à U, on aura:

$$|\delta_{m\nu}| < K.\eta R.\varepsilon^{2m},$$

η étant une quantité fixe, indépendante de m, ν, K et R.

6. Nous pouvons maintenant effectuer l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu$$

en procédant par approximations successives.

Nous formons, suivant la méthode dont je fais constamment usage, les équations

$$\Delta u_1 = 0,$$

$$\Delta u_2 = a\frac{\partial u_1}{\partial x} + b\frac{\partial u_1}{\partial y} + cu_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta u_n = a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + cu_{n-1}.$$

On intègre la première équation, avec la condition que u_1 prenne sur la circonférence C de rayon R une succession continue de valeurs formant une fonction $f(\theta)$ de l'argument θ ayant des dérivées continues des deux premiers ordres, et tous les autres u s'annulent sur C. Alors

$$u_1 = \sum a_\nu \cos\nu\theta + b_\nu \sin\nu\theta$$

où

$$a_\nu = \left(\frac{r}{R}\right)^\nu A_\nu, \qquad b_\nu = \left(\frac{r}{R}\right)^\nu B_\nu.$$

où A_ν et B_ν sont les intégrales classiques de Fourier relatives à la fonction $f(\theta)$. On a donc, d'après les hypothèses faites sur $f(\theta)$,

$$|A| < \frac{K}{(\nu+1)^2}, \qquad |B| < \frac{K}{(\nu+1)^2},$$

K étant fixe. Par suite, avec nos notations de plus haut, nous pouvons écrire

$$a_\nu = \left(\frac{r}{R}\right)^\nu \left[\alpha_{0\nu} + \ldots + \alpha_{m,\nu}\frac{r^{2m}}{R^{2m}} + \ldots\right],$$

tous les α étant nuls sauf le premier, et on a

$$|\alpha_{m,\nu}| < \frac{K\varepsilon_{2m}}{(\nu+1)^2}.$$

Si alors on intègre la seconde équation avec la condition que u_2 soit nul sur le bord, on aura en posant, comme plus haut,

$$u_2 = \sum(p_\nu \cos\nu\theta + q_\nu \sin\nu\theta)$$

où p_ν et q_ν sont de la forme

$$\frac{r^\nu}{R^\nu}\left|\delta_{0\nu}+\ldots+\delta_{m,\nu}\frac{r^{2m}}{R^{2m}}+\ldots\right|$$

avec les inégalités

$$|\delta_{m,\nu}|<\frac{K.\eta R}{(\nu+1)^2}\varepsilon^{2m}.$$

En passant de u_2 à u_3, on aura de même des coefficients ayant pour limites supérieures de leurs valeurs absolues

$$\frac{K.(\eta R)^2}{(\nu+1)^2}\varepsilon^{2m}$$

et pour u_n

$$\frac{K.(\eta R)^{n-1}}{(\nu+1)^2}\varepsilon^{2m}.$$

La convergence de la série

$$U=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

est alors manifeste *si R est assez petit pour que $\eta R<1$*. On voit aussi immédiatement que les séries dérivées premières et secondes des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ convergent à *l'intérieur* de C, et il en résulte que la fonction U satisfait à l'équation

$$\Delta U=a\frac{\partial U}{\partial x}+b\frac{\partial U}{\partial y}+cU.$$

De là résulte aussi que l'intégrale U est une fonction analytique de x et y; tout ceci reproduit simplement, mais en précisant davantage et en entrant plus dans le détail de la formation des termes, la démonstration que nous avons donnée autrefois (Journal de l'École Polytechnique, 1890) de ce théorème: *Toute intégrale U de l'équation précédente, bien déterminée et continue dans une certaine région ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, est une fonction analytique.*

7. Approfondissons davantage encore les propriétés de l'intégrale U prenant sur la circonférence C de rayon assez petit les valeurs $f(\theta)$. Nous allons montrer que *dans toute aire intérieure au cercle C, les valeurs*

absolues des dérivées premières et secondes de U sont limitées en fonction de la valeur absolue maxima de $f(\theta)$. Nous utiliserons à cet effet les résultats obtenus au § 5. Nous avons, pour u_1, avec les notations du paragraphe précédent

$$|\alpha_{m,\nu}| < 2M.\varepsilon^{2m} \qquad (M = \text{maximum de } |f(\theta)|)$$

car A_ν et B_ν ont des valeurs absolues inférieures à $2M$.

Donc, en passant de u_1 à u_2, on a

$$|\delta_{m,\nu}| < 2M.\eta R.\varepsilon^{2m}$$

et ainsi de suite. Il est alors facile d'avoir une limite supérieure des dérivées premières et secondes de u pour

$$r \leq R.\vartheta$$

ϑ étant un nombre fixe d'ailleurs quelconque inférieur à *un*. Les séries formées avec les valeurs absolues de ces dérivées seront manifestement, dans l'hypothèse toujours supposée $\eta R < 1$, limitées en fonction de M; c'est bien le théorème que nous voulions établir. Donc dans une aire Γ *intérieure* à C, nous avons les valeurs absolues des dérivées premières et secondes de U inférieures à $\lambda.M$, λ étant un nombre indépendant de $f(\theta)$. L'intégrale U est limitée aussi en valeur absolue en fonction de M *dans le cercle C tout entier*, et non pas seulement comme ses dérivées dans une aire intérieure à C. Pour le montrer, nous n'avons qu'à remarquer que si R est assez petit, on peut avoir une intégrale z de l'équation restant toujours positive, et différente de zéro à l'intérieur de la circonférence C et sur la circonférence même. Si l'on pose alors

$$U = zV,$$

on aura pour V une équation de la forme

$$\Delta V = a_1 \frac{\partial V}{\partial x} + b_1 \frac{\partial V}{\partial y},$$

mais nous savons qu'une intégrale de cette équation ne peut avoir dans C ni maximum ni minimum; par suite dans C

$$|V| < M_1$$

M_1 désignant le maximum de la valeur absolue de V sur la circonférence C. Or

$$V = \frac{U}{z},$$

donc si m désigne le minimum de $|z|$ sur C, on a

$$M_1 < \frac{M}{m}$$

et, par suite, dans C,

$$|U| < \frac{M}{m} z < \frac{M}{m} m_1$$

m_1 désignant le maximum de $|z|$ dans C. *Il résulte donc de là que l'on a*

$$|U| < \mu . M, \qquad \text{(dans } C\text{)}$$

μ étant un nombre fixe, indépendant de la fonction $f(\theta)$

8. Nous avons précédemment (§ 6) effectué l'intégration de l'équation

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu$$

pour un cercle C de rayon suffisamment petit, à l'aide des valeurs données $f(\theta)$ sur la circonférence, en supposant que $f(\theta)$ ait des dérivées des deux premiers ordres.

Prenons maintenant une fonction continue périodique quelconque $f(\theta)$ de période 2π, et proposons nous d'effectuer l'intégration dans ce cas.

On sait que la fonction $f(\theta)$ peut être développée en une série

$$f(\theta) = f_1(\theta) + f_2(\theta) + \ldots + f_n(\theta) + \ldots$$

les $f_i(\theta)$ étant des suites *limitées* de Fourier, et cela de telle façon que

$$|f_n(\theta)| < \alpha_n$$

les α étant des constantes positives, et la série

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$$

étant convergente.

Nous pouvons former l'intégrale de l'équation (E) prenant sur C la valeur $f_n(\theta)$; désignons-la par $u_n(x, y)$. Il faut montrer que l'intégrale de (E) prenant sur C la valeur $f(\theta)$ est représentée par

$$U = u_1(x, y) + u_2(x, y) + \ldots + u_n(x, y) + \ldots.$$

Tout d'abord cette série converge dans et sur C; en effet on a

$$|u_n(x, y)| < \mu . M_n$$

en désignant par M_n la valeur absolue maxima de $f_n(\theta)$. Donc

$$|u_n(x, y)| < \mu . \alpha_n$$

et la série U est uniformément convergente dans C; de plus, elle prend sur C la valeur $f(\theta)$.

D'autre part, nous devons montrer que la fonction U satisfait à l'équation (E). Or nous avons vu que dans une aire I' intérieure à C, on a les dérivées premières et secondes de u_n inférieures en valeur absolues à

$$\lambda . M_n \text{ et par suite à } \lambda . \alpha_n.$$

Donc les séries formées avec les dérivées premières et secondes des u convergent *uniformément* dans I', et par suite U a des dérivées premières et secondes représentées par les séries des u. Nous pouvons alors, *en toute rigueur*, additionner les relations en nombre infini

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = a \frac{\partial u_n}{\partial x} + b \frac{\partial u_n}{\partial y} + c u_n$$

et nous avons

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial U}{\partial y} + c U.$$

La recherche de l'intégrale continue de l'équation (E) *prenant des valeurs données sur une circonférence et par conséquent sur un contour régulièrement analytique suffisamment petit est donc complètement effectuée sous la seule condition que la succession des valeurs données soit continue.*

9. Nous avons montré au § 7 que dans une aire I' intérieur au cercle de rayon R, les dérivées premières et secondes de l'intégrale u

prenant les valeurs $f(\theta)$ sur la circonférence étaient limitées en fonction du maximum M de $|f(\theta)|$, ceci dans l'hypothèse où $f(\theta)$ avait des dérivées première et seconde. Le même résultat subsiste quand $f(\theta)$ est une fonction continue quelconque. Pour l'établir, il suffit de se reporter à la méthode suivie (§ 8) pour traiter ce dernier cas. En effet, imaginons qu'on se donne une série convergente à termes positifs

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots.$$

Etant donnée la fonction $f(\theta)$ de valeur absolue maxima M, on peut trouver une suite limitée de Fourier $F_n(\theta)$ telle que

$$|f(\theta) - F_n(\theta)| < M\varepsilon_n$$

alors la série

$$f_1(\theta) + f_2(\theta) + \ldots + f_n(\theta) + \ldots$$

où

$$f_1(\theta) = F_1(\theta) \quad \text{et} \quad f_n(\theta) = F_n(\theta) - F_{n-1}(\theta) \qquad (n > 1)$$

converge uniformément vers $f(\theta)$, et on a

$$|f_1(\theta)| < M(1 + \varepsilon_1), \qquad |f_n(\theta)| < M(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) \qquad (n > 1).$$

La valeur absolue de chacun des f est donc limitée en fonction de M, et alors en suivant la méthode du § 8, il est immédiat que les dérivées premières et secondes de l'intégrale prenant sur la circonférence les valeurs $f(\theta)$ sont limitées en fonction de M dans une aire *intérieure* à la circonférence.

10. Nous avons intégré, dans ce qui précède, l'équation (E), en nous donnant les valeurs de l'intégrale le long d'une circonférence de rayon *suffisamment petit*. La méthode suivie avec des développements en séries trigonométriques peut aussi être employée si l'on a, comme contour, deux circonférences concentriques *dont les rayons diffèrent suffisamment peu*. Les calculs sont de même nature, quoique notablement plus compliqués encore; nous ne les développerons pas ici. Le résultat est le même: l'intégration peut être effectuée en supposant seulement continues les successions de valeurs données sur l'une et l'autre circonférence.

11. Dans un de mes mémoires du Journal de mathématiques (1896) sur les équations aux dérivées partielles, j'ai considéré particulièrement l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

dans une région où le coefficient c est négatif ou nul. Dans un contour quelconque C régulièrement analytique une intégrale continue est complètement déterminée par ses valeurs sur le bord, et j'ai démontré l'existence de cette solution unique au moyen d'un procédé d'extension permettant de passer d'une aire à une aire plus grande, procédé qui s'étend d'ailleurs à des équations non linéaires (Journal de math. 1898). On peut cependant faire une objection à un point de la démonstration. J'admets implicitement (voir page 301, Journal de math. 1896) la proposition suivante:

Etant donné un contour C, considérons une succession de fonctions en nombre infini

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

vérifiant l'équation (1), *et telles que l'on ait*

$$|u_n| < \varepsilon_n \qquad (\text{sur } C)$$

les ε étant des constantes telles que la série $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots$ converge; la série

$$U = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

évidemment convergente dans C, satisfera à l'équation différentielle (1).

Après tout ce qui précède, il est aisé d'établir en toute rigueur le théorème précédent. Considérons en effet à l'intérieur de l'aire limitée par C un petit cercle Γ; on a dans Γ et sur Γ

$$|u_n| < \varepsilon_n.$$

D'autre part dans une aire intérieure au cercle Γ, les dérivées premières et secondes de u_n sont limitées en fonction de ε_n; on en conclut que dans cette aire la fonction U a des dérivées premières et secondes qui sont

représentées par les séries des dérivées premières et secondes de u. Il est alors légitime d'additionner les relations en nombre infini

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + a\frac{\partial u_n}{\partial x} + b\frac{\partial u_n}{\partial y} + cu_n = 0$$

pour en tirer

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + cU = 0,$$

et cette relation est vérifiée pour tous les points à l'intérieur du cercle Γ et par suite pour tous les points à l'intérieur de l'aire limitée par C. Toute difficulté a donc disparu.

EMILE PICARD.

ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEN LINEAREN DIFFERENTIAL- UND DIFFERENZENGLEICHUNGEN

VON

HJ. MELLIN

in HELSINGFORS.

In zwei im 22. Bande dieser Zeitschrift veröffentlichten Arbeiten [1] habe ich nachgewiesen, dass die von LAPLACE und EULER herrührenden, von Anderen weiter entwickelten Methoden zur Integration gewöhlicher linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale nicht nur auf Systeme solcher Gleichungen sondern auch auf partielle lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung übertragen werden können, wobei keine andere Voraussetzung hinsichtlich der Coefficienten nöthig war als die, dass sie rationale Funktionen sind. Als Fundament der ganzen Untersuchung diente die auf partielle lineare Differentialausdrücke ausgedehnte LAGRANGE'sche Beziehung zwischen adjungirten Differentialausdrücken, welche sich als die allgemeine Quelle der betreffenden Methoden erwies. Die Benutzung dieser Beziehung hat vor der Methode der partiellen Integration, obwohl beide von einander nicht wesentlich verschieden, jedoch und vor allem den Vortheil, dass die Darstellung des Gegenstandes unter Zuhülfenahme der genannten Beziehung erheblich an Übersichtlichkeit gewinnt.

---

[1] *Über die Integration particller linearer Differentialgleichungen durch vielfache Integrale.* April 1896. *Über die Integration simultaner linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale.* Mai 1896.

In dem vorliegenden Aufsatze beabsichtige ich, einen in den genannten Arbeiten von demselben Gesichtspunkte aus ebenfalls berührten Gegenstand, den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen, zu vervollständigen.

Bevor ich hierzu übergehe, benutze ich diese Gelegenheit, um hervorzuheben, dass die LAPLACE'sche Methode schon früher von Herrn PICARD auf gewisse partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung angewandt worden ist. In seiner Arbeit *Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre,*[1] auf die ich vom Herausgeber der Acta mathematica kürzlich aufmerksam gemacht worden bin, weist nämlich Herr PICARD nach, dass diese Methode auf Gleichungen der Form

$$A\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+D\frac{\partial\varphi}{\partial x}+E\frac{\partial\varphi}{\partial y}+F\varphi=0,$$

deren Coefficienten Polynome vom ersten Grade sind, übertragen werden kann. Indem er

$$\varphi=\iint e^{xu+yv}\psi(u,v)\,du\,dv$$

setzt, findet er für ψ die Differentialgleichung

$$P\frac{\partial\psi}{\partial u}+Q\frac{\partial\psi}{\partial v}+R\psi=0,$$

deren Coefficienten Polynome vom zweiten Grade sind. Eine besondere Erörterung wird sodann speciellen Gleichungen der obigen Form, in erster Linie der Gleichung von EULER und POISSON, gewidmet.

§ 1.

Wir wollen zunächst ganz allgemein nachweisen, *dass jede homogene partielle lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten durch eine geeignete Integralsubstitution in eine homogene partielle lineare Differenzengleichung mit einerlei Coefficienten formell transformirt werden kann, und dass auch das Umgekehrte möglich ist.*

[1] Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 5, 1891.

Für gewöhnliche lineare Differential- und Differenzengleichungen hat bekanntlich LAPLACE [1] das erstere und Herr PINCHERLE [2] das letztere gezeigt.

Die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen wollen wir der kürze halber gleich zwei annehmen.

Will man den zwischen den genannten Gleichungen bestehenden Zusammenhang in formaler Hinsicht deutlich überblicken, so ist die folgende, a. a. O. ebenfalls benutzte, symbolische Form zu berücksichtigen, auf die jede partielle lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten gebracht werden kann:

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} x^\mu y^\nu f_{\mu\nu}\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = 0. \tag{1}$$

Hier bezeichnen die $f(u, v)$ ganze rationale Funktionen von u, v, so dass also

$$f\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = \sum_{h,k} C_{hk}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^h\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k\varphi = \sum_{h,k} C_{hk}\, x\frac{\partial}{\partial x}\cdots x\frac{\partial}{\partial x}\, y\frac{\partial}{\partial y}\cdots y\frac{\partial}{\partial y}\,\varphi.$$

Bekanntlich ist

$$f\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)x^u y^v = x^u y^v f(u, v), \tag{2}$$

$$f\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)x^u y^v\varphi = x^u y^v f\left(x\frac{\partial}{\partial x}+u, y\frac{\partial}{\partial y}+v\right)\varphi, \tag{3}$$

weil diese Formeln für die einzelnen Glieder von f gelten.

Die Transformation einer partiellen Differentialgleichung in die entsprechende Differenzengleichung gestaltet sich nun sehr übersichtlich, wenn man sich der verallgemeinerten LAGRANGE'schen Beziehung [3] in der folgenden Form bedient:

$$\begin{aligned}\Phi\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} x^\mu y^\nu f_{\mu\nu}\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi - \varphi\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} f\left(-x\frac{\partial}{\partial x}, -y\frac{\partial}{\partial y}\right)x^\mu y^\nu\,\Phi \\ = x\frac{\partial}{\partial x}P(\varphi, \Phi) + y\frac{\partial}{\partial y}Q(\varphi, \Phi),\end{aligned}$$

[1] *Théorie analytique des probabilités.*

[2] *Sopra una trasformazione delle equazione differenziali lineari in equazioni alle differenze, e viceversa.* Nota letta al Istituto Lombardo nell' adunanza del 17 giugno 1886.

[3] Siehe meine oben citirte Arbeit über partielle Differentialgleichungen.

wo P und Q in φ, Φ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen. Man setze $\varphi = x^u y^v$ und Φ gleich einer Lösung der Gleichung

$$(4) \qquad \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} f_{\mu\nu}\left(-x\frac{\partial}{\partial x}, -y\frac{\partial}{\partial y}\right)x^\mu y^\nu \Phi = 0.$$

Benutzt man zugleich die Formel (2), multiplicirt mit $x^{-1}y^{-1}$ und integrirt in der x-Ebene längs einer Linie (x), in der y-Ebene längs einer Linie (y), so ergiebt sich zunächst:

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} f_{\mu\nu}(u, v)\int_{(x)}\int_{(y)} \Phi(x, y)x^{u+\mu-1}y^{v+\nu-1}dxdy$$

$$= \int_{(x)}\int_{(y)}\left(y^{-1}\frac{\partial}{\partial x}P + x^{-1}\frac{\partial}{\partial y}Q\right)dxdy.$$

Hieraus folgt sodann der schon a. a. O. erhaltene Satz:

Bedeutet Φ eine Lösung der Differentialgleichung (4) *und sind die Integrationswege (x) und (y) so gewählt, dass die Bedingung*

$$\int_{(x)}\int_{(y)}\left(y^{-1}\frac{\partial}{\partial x}P + x^{-1}\frac{\partial}{\partial y}Q\right)dxdy = 0$$

identisch erfüllt ist, so besitzen wir in

$$(5) \qquad F(u, v) = \int_{(x)}\int_{(y)} \Phi(x, y)x^{u-1}y^{v-1}dxdy$$

eine Lösung der Differenzengleichung

$$(6) \qquad \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} f_{\mu\nu}(u, v)F(u+\mu, v+\nu) = 0.$$

Nunmehr wollen wir zeigen, dass auch umgekehrt die Differenzengleichung (6) durch die Formel

$$(7) \qquad \Phi(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{(u)}\int_{(v)} F(u, v)x^{-u}y^{-v}dudv$$

in die Differentialgleichung (4) transformirt werden kann.

Der Nachweis gründet sich auf die Voraussetzung, dass die Integrationswege (u) und (v) ihrer ganzen Länge nach in der positiven oder negativen Richtung der reellen Axe um gewisse Strecken verschoben werden können, *ohne dass sich der Werth des Integrals dabei ändert.* Bleibt der Werth von (7) bei Verschiebung der Integrationswege um die resp. Strecken μ und ν ungeändert, so ist

$$x^\mu y^\nu \Phi(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{(u)}\int\limits_{(v)} F(u+\mu, v+\nu) x^{-u} y^{-v} du dv.$$

Durch Differentiation folgt

$$\left(-x\frac{\partial}{\partial x}\right)^h \left(-y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k x^\mu y^\nu \Phi = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{(u)}\int\limits_{(v)} u^h v^k F(u+\mu, v+\nu) x^{-u} y^{-v} du dv,$$

woraus sich die noch allgemeinere Formel sofort ergiebt:

$$f\left(-x\frac{\partial}{\partial x}, -y\frac{\partial}{\partial y}\right) x^\mu y^\nu \Phi = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{(u)}\int\limits_{(v)} f(u, v) F(u+\mu, v+\nu) x^{-u} y^{-v} du dv.$$

Ist nun $F(u, v)$ eine Lösung der Differenzengleichung (6) so giebt uns diese Formel unmittelbar den Satz:

Bedeutet $F(u, v)$ eine Lösung der Differenzengleichung (6), *so besitzen wir in* (7) *eine Lösung der Differentialgleichung* (4), *wofern der Integrationsweg (u) um die Strecken $1, 2, \ldots, m$ und der Integrationsweg (v) um die Strecken $1, 2, \ldots, n$ in der (einen oder anderen) Richtung der reellen Axe verschoben werden können, ohne dass sich der Werth des Integrals dabei ändert.*

Da jede homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten offenbar auf die Form (4) und jede homogene lineare Differenzengleichung mit einerlei Coefficienten auf die Form (6) gebracht werden kann, so findet man aus den obigen Sätzen, dass die Integration jeder solchen Differentialgleichung stets auf die Integration einer entsprechenden Differenzengleichung, und vice versa, *formell* zurückführbar ist. Sobald die eine dieser Gleichungen gegeben ist, kann auch die andere unmittelbar angegeben werden.

§ 2.

Es ergiebt sich zugleich ohne weiteres, dass die Ordnung der Differentialgleichung gleich ist der Gradzahl der Differenzengleichung in Bezug auf die unabhängigen Veränderlichen; die Ordnung der einen Gleichung bestimmt aber keineswegs die der anderen. Im Nachfolgenden beabsichtigen wir nun, gewisse *Systeme* von partiellen Differentialgleichungen *beliebiger Ordnung* hervorzuheben, deren Integration mit Hülfe von Lösungen simultaner Differenzengleichungen *erster Ordnung* geleistet werden kann. Die ersteren Gleichungen können passend *hypergeometrische* Differentialgleichungen genannt werden, während die letzteren solche Differenzengleichungen erster Ordnung sind, welche durch *Gammafunktionen* befriedigt werden können.

Setzt man

$$G(u, v) = a^u b^v P(u, v) \prod_{\nu=1}^{n} \Gamma(p_\nu u + q_\nu v + c_\nu), \tag{8}$$

wo die p, q positive oder negative *ganze* Zahlen bedeuten, während P eine Funktion mit den periodischen Eigenschaften $P(u + 1, v) = P(u, v)$, $P(u, v + 1) = P(u, v)$ bezeichnet, so hat man einen ziemlich allgemeinen Ausdruck, welcher einem Systeme von zwei simultanen Differenzengleichungen erster Ordnung genügt. Auf Grund der Funktionalgleichung von $\Gamma(z)$ folgt in der That

$$\left\{\begin{aligned} G(u + 1, v) &= \frac{f_1(u, v)}{g_1(u, v)} G(u, v), \\ G(u, v + 1) &= \frac{f_2(u, v)}{g_2(u, v)} G(u, v), \end{aligned}\right. \tag{9}$$

wo f_1, g_1, f_2, g_2 gewisse ganze rationale Funktionen von u, v bezeichnen.

Setzt man also

$$\Phi(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{(u)} \int_{(v)} G(u, v) x^{-u} y^{-v} du dv, \tag{10}$$

so befriedigt Φ das folgende System

$$(11) \qquad \begin{cases} f_1\left(-x\dfrac{\partial}{\partial x}, -y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\Phi = g_1\left(-x\dfrac{\partial}{\partial x}, -y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)x\Phi, \\ f_2\left(-x\dfrac{\partial}{\partial x}, -y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\Phi = g_2\left(-x\dfrac{\partial}{\partial x}, -y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)y\Phi, \end{cases}$$

vorausgesetzt, dass die Integrationswege (u) *und* (v) *um die Strecke Eins in der Richtung der reellen Axe verschoben werden können, ohne dass sich der Werth des Integrals dabei ändert.*

Die obigen Ausdrücke f, g sind ganze rationale Funktionen einer besonderen Beschaffenheit, indem sie nämlich infolge ihrer Entstehung in lauter Faktoren der Form $pu + qv + c$, unter p, q ganze Zahlen verstanden, zerlegt werden können. Ferner sind sie von einander nicht völlig unabhängig; denn aus den simultanen Gleichungen (9) folgt offenbar

$$\frac{f_1(u, v)}{g_1(u, v)}\frac{f_2(u+1, v)}{g_2(u+1, v)} = \frac{f_2(u, v)}{g_2(u, v)}\frac{f_1(u, v+1)}{g_1(u, v+1)}.$$

Diese Gleichung drückt mithin eine allgemeine Bedingung aus, welche nothwendig erfüllt sein muss, damit die Gleichungen des Systems (9) mit einander verträglich seien.

Versteht man allgemein unter einer *hypergeometrischen Funktion* zweier Variabeln jede Funktion, welche einem Systeme von zwei partiellen Differentialgleichungen der Form (11) genügt, unter $f(u, v)$, $g(u, v)$ ganze rationale Funktionen verstanden, deren *irreduktible* Faktoren alle die *lineare* Form $pu + qv + c$ haben, so gehören zu solchen Funktionen, wie man sich leicht überzeugt, besonders auch diejenigen, welche Herr APPELL in seiner Arbeit *Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables*[1] untersucht hat.

Zum Ausgangspunkte seiner Untersuchungen nimmt Herr APPELL vier Reihen $F_1, \ldots, F_4$, von denen beispielsweise die erste die Form hat

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, y) = \sum \frac{(\alpha, \mu+\nu)(\beta, \mu)(\beta', \nu)}{\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}\,(\gamma, \mu+\nu)} x^\mu y^\nu,$$

wo $(\lambda, k) = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)$ und die Indices μ, ν unabhängig von einander alle positiven ganzzahligen Werthe von der Null an durchlaufen. Diese Reihe befriedigt nach dem § 5 der genannten Arbeit das System

[1] Journal de mathématiques. S. III. T. 8.

$$\begin{cases} (x-x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y(1-x)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\dfrac{\partial z}{\partial x}-\beta y\dfrac{\partial z}{\partial y}-\alpha\beta z=0, \\ (y-y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x(1-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+[\gamma-(\alpha+\beta'+1)y]\dfrac{\partial z}{\partial y}-\beta' x\dfrac{\partial z}{\partial x}-\alpha\beta' z=0. \end{cases}$$

Man verificirt nun leicht, dass dieses System mit dem folgenden identisch ist:

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}+\gamma-1\Big)z=x\Big(x\dfrac{\partial}{\partial x}+\beta\Big)\Big(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial x}+\alpha\Big)z, \\ y\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial x}+\gamma-1\Big)z=y\Big(y\dfrac{\partial}{\partial y}+\beta'\Big)\Big(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}+\alpha\Big)z, \end{cases}$$

und auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass unsere Behauptung auch für die übrigen Reihen F richtig ist.

Diesen Differentialgleichungen entsprechen offenbar die folgenden Differenzengleichungen

$$\begin{cases} F(u+1\,,v)=\dfrac{u(u+v-\gamma+1)}{(u-\beta+1)(u+v-\alpha+1)}F(u\,,v), \\ F(u\,,v+1)=\dfrac{v(u+v-\gamma+1)}{(v-\beta'+1)(u+v-\alpha+1)}F(u\,,v). \end{cases}$$

Die allgemeinste Lösung dieses Systems ist

$$\Gamma(u)\Gamma(\beta-u)\,.\,\Gamma(v)\Gamma(\beta'-v)\,.\,\Gamma(u+v-\gamma+1)\Gamma(\alpha-u-v)\,.\,P(u\,,v),$$

wo P eine willkürliche Funktion mit den Eigenschaften

$$P(u+1\,,v)=P(u\,,v),\qquad P(u\,,v+1)=P(u\,,v)$$

bedeutet. Setzt man für $G(u\,,v)$ in (10) diesen Ausdruck ein, so stellt also Φ eine Lösung des obigen Systems von Differentialgleichungen dar, wofern zugleich die Integrationswege auf die im Satze angegebene Weise verschiebbar sind.

Was endlich den näheren Zusammenhang zwischen den Lösungen der beiden allgemeineren Systeme (9) und (11) betrifft, so kann eine ziemlich zutreffende Andeutung davon gegeben werden, indem wir uns hier der Kürze halber auf die Darlegung des Zusammenhanges zwischen den Gamma-

funktionen und den gewöhnlichen hypergeometrischen Differentialgleichungen beschränken. Denn alles, was im Nachfolgenden von den letzteren nachgewiesen wird, lässt sich fast unverändert auf die ersteren Gleichungen (9) und (11) übertragen. Die folgenden Paragraphen enthalten zugleich die Hauptergebnisse einer früheren, viel ausführlicheren Arbeit des Verfassers über den betreffenden Gegenstand.[1]

§ 3.

Unter einer gewöhnlichen hypergeometrischen Differentialgleichung verstehen wir jede Gleichung der Form

$$(12)\qquad (a_0 - b_0 x)y + (a_1 - b_1 x)x\frac{dy}{dx} + \ldots + (a_m - b_m x)x^m\frac{d^m y}{dx^m} = 0.$$

Mit Benutzung der symbolischen Formeln

$$x^\nu \frac{d^\nu y}{dx^\nu} = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx} - 1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx} - \nu + 1\right)y, \qquad g\left(x\frac{d}{dx}\right)xy = xg\left(x\frac{d}{dx} + 1\right)y$$

erhält sie die Gestalt

$$(13)\qquad f\left(-x\frac{d}{dx}\right)y = g\left(-x\frac{d}{dx}\right)xy,$$

wo

$$(14)\qquad \begin{cases} f(-z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z(z-1)\ldots(z-m+1), \\ g(-z) = b_0 + b_1(z-1) + \ldots + b_m(z-1)(z-2)\ldots(z-m). \end{cases}$$

Offenbar ist $f(-z) = 0$ die zur singulären Stelle $x = 0$, und $g(z-1) = 0$ die zur Stelle $x = \infty$ gehörige determinirende Gleichung der Differentialgleichung.

---

[1] Siehe *Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma- und der hypergeometrischen Functionen.* (Acta Societatis Scientiarum Fennicae. Tom. 21, 1895.) Der Zusammenhang zwischen den Gammafunktionen und den partiellen hypergeometrischen Differentialgleichungen ist in meiner Arbeit *Zur Theorie zweier allgemeinen Classen bestimmter Integrale* (Acta Fenn. Tom. 22.) näher erörtert worden.

Die Differenzengleichung, welche dieser Differentialgleichung entspricht, ist nach § 1

$$(15)\qquad F(z+1) = \frac{f(z)}{g(z)} F(z).$$

Wir können unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass $a_m = 1$ und $b_n = -1$, unter b_n die letzte von den Grössen $b_0, b_1, \ldots, b_m$ verstanden, welche von Null verschieden ist. Setzt man nun

$$(16)\qquad \begin{cases} f(z) = (-1)^m \; (z-\rho_1)(z-\rho_2)\ldots(z-\rho_m), \\ g(z) = (-1)^{n-1}(z-\sigma_1)(z-\sigma_2)\ldots(z-\sigma_n), \end{cases}$$

und

$$(17)\qquad G(z) = \Gamma(z-\rho_1)\ldots\Gamma(z-\rho_m)\Gamma(1+\sigma_1-z)\ldots\Gamma(1+\sigma_n-z),$$

so besitzen wir in $P(z)G(z)$, wo P eine willkürliche Funktion mit der Eigenschaft $P(z+1) = (-1)^{m-1}P(z)$, die allgemeinste Lösung der Gleichung (15). Für unseren Zweck ist es aber keineswegs nöthig, diese Funktion P als eine völlig unbestimmte periodische Funktion aufzufassen. Es genügt schon, wenn wir P in der Form

$$(18)\qquad P(z, m) = \sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_m)\sum_{\nu=1}^{m}\frac{C_\nu}{\sin\pi(z-c_\nu)}$$

annehmen, wo die C willkürliche Constanten, während die c bestimmte Grössen sind, unter denen keine zwei sich finden, deren Differenz gleich der Null oder einer ganzen Zahl.

Setzt man

$$(19)\qquad \Phi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(z)} P(z, m)G(z)x^{-z}\,dz,$$

so genügt Φ nach dem früher Dargelegten der obigen Differentialgleichung, falls der Integrationsweg (z) in der positiven oder negativen Richtung der reellen Axe um die Strecke Eins verschoben werden kann, ohne dass sich der Werth des Integrals dabei ändert.

Unser Hauptzweck ist nun der Nachweis, dass das *allgemeine Integral* der obigen Differentialgleichung — wenigstens bis auf eine additive,

aus Potenzen und Logarithmen zusammengesetzte, endliche Summe — durch diesen Ausdruck (19) bei geeigneter Wahl des Integrationsweges (z) dargestellt werden kann, oder kürzer, *dass jede hypergeometrische Differentialgleichung mit Hülfe der Gammafunktion vollständig integrirt werden kann.* Dieser Satz lautet eigenthümlich, wenn man ihn mit dem anderen zusammenstellt, *dass die Gammafunktion selbst bekanntlich keiner algebraischen Differentialgleichung genügen kann.*

§ 4.

Hinsichtlich der *ganzen* Funktion $P(z, m)$ ist Folgendes zu beachten. Bedeuten $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ $(\mu < m)$ beliebige Werthe, unter denen auch gleiche Grössen sich finden können, so ergiebt sich auf Grund einer, für den Fall $\mu = 1$ anzustellenden, einfachen Rechnung, dass man über die unbestimmten Constanten C stets so verfügen kann, dass die Gleichung entsteht:

$$P(z, m) = \sin\pi(z - \alpha_1) \ldots \sin\pi(z - \alpha_\mu) P(z, m - \mu),$$

d. h. so, dass $P(z, m)$ an den Stellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ verschwindet, während in $P(z, m - \mu)$ noch $m - \mu$ willkürliche Constanten übrig bleiben.

Die Integrationswege, deren wir uns bedienen werden, sind aus drei, den Coordinatenaxen parallelen, durch keinen Pol des Integranden hindurchgehenden, geraden Linien zusammengesetzt, und zwar soll unter $(-\infty)$ die gebrochene Linie

$$-\infty + i\omega_1 \text{ —— } \omega + i\omega_1 \text{ —— } \omega + i\omega_2 \text{ —— } -\infty + i\omega_2,$$

sowie unter $(+\infty)$ die gebrochene Linie

$$+\infty + i\omega_1 \text{ —— } \omega + i\omega_1 \text{ —— } \omega + i\omega_2 \text{ —— } +\infty + i\omega_2$$

verstanden werden. Über die reellen Grössen $\omega, \omega_1, \omega_2$ soll weiterhin näher verfügt werden.

Auf Grund der Funktionalgleichung des Integranden und mit Benutzung eines aus der Weierstrass'schen Arbeit über die analytischen Fakultäten leicht zu entnehmenden Satzes über das Verhalten des Produktes

$$\frac{f(z)f(z \pm 1) \ldots f(z \pm k)}{g(z)g(z \pm 1) \ldots g(z \pm k)}$$

bei wachsendem k ergiebt sich zunächst Folgendes:

Ist $m > n$, so stellt unser Integral (19), über eine Linie $(-\infty)$ erstreckt, in der ganzen x-Ebene eine monogene Funktion von x dar, für welche die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ die einzigen singulären Stellen sind. Dagegen hat es in diesem Falle keinen Sinn, das Integral (19) auf eine Linie $(+\infty)$ zu beziehen.

Ist $m = n$, so stellt unser Integral, über eine Linie $(-\infty)$ erstreckt, für $|x| < 1$ eine monogene Funktion von x dar, für welche $x = 0$ im allgemeinen eine singuläre Stelle ist. Für $|x| > 1$ hat es dagegen keinen Sinn. Erstreckt man es aber über eine Linie $(+\infty)$, so stellt es für $|x| > 1$ eine monogene Funktion dar, hat aber für $|x| < 1$ keinen Sinn.

Unter Berücksichtigung des Umstandes, dass sich der Integrand in jedem endlichen Bereiche der z-Ebene wie eine rationale Funktion verhält, kann der Satz des § 3 auf Grund des CAUCHY'schen Theorems so ausgesprochen werden:

Lässt sich der zur imaginären Axe parallele Theil des Integrationsweges $(-\infty)$, resp. $(+\infty)$, in der Richtung der reellen Axe um die Strecke *Eins* verschieben, ohne dabei irgend einen Pol des Integranden zu passiren, so genügt Φ der Differentialgleichung (13).

Liegt kein Pol innerhalb des vom Integrationswege eingeschlossenen Gebietes, so ist Φ identisch gleich der Null.

Jeder Pol des Integranden ist als Glied in irgend einer der $m + n$ arithmetischen Reihen

$$(20) \qquad \rho_\mu, \rho_\mu - 1, \ldots, \rho_\mu - \nu, \ldots \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m,$$

$$(21) \qquad \sigma_\mu + 1, \sigma_\mu + 2, \ldots, \sigma_\mu + 1, \ldots \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n,$$

enthalten, und zwar ist der betreffende Pol, bei unbestimmten Werthen der Constanten C, ein p-facher, falls er p Reihen gemeinschaftlich ist.

§ 5.

Ein bemerkenswerter Fall, auf welchen wir alle übrigen im folgenden Paragraphen zurückführen werden, tritt nun dann ein, wenn eine reelle Grösse ω so angenommen werden kann, dass die Grössen ρ und σ die Bedingungen erfüllen

$$(22) \qquad \Re(\rho_\mu) < \omega < \omega + 1 < \Re(\sigma_\nu + 1), \qquad {\scriptstyle \mu = 1, 2, \ldots, m, \atop \nu = 1, 2, \ldots, n,}$$

unter $\Re(\rho)$ den reellen Theil von ρ verstanden. Der zur imaginären Axe parallele Theil der beiden Wege $(-\infty)$ und $(+\infty)$ kann in diesem Falle in der Richtung der reellen Axe um die Strecke Eins verschoben werden, ohne dabei irgend einen Pol zu passiren. Also genügt Φ der Gleichung (13).

Wählt man überdies ω_1 und ω_2 so, dass der Weg $(-\infty)$ die sämmtlichen Stellen (20), *der Weg $(+\infty)$ dagegen die sämmtlichen Stellen* (21) *einschliesst, so lässt sich zeigen, dass der Ausdruck Φ in seinem jedesmaligen Gültigkeitsbereiche das allgemeine Integral der Differentialgleichung* (13) *darstellt.*

Es genügt, den Beweis für den Fall zu führen, wo das Integral über eine Linie $(-\infty)$ der soeben angegebenen Beschaffenheit erstreckt ist.

In üblicher Weise stellen wir uns vor, dass die Wurzeln $-\rho_1, \ldots, -\rho_m$ der zur singulären Stelle $x = 0$ gehörigen determinirenden Gleichung $f(-\rho) = 0$ derart in Gruppen gesondert sind, dass die Wurzeln einer und derselben Gruppe sich höchstens um ganze Zahlen von einander unterscheiden, während die Differenz irgend zweier, zu verschiedenen Gruppen gehörigen Wurzeln keine ganze Zahl ist. Die sämmtlichen Wurzeln irgend einer solchen Gruppe mögen durch $-\rho_1 \geqq -\rho_2 \geqq \ldots \geqq -\rho_k$ bezeichnet werden, wobei das Zeichen $\geqq$ sich auf die reellen Theile der betreffenden Grössen bezieht.

Verfügen wir über die willkürlichen Constanten von $P(z, m)$ so, dass P sich in

$$P(z, m) = \sin\pi(z - \rho_{k+1}) \ldots \sin\pi(z - \rho_m) P(z, k)$$

verwandelt, so kann der Integrand nicht mehr an den zu denjenigen Reihen (20) gehörenden Stellen unendlich werden, deren erste Glieder $\rho_{k+1}, \ldots, \rho_m$, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, zu den übrigen Wurzelgruppen gehören. Dadurch geht das Integral (19) in das folgende über:

$$(23) \qquad \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{(-\infty)} G(z) \sin\pi(z - \rho_{k+1}) \ldots \sin\pi(z - \rho_m) P(z, k) x^{-z} dz,$$

wo P noch k willkürliche Constanten C enthält. Wir behaupten nun, *dass dieses Integral das allgemeinste zur Wurzelgruppe $(-\rho_1, \ldots, -\rho_k$ gehörende Integral der Differentialgleichung* (13) *darstellt.*

Die Richtigkeit hiervon ergiebt sich, wenn man dieses Integral mit Hülfe des CAUCHY'schen Satzes in eine Reihe verwandelt. Die sämmtlichen Pole des Integranden sind nach dem Obigen als Glieder in den k von dem Integrationswege $(-\infty)$ eingeschlossenen aritmetischen Reihen

$$(24) \qquad \rho_\mu, \rho_\mu - 1, \ldots, \rho_\mu - \nu, \ldots \qquad \mu = 1, 2, \ldots, k$$

enthalten, welche beziehungsweise die Reihen der Pole der in $G(z)$ vorkommenden Faktoren $\Gamma(z-\rho_1), \ldots, \Gamma(z-\rho_k)$ bilden. Die Ordnung irgend einer dieser Stellen als Pol des Integranden ist also bei unbestimmten C genau gleich der Anzahl derjenigen Faktoren $\Gamma(z-\rho_1), \ldots, \Gamma(z-\rho_k)$, die an der betreffenden Stelle unendlich werden, d. h. gleich der Anzahl derjenigen Reihen (24), für welche die betreffende Stelle ein *gemeinsames* Glied ist. Weil die Grössen $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \ldots \leq \rho_k$ sich höchstens um ganze Zahlen von einander unterscheiden, so ist unter den Reihen (24) die Reihe

$$(25) \qquad \rho_1, \rho_1 - 1, \ldots, \rho_1 - \nu, \ldots$$

dadurch bemerkenswerth, dass ihre sämmtlichen Glieder in jeder der übrigen Reihen enthalten sind. An allen diesen Stellen (25) wird somit der Integrand bei unbestimmten C genau von der k^{ten} Ordnung unendlich gross, an den übrigen Stellen (24) aber von niedrigerer oder höchstens von der k^{ten} Ordnung.

Auf Grund des CAUCHY'schen Satzes ist nun das Integral (23) gleich einer Reihe, deren Glieder die zu den Stellen (24) gehörigen Residuen sind. Aus den Gleichungen

$$x^{-z} = x^{-\rho_1+\nu}\left[1 - \frac{z-\rho_1+\nu}{\underline{|1}}\log x + \frac{(z-\rho_1+\nu)^2}{\underline{|2}}\log^2 x + \ldots\right],$$

$$G(z)\sin\pi(z-\rho_{k+1})\ldots\sin\pi(z-\rho_m)P(z, k)$$

$$= \frac{K_k^{(\nu)}}{(z-\rho_1+\nu)^k} + \ldots + \frac{K_1^{(\nu)}}{z-\rho_1+\nu} + \mathfrak{P}(z-\rho_1+1),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche Potenzreihe bedeutet, findet man, dass das zur Stelle $z = \rho_1 - \nu$ gehörige Residuum die Form

$$x^{-\rho_1+\nu}\left[K_1^{(\nu)} - \frac{K_2^{(\nu)}}{\underline{|1}}\log x + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{K_k^{(\nu)}}{\underline{|k-1}}(\log x)^{k-1}\right]$$

hat und bei unbestimmten C den Logarithmus thatsächlich in der $(k-1)^{\text{ten}}$ Potenz enthält. Die zu den übrigen, nicht allen Reihen (24) gemeinsamen Polen gehörigen Residuen, welche wir mit S_ν bezeichnen wollen, enthalten dagegen höchstens die $(k-2)^{\text{te}}$ Potenz von $\log x$. Für das Integral (23) ergiebt sich also die Reihenentwicklung

$$(26)\quad \sum_\nu S_\nu + x^{-\rho_1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[K_1^{(\nu)} - \frac{K_2^{(\nu)}}{\underline{|1}}\log x + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{K_k^{(\nu)}}{\underline{|k-1}}(\log x)^{k-1}\right]x^\nu,$$

welche bei unbestimmten C die $(k-1)^{\text{te}}$ Potenz von $\log x$ wirklich enthält.

Die Richtigkeit unserer Behauptung, dass (23) das allgemeinste zur Wurzelgruppe $(-\rho_1, \ldots, -\rho_k)$ gehörige Integral der Differentialgleichung (13) darstellt, wird erwiesen, wenn wir zeigen, dass man durch geeignete Verfügung über die unbestimmten Constanten von $P(z, k)$ bewirken kann, dass diese Entwicklung (26) sich successive in Reihen verwandelt, worin die höchsten wirklich enthaltenen Potenzen von $\log x$ beziehungsweise die Exponenten $k-2$, $k-1$, ..., 0 besitzen. Denn zwischen solchen Reihen, deren Ansahl hier gleich k ist, wenn die ursprüngliche Reihe (26) mitgerechnet wird, kann bekanntlich keine lineare Gleichung bestehen. Verfügen wir in der That über diese Constanten so, dass sich $P(z, k)$ in $\sin\pi(z-\rho_1)P(z, k-1)$ verwandelt, so wird der Integrand bei unbestimmten Werthen der noch in $P(z, k-1)$ vorkommenden $k-1$ Constanten C an den Stellen (25) genau von der $(k-1)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich gross. Hieraus folgt wie oben, dass die Reihenentwicklung des Integrals nunmehr bloss die $(k-2)^{\text{te}}$ Potenz von $\log x$ wirklich enthält. Fährt man mit der Specialisirung der Constanten auf diese Weise fort, so geht (26) schliesslich in eine Reihe der Form

$$x^{-\rho_1}\sum_{\nu=0}^{\infty} K^{(\nu)}x^\nu$$

mit von Null verschiedenen Coefficienten über; und hiermit ist die Richtigkeit der Behauptung erwiesen.

Weil das Integral (19), über die früher erwähnte Linie $(-\infty)$ erstreckt, nach dem oben Dargelegten das allgemeinste, zu einer *beliebigen* Wurzelgruppe der determinirenden Gleichung $f(-\rho) = 0$ gehörende Integral der Differentialgleichung (13) umfasst, so stellt dasselbe auch das allgemeine Integral dieser Gleichung dar, und zwar in der ganzen x-Ebene

oder nur in dem Gebiete $|x| < 1$, je nachdem $m > n$ oder $= n$ ist. Erstreckt man es aber im letzteren Falle ($m = n$) über die früher erwähnte Linie ($+\infty$), so repräsentirt es offenbar auch im Gebiete $|x| > 1$ das allgemeine Integral derselben Gleichung.

§ 6.

Es erübrigt noch zu zeigen, dass die Integration einer hypergeometrischen Differentialgleichung, deren Constanten ρ, σ die Bedingungen (22) nicht erfüllen, auf den im vorigen Paragraphen erörterten Fall zurückgeführt werden kann.

Multiplicirt man den Ausdruck $G(z)$ mit $z - \rho_1$, so nimmt der Parameter ρ_1 infolge $(z-\rho_1)\Gamma(z-\rho_1) = \Gamma(z-\rho_1+1)$ um Eins ab. Durch wiederholte Anwendung dieser Operation folgt offenbar, dass $G(z)$, nach Multiplikation mit einer passenden ganzen Funktion $D(z)$, in einen Ausdruck $G_1(z) = D(u)G(z)$ derselben Form übergeht, deren Constanten aber die Bedingungen (22) erfüllen. Eine entsprechende Transformation kann mit der Differentialgleichung $f\left(-x\frac{d}{dx}\right)y = g\left(-x\frac{d}{dx}\right)xy$, d. h. mit

$$(27)\qquad \left(x\frac{d}{dx}+\rho_1\right)\ldots\left(x\frac{d}{dx}+\rho_m\right)y = -\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1\right)\ldots\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_n\right)xy$$

vorgenommen werden. Fügt man nämlich auf beiden Seiten den symbolischen Faktor $\left(x\frac{d}{dx}+\rho_1-1\right)$ hinzu und setzt $\left(x\frac{d}{dx}+\rho_1\right)y = u$, so ergiebt sich für u eine Differentialgleichung, welche sich von der obigen bloss dadurch unterscheidet, dass $\rho_1 - 1$ statt ρ_1 geschrieben wird. Hieraus folgt, dass der Differentialausdruck

$$(28)\qquad D\left(-x\frac{d}{dx}\right)y = u,$$

unter $D(z)$ die oben erwähnte ganze Funktion verstanden, ebenfalls einer hypergeometrischen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$f_1\left(-x\frac{d}{dx}\right)u = g\left(-x\frac{d}{dx}\right)xu$$

Genüge leistet, deren Constanten aber die Bedingungen (22) erfüllen. Die

Constanten ρ der Gleichung von y unterscheiden sich nur um ganze Zahlen von den entsprechenden Constanten der Gleichung von u, während die σ in beiden Gleichungen dieselben sind. Man hat zugleich

$$G_1(z+1) = \frac{f_1(z)}{g(z)} G_1(z).$$

Das allgemeine Integral der letzteren Differentialgleichung ist mithin nach dem vorigen Paragraphen:

$$u = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\pm\infty)} G_1(z) P(z, m) x^{-z} dz, \tag{29}$$

wo sich die Integration je nach den Umständen auf eine Linie $(+\infty)$ oder $(-\infty)$ der früher angegebenen Art bezieht. Das allgemeine Integral von (27) ist in der allgemeinsten Lösung von (28) enthalten, und diese Lösung lässt sich, weil wir für u den Ausdruck (29) besitzen, ebenfalls in geschlossener Form darstellen. Durch wiederholte Anwendung der Identität

$$x^{\rho-1}\left(x\frac{d}{dx} + \rho\right)X = \frac{d}{dx}(x^\rho X)$$

und jedesmalige unbestimmte Integration folgt schliesslich aus (28) und (29):

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(\pm\infty)} \frac{G_1(z)}{D(z)} P(z, m) x^{-z} dz + R(x, \log x) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(\pm\infty)} G(z) P(z, m) x^{-z} dz + R(x, \log x), \end{aligned} \tag{30}$$

wo R eine gewisse ganze Funktion von $\log x$ bedeutet, deren Coefficienten Potenzen von x in endlicher Anzahl enthalten.

In diesem Ausdrucke ist nach dem Obigen auch das allgemeine Integral von (27) enthalten. Es erübrigt noch die Frage zu beantworten, welche Bedingungen die unbestimmten Constanten von R erfüllen müssen, damit (30) dieses Integral darstellen soll. Wir beschränken uns auf die folgenden Andeutungen. Versteht man unter Φ das auf der rechten Seite von (30) vorkommende Integral, während Φ_1 das aus Φ durch Verschiebung des Integrationsweges um die Strecke Eins in der positiven Richtung der reellen Axe entstandene Integral bedeutet, so ist $\Phi_1 = \Phi + S$, wo S die

Summe der Residuen bezeichnet, welche zu den zwischen den Integrationswegen liegenden Polen des Integranden gehören. Andererseits lässt sich ohne Mühe zeigen, dass $f\left(-x\frac{d}{dx}\right)\Phi = g\left(-x\frac{d}{dx}\right)x\Phi_1$.

Eine nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass y die Differentialgleichung $f\left(-x\frac{d}{dx}\right)y = g\left(-x\frac{d}{dx}\right)xy$ *befriedigt, ist also die, dass zwischen den Constanten der beiden Ausdrücke R und S solche Beziehungen bestehen, dass*

$$f\left(-x\frac{d}{dx}\right)R = g\left(-x\frac{d}{dx}\right)x(R-S).$$

§ 7.

Die zur reellen Axe parallelen Theile des Integrationsweges $(-\infty)$, resp. $(+\infty)$, können, ohne dass das Integral (19) seinen Sinn verliert, in zahlreichen Fällen — d. h. wenn die willkürlichen Constanten von $P(z, m)$ passend beschränkt werden — um die Eckpunkte der gebrochenen Linie so gedreht werden, dass dieselbe in eine unbegrenzte, auf der reellen Axe senkrecht stehende, gerade Linie übergeht. Die so erhaltenen Integrale besitzen gewisse bemerkenswerthe Eigenschaften, welche hier nicht unerwähnt gelassen werden dürfen. Dieselben gehören einer sehr allgemeinen Klasse von bestimmten Integralen an, für welche eine charakteristische Beziehung hergeleitet werden kann, welche auf dem Gebiete complexer Funktionen genau der Fourier'schen Integralformel auf reellem Gebiete entspricht.

Es existirt eine erhebliche Menge monogener Funktionen von folgender Beschaffenheit. *In der Ebene der complexen Veränderlichen $z = u + iv$ kann ein zur imaginären Axe paralleler Streifen $(\alpha \leq u \leq \beta)$ so angenommen werden, dass sich die betreffende Funktion $F(z)$ in der Umgebung jeder endlichen Stelle im Innern und auf der Begrenzung des Streifens regulär verhält und für unendlich grosse, demselben Streifen angehörende Werthe auf die Form*

$$|F(z)| = e^{-\vartheta|v|}f(u, v) \tag{31}$$

derart gebracht werden kann, dass ϑ eine positive Constante, während f eine positive Veränderliche bezeichnet, welche bei wachsendem $|v|$ endlich bleibt

oder wenigstens nach Multiplikation mit $e^{-\varepsilon|v|}$ *diese Eigenschaft bekommt, wie klein auch die positive Zahl* ε *angenommen werden mag.*

Um gleich einige allgemeine Beispiele anzuführen, erinnern wir an die Formel[1]

$$|\Gamma(z)| = e^{-\frac{\pi}{2}|v|}\left|z^{u-\frac{1}{2}}\right|\left|\sqrt{2\pi}+\varepsilon\right|, \tag{32}$$

wo ε eine gegen die Null gleichmässig abnehmende Grösse bezeichnet, falls $|v|$ ohne Ende wächst, während u zwischen beliebigen aber endlichen Grenzen bleibt. Mit Benutzung dieser Formel folgt leicht

$$|G(z)| = e^{-(m+n)\frac{\pi}{2}|v|} f(u, v), \tag{33}$$

wo f die obige Bedeutung hat. Beachtet man die Formel

$$|\sin \pi(z - a)| = e^{\pi|v|} f(u, v),$$

so findet man, dass auch der Ausdruck $G(z)P(z, k)$, falls k die Bedingung $k - 1 < \frac{m+n}{2}$ erfüllt, zu den oben charakterisirten Funktionen $F(z)$ gehört, denn für diesen Ausdruck ist $\vartheta = \left(\frac{m+n}{2} - k + 1\right)\pi$. Die Breite sowie die Lage des Parallelstreifens, auf den z beschränkt werden muss, damit f die angegebene Eigenschaft besitze, kann bei diesen Beispielen ganz beliebig sein. Aber auch wenn die Forderung hinzutritt, dass sich die betreffende Funktion in dem fraglichen Streifen überall im Endlichen regulär verhalten soll, so bleibt bei den angeführten Beispielen noch die grösste Willkürlichkeit hinsichtlich der Lage übrig, wofern die Breite jedesmal passend beschränkt wird.

Betrachtet man nun das folgende, über eine Funktion der oben angegebenen Beschaffenheit erstreckte Integral

$$\Phi(x\,; a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)x^{-z}dz, \tag{34}$$

dessen Integrationsweg eine unbegrenzte in dem Streifen ($\alpha \leq u \leq \beta$) ge-

[1] Siehe hinsichtlich dieser Formel meine Arbeit *Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung.* Acta math. Bd. 15.

legene gerade Linie ist, so zeigt sich, dass dasselbe in dem durch die Ungleichheiten

$$(35)\qquad -\vartheta + 2\varepsilon \leqq \theta \leqq +\vartheta - 2\varepsilon$$

definirten Bereiche von $x = |x| e^{i\theta}$ gleichmässig convergirt, wenn kleine Umgebungen der Stellen $x = 0$ und $x = \infty$ eventuell ausgeschlossen werden. Setzt man nämlich $z = a + iv$, so folgt

$$\frac{1}{2\pi} |F(z) x^{-z}| \leqq |x|^{-a} e^{-2\varepsilon |v|} f(a, v),$$

wo f zugleich von x unabhängig ist. In der Reihe

$$(36)\qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+i\nu}^{a+i(\nu+1)} F(z) x^{-z} dz = \Phi(x; a)$$

sind also die absoluten Beträge der einzelnen Glieder beziehungsweise nicht grösser als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} |x|^{-a} \int_{\nu}^{\nu+1} e^{-2\varepsilon |v|} f(a, v) dv = |x|^{-a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon |v|} . e^{-\varepsilon |v|} f(a, v) dv,$$

welche vermöge der oben angegebenen Eigenschaften von f einen endlichen und, abgesehen von dem Faktor $|x|^{-a}$, von x unabhängigen Werthe hat. Das Integral (34) ist also in dem Bereiche (35) gleichmässig convergent und stellt — da die einzelnen Glieder von (36) monogene Funktionen von x sind — auch selbst eine analytische, daselbst überall (die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ eventuell ausgeschlossen) regulär sich verhaltende Funktion dar.

Mit Hülfe des CAUCHY'schen Satzes findet man, dass das Integral (34) für alle die Bedingung $\alpha \leqq a \leqq \beta$ erfüllenden Werthe von a eine und dieselbe analytische Funktion von x darstellt.

Aus dem Obigen ergiebt sich zugleich die fundamentale Ungleichheit

$$(37)\qquad |\Phi(x; a)| < C(a, \varepsilon) |x|^{-a},$$

wo C eine nur von a und ε abhängige Constante bedeutet. Da aber Φ in dem soeben angegebenen Sinne von a unabhängig ist, so kann C auch als eine bloss von ε abhängige Grösse aufgefasst werden.

Setzt man hier das eine Mal $a = \alpha$, das andere Mal $a = \beta$, so ergeben sich die beiden Formeln

$$\lim_{x=0} x^k \Phi(x\,;\,a) = 0, \qquad \lim_{x=\infty} x^k \Phi(x\,;\,a) = 0,$$

wo k eine beliebige die Bedingung $\alpha < k < \beta$ erfüllende Constante bedeutet; und umgekehrt kann auch eine Ungleichheit (37) aus diesen Gleichungen gefolgert werden.

Hieraus folgt weiter, dass das Integral

$$\int_0^\infty \Phi(x\,;\,a) x^{z-1} dx$$

einen bestimmten Sinn besitzt, wenn $z = u + iv$ einen innerhalb des Streifens $(\alpha < u < \beta)$ gelegenen Werth besitzt. *Wir behaupten nun, dass dieses Integral gleich der ursprünglichen Funktion $F(z)$ ist.* Dies ergiebt sich sehr einfach folgendermassen:

$$\int_0^\infty \Phi(x\,;\,a) x^{z-1} dx = \int_0^1 \Phi(x\,;\,a) x^{z-1} dx + \int_1^\infty \Phi(x\,;\,a) x^{z-1} dx$$

$$= \int_0^1 \Phi(x\,;\,\alpha) x^{z-1} dx + \int_1^\infty \Phi(x\,;\,\beta) x^{z-1} dx$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

wo das letzte Integral über die Begrenzung des Parallelstreifens erstreckt, und somit nach dem CAUCHY'schen Satze gleich $F(z)$ ist.

Jede Funktion $F(z)$ der vorausgesetzten Art lässt sich also gemäss der Formel

$$(38) \qquad F(z) = \int_0^\infty \Phi(x) x^{z-1} dz = \int_0^\infty x^{z-1} \frac{dx}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(\zeta) x^{-\zeta} d\zeta$$

in der Form eines bestimmten Integrals darstellen, wo $z = u + iv$ die Bedingung erfüllt $\alpha < u < \beta$.

Diese Ergebnisse lassen sich folgenderweise umkehren:

Es sei $\Phi(x)$ eine beliebige in dem Bereiche

$$-\vartheta \leq \theta \leq +\vartheta$$

überall (mit Ausnahme von $x = 0$ und $x = \infty$) *regulär sich verhaltende Funktion, welche für solche Werthe* $x = |x|e^{i\theta}$ *die Ungleichheit*

$$(39) \qquad |\Phi(x)| < C|x|^{-a}$$

befriedigt, wo a eine **willkürliche**, *die Bedingung* $\alpha \leq a \leq \beta$ *erfüllende Zahl bedeutet, unter* α, β $(\alpha < \beta)$ *gegebene Grössen verstanden, während C eine nicht nur von x sondern auch von a unabhängige Grösse ist.*

Weil der Ausdruck $\Phi(e^{iw})e^{\frac{\alpha+\beta}{2}iw}$, $w = u + iv$, in dem Parallelstreifen $-\vartheta \leq u \leq +\vartheta$ sich überall im Endlichen regulär verhält und dem absoluten Betrage nach kleiner als $Ce^{-\frac{\beta-\alpha}{2}|v|}$ ist, so stellt auf Grund des schon Dargelegten das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Phi(e^{iw})e^{\frac{\alpha+\beta}{2}iw} t^{-w}\,dw = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \Phi(\xi)\xi^{z-1}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}F(z),$$

$$-\vartheta \leq a \leq +\vartheta, \qquad e^{iw} = \xi, \qquad t = e^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-z\right)i},$$

eine in dem Gebiete $-\frac{\beta-\alpha}{2} \leq \theta \leq +\frac{\beta-\alpha}{2}$ von $t = |t|e^{i\theta}$, d. h. in dem Streifen $\alpha \leq u \leq \beta$ der Ebene der Veränderlichen $z = u + iv$, regulär sich verhaltende Funktion dar, welche die Ungleichheit $|F(z)| < K|t|^{-a}$ für $-\vartheta \leq a \leq +\vartheta$, und somit auch $|F(z)| < Ke^{-\vartheta|v|}$ erfüllt. Mittelst dieser Formel kann also jede Funktion $\Phi(x)$ der fraglichen Beschaffenheit in eine Funktion $F(z)$ der am Anfang dieses Paragraphen angegebenen Art transformirt werden. Multiplicirt man das Integral der linken Seite mit $t^{\zeta-1}dt$ und integrirt von $t = 0$ bis $t = \infty$, so muss das Resultat nach dem schon Dargelegten gleich $\Phi(e^{i\zeta})e^{\frac{\alpha+\beta}{2}i\zeta}$ sein. Macht man in der so entstehenden Formel die obigen Substitutionen und setzt zugleich $e^{i\zeta} = x$, so folgt

$$(40) \quad \Phi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)x^{-z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-z}\,dz\int_0^\infty \Phi(\xi)\xi^{z-1}\,d\xi, \quad \alpha \leq a \leq \beta,$$

wo $x = |x|e^{i\theta}$ die Bedingung $-\vartheta < \theta < +\vartheta$ erfüllt.

Rechnen wir alle Funktionen, welche die Eigenschaften von $F(z)$ besitzen zu einer *ersten* Funktionsklasse, während eine *zweite* Klasse aus sämmtlichen Funktionen gebildet wird, welche die Eigenschaften von $\Phi(x)$ besitzen, so entsprechen die Funktionen der beiden Klassen einander eindeutig: jede Funktion $F(z)$ der ersten Klasse wird durch die Formel (40) in eine Funktion der zweiten Klasse transformirt, und umgekehrt wird auch jede Funktion $\Phi(x)$ der zweiten Klasse durch die Formel (38) in eine Funktion der ersten Klasse transformirt. Die eine dieser Formeln ist eine nothwendige Folge der anderen. Das *Reciprocitätsgesetz*, welches hier herrscht, tritt aus den Formeln selbst hervor.

Man hat beispielsweise die bekannten Formeln

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx, \qquad 0 < z < +\infty,$$

$$\Gamma(z)\Gamma(s-z) = \Gamma(s) \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{(1+x)^s} dx, \qquad 0 < z < s,$$

wo sich das Zeichen $<$ auf die reellen Theile der betreffenden Grössen bezieht. Somit gelten auch die reciproken Formeln

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z) x^{-z} dz, \qquad 0 < a < +\infty, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\Gamma(s)}{(1+x)^s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z)\Gamma(s-z) x^{-z} dz, \qquad 0 < a < s, \quad -\pi < \theta < +\pi,$$

welche man auch mit Hülfe des CAUCHY'chen Satzes direkt verificiren kann.

Die Ausdrücke e^{-x} und $(1+x)^{-s}$ können als die einfachsten hypergeometrischen Funktionen betrachtet werden. Nehmen wir in der Formel (40) $F(z) = \boldsymbol{G}(z)P(z\,,\,k)$ an, $k - 1 < \frac{m+n}{2}$, so ist $\Phi(x)$ nach den vorigen Paragraphen — wenigstens bis auf einen dort mit R bezeichneten Ausdruck — Integral einer hypergeometrischen Differentialgleichung, welches k willkürliche Constanten enthält. Die reciproke Formel (38) sagt nun aus, dass das auf der rechten Seite stehende, über eine solche hypergeometrische Funktion erstreckte Integral durch die Gammafunktion ausgedrückt werden kann. Man findet hieraus, *dass die Menge der bestimmten Integrale,*

welche auf die Gammafunktion zurückführbar sind, durch die obigen Entwicklungen ausserordentlich vermehrt worden ist. Diese Ergebnisse lassen sich übrigens auch auf hypergeometrische Funktionen mehrerer Veränderlichen übertragen.

§ 8.

Wir müssen auf eine eingehendere Untersuchung der Lösungen hypergeometrischer Differentialgleichungen von den in den vorigen Paragraphen entwickelten Gesichtspunkten aus bei dieser Gelegenheit verzichten. Ein paar interessante Punkte sollen jedoch hervorgehoben werden.

Ist in der Differentialgleichung (12), resp. in dem Ausdrucke $\boldsymbol{G}(z)$, die Zahl $m > n$, so kann man über die willkürlichen Constanten von $P(z, k)$ so verfügen, dass sich $\boldsymbol{G}(z)P(z, k)$, $k - 1 < \frac{m+n}{2}$, an den sämmtlichen Stellen (21) regulär verhält. Bedeutet nun $F(z)$ in (40) diesen Ausdruck sowie a eine die reellen Theile der Grössen (20) übertreffende Zahl, *so hat das Integral $\Phi(x)$ mit e^{-x} die Eigenschaft gemein, dass es, mit einer beliebig hohen Potenz von x multiplicirt, gegen die Null convergirt, falls x innerhalb des Convergenzbereiches von Φ sich der Stelle $x = \infty$ annähert.* Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich aus der fundamentalen Ungleichheit (37), wenn man a hinreichend gross annimmt, was in diesem Falle offenbar gestattet ist. Hierzu gehört beispielsweise das folgende, zuerst von Herrn PINCHERLE[1] betrachtete Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(z-\rho_1)\ldots\Gamma(z-\rho_m)}{\Gamma(z-\sigma_1)\ldots\Gamma(z-\sigma_n)} x^{-z} dz, \qquad m > n.$$

Ist fortwährend $m > n$, so ist bekanntlich $x = \infty$ eine Stelle der Unbestimmtheit für die Differentialgleichung. Weil $x = 0$ die einzige im Endlichen gelegene singuläre Stelle ist, so können die Integrale derselben

[1] Siehe *Sulle funzioni ipergeometriche generallizate.* Rend. d. Accad. dei Lincei. Vol. IV. fasc. 12, 13. S. 792—799. 1888. Herr PINCHERLE zeigt, dass das obige Integral einer hypergeometrischen Differentialgleichung genügt. Hier kommt meines Wissens zum ersten Male in der Litteratur eine hypergeometrische Funktion in der Form eines bestimmten, über *Gammafunktionen* erstreckten Integrals vor.

durch beständig convergirende, nach wachsenden Potenzen von x fortschreitende Reihen dargestellt werden, wie dies übrigens auch in § 4 gezeigt wurde. Die Reihenentwicklungen von den in der Form (40) darstellbaren Integralen ergeben sich, indem man den Integrationsweg unter Berücksichtigung des CAUCHY'schen Satzes ohne Ende in der negativen Richtung der reellen Axe verschiebt, wobei das Integral (40) gegen die Null convergirt. Verschiebt man ihn dagegen in positiver Richtung, *so ergiebt sich eine nach abnehmenden Potenzen fortschreitende asymtotische Entwicklung von Φ, deren Restglied durch das Integral selbst dargestellt wird.*

Setzt man Beispielsweise unter der Voraussetzung $\rho_1 < \rho_2 < a < \sigma$:

$$\Phi(x\,;\,a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z-\rho_1)\Gamma(z-\rho_2)\Gamma(1+\sigma-z)x^{-z}dz$$

und nimmt der Einfachheit halber an, dass $\rho_1 - \rho_2$ keine ganze Zahl ist, so hat man für Φ einerseits die beständig convergirende, von Logarithmen freie Reihenentwicklung

$$x^{-\rho_1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-x)^\nu}{|\underline{\nu}}\Gamma(\rho_1-\rho_2-\nu)\Gamma(1+\sigma-\rho_1+\nu)$$

$$+\,x^{-\rho_2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-x)^\nu}{|\underline{\nu}}\Gamma(\rho_2-\rho_1-\nu)\Gamma(1+\sigma-\rho_2+\nu)$$

und andererseits die im Bereiche $-\frac{3\pi}{2} < \theta < +\frac{3\pi}{2}$ gültige asymtotische Darstellung

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sigma+1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{(-x)^{-\nu}}{|\underline{\nu}}\Gamma(1+\sigma-\rho_1+\nu)\Gamma(1+\sigma-\rho_2+\nu) + \Phi(x\,;\,a+k).$$

Das Restintegral besitzt nach § 6 die Eigenschaft $\lim\limits_{x=\infty} x^p\,\Phi(x\,;\,a+k) = 0$, falls $k > p - a$ angenommen wird, wobei p eine beliebig grosse positive Zahl sein kann. Der Convergenzbereich von Φ ist $-\frac{3\pi}{2} < \theta < +\frac{3\pi}{2}$ und die Differentialgleichung:

$$\left(x\frac{d}{dx}+\rho_1\right)\left(x\frac{d}{dx}+\rho_2\right)\Phi = \left(x\frac{d}{dx}+\sigma\right)x\Phi.$$

Bei näherer Erwägung der in den beiden letzten Paragraphen angestellten Untersuchungen findet man, dass dieselben zugleich eine zur Herleitung von zahlreichen asymtotischen Formeln brauchbare Methode enthalten, welche bei weitem nicht auf die Theorie der hypergeometrischen Funktionen allein beschränkt ist. Das Wesentliche dabei ist der Umstand, das die zu berechnende Funktion *oder eventuell ihr Logarithmus* als eine der zweiten Klasse angehörende Funktion $\Phi(x)$ betrachtet werden kann, für welche die entsprechende Funktion $F(z)$ der ersten Klasse in einem zur imaginären Axe parallelen Streifen von hinreichender Ausdehnung in der positiven oder negativen Richtung der reellen Axe (je nachdem es sich um grosse oder kleine x handelt) den Charakter einer rationalen Funktion besitzt und überdies die Eigenschaft (31) nicht einbüsst. Die asymptotische Formel für Φ, resp. $\log \Phi$, geht alsdann durch Verschiebung des Integrationsweges von (40) hervor, wobei man nur die zu den passirten Polen gehörenden Residuen zu berechnen hat.

In einer nachfolgenden Arbeit wollen wir für den Logarithmus ganzer Funktionen von endlichem Geschlecht eine Formel darstellen, aus der man mittelst der angedeuteten Methode eine grosse Menge asymptotischer Formeln für solche Funktionen erhalten kann. Die Stirling'sche Formel ist die einfachste unter den unzähligen daraus sich ergebenden Entwicklungen.

Helsingfors, April 1899.

EINE FORMEL FÜR DEN LOGARITHMUS TRANSCENDENTER FUNCTIONEN VON ENDLICHEM GESCHLECHT

VON

H.J. MELLIN
in HELSINGFORS

§ 1.

Im Nachfolgenden wird der Logarithmus der betreffenden Funktionen in der Form eines bestimmten Integrals dargestellt, welches als specieller Fall in einer viel allgemeineren Klasse von bemerkenswerthen Integralen [1] der Form

$$(1) \qquad I(x\,;a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)x^z dz$$

enthalten ist, wo $F(z)$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften bezeichnet. Erstens soll sich $F(z)$ regulär verhalten in der Umgebung jeder endlichen Stelle im Innern und auf der Begrenzung eines gewissen zur imaginären Axe parallelen Streifens, in welchem auch der Integrationsweg gelegen ist, und zweitens soll $F(z)$ für unendlich grosse, demselben Streifen angehörige Werthe $z = u + iv$ auf die Form

$$(2) \qquad |F(z)| = e^{-\vartheta|v|}f(u\,,v)$$

derart gebracht werden können, dass ϑ eine positive Constante, während

[1] Siehe § 7 meiner vorangehenden Arbeit *Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen.*

$f(u, v)$ eine Variable bedeutet, welche bei wachsendem $|v|$ endlich bleibt oder wenigstens nach Multiplikation mit $e^{-\varepsilon|v|}$ diese Eigenschaft bekommt, *wie klein auch die positive Zahl* ε *angenommen werden mag.* Unter diesen Voraussetzungen zeigt sich leicht,[1] dass $I(x; a)$ in jedem endlichen Theile des durch die Ungleichheiten

$$(3) \qquad -\vartheta + 2\varepsilon < \theta \leqq +\vartheta - 2\varepsilon$$

definirten Bereiches von $x = |x|e^{i\theta}$ gleichmässig convergirt und zugleich die fundamentale Ungleichheit erfüllt

$$(4) \qquad |I(x; a)| < C(a, \varepsilon)|x|^a,$$

wo C eine nur von a und ε abhängige positive Constante bedeutet.

Ein einfaches Beispiel hiervon bildet das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z}\frac{x}{z}\, dz,$$

bei welchem $\vartheta = \pi$, und a keine ganze Zahl sein darf. Der Convergenzbereich dieses Integrals ist also $-\pi < \theta < +\pi$, d. h. die ganze x-Ebene mit Ausschluss der negativen Hälfte der reellen Axe. Der Werth des Integrals ist im allgemeinen von a abhängig; insbesondere hat man für $0 < a < 1$:

$$(5) \qquad \log(1 + x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a+i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z}\frac{x^z}{z}\, dz, \qquad 0 < a < 1.$$

Diese Formel ergiebt sich, indem man den Integrationsweg z. B. in der positiven Richtung der reellen Axe ohne Ende verschiebt und die zu den passirten Polen des Integranden gehörigen Residuen summirt. Dabei nähert sich das Integral für $|x| < 1$ der Grenze Null, während zugleich auf der rechten Seite die Reihenentwicklung von $\log(1 + x)$ erscheint.

Wird der Integrationsweg in positiver Richtung so weit verschoben, dass a einen zwischen den ganzen Zahlen $p + 1$ und $p + 2$ gelegenen Werth erhält, so folgt aus (5)

[1] Siehe § 7 meiner vorhergehenden Arbeit.

$$(6) \qquad \log(1+x) + \sum_{\lambda=1}^{p} (-1)^{\lambda} \frac{x^{\lambda}}{\lambda} = (-1)^{p} \frac{x^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} \frac{x^{z}}{z}\, dz,$$

$$p+1 < a < p+2.$$

Mit Benutzung dieser Formel können wir nun den Logarithmus einer ganzen Funktion vom Geschlechte p:

$$(7) \qquad \Pi(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{a_\nu}\right) e^{-\frac{x}{a_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^2 + \dots + (-1)^p \frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p}$$

in der Form eines bestimmten Integrals darstellen. Ersetzt man zu dem Ende in (6) x durch $\frac{x}{a_\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots, \infty$, so folgt durch Addition der so entstehenden Gleichungen

$$(8) \qquad \log \Pi(x) = (-1)^p S(p+1) \frac{x^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} S(z) \frac{x^z}{z}\, dz,$$

$$p+1 < a < p+2,$$

wo

$$(9) \qquad S(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^z}.$$

Hierbei muss indess vorausgesetzt werden, dass sich eine positive Zahl $\vartheta < \pi$ so angeben lässt, dass die Grössen $a_\nu = |a_\nu| e^{i\theta_\nu}$ die Bedingung erfüllen

$$(10) \qquad -\vartheta \leqq \theta_\nu \leqq +\vartheta, \qquad \nu = 1, 2, \dots, \infty.$$

Alsdann sind von einer gewissen Stelle an die absoluten Beträge der einzelnen Glieder von $S(z)$ beziehungsweise nicht grösser als die entsprechenden Glieder der convergenten Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu^{p+1}} \right| e^{\vartheta |v|},$$

wofern zugleich der reelle Theil von $z = u + iv$ nicht kleiner als $p+1$ ist. Somit ist

$$\left| \frac{\pi}{\sin \pi z} S(z) \right| = e^{-(\pi - \vartheta)|v|} f(u, v).$$

wo f bei wachsendem $|v|$ endlich bleibt. Hieraus folgt nun, dass das Integral (8) gleichmässig convergirt in jedem endlichen Theile des durch

$$(11)\qquad -(\pi-\vartheta) < \theta < +(\pi-\vartheta)$$

definirten Bereiches von $x = |x|e^{i\theta}$.

In diesem Bereiche (11) *stellt also die obige Formel* (8) *unter der Voraussetzung* (10) *den Logarithmus von* $\Pi(x)$ *dar.*

Bezeichnet ρ den *Convergenzexponenten* von $S(z)$, d. h. jene positive Zahl, welche dadurch eindeutig bestimmt ist, dass von den beiden Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|^{\rho-\varepsilon}},\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|^{\rho+\varepsilon}}$$

die erstere divergirt, die letztere convergirt, wie klein auch ε sein mag, so besitzt ρ jedenfalls einen Werth in dem von p bis $p+1$ reichenden Intervall, die Grenzen nicht ausgeschlossen. Ist nun $\rho < p+1$, so kann der Integrationsweg zwischen ρ und $p+1$ verlegt werden. Nach dem Cauchy'schen Satze folgt dann aus (8):

$$(8')\qquad \log \Pi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi z}S(z)\frac{x^z}{z}dz, \qquad \rho < a < p+1.$$

Bezeichnet man durch $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_\nu, \ldots$ die sämmtlichen von einander *verschiedenen* Nullstellen von $\Pi(x)$ und mit $m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots$ ihre resp. Ordnungen, so ist

$$(7')\qquad \Pi(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{\alpha_\nu}\right)e^{-\frac{x}{\alpha_\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\alpha_\nu}\right)^2+\ldots+(-1)^p\frac{1}{p}\left(\frac{x}{\alpha_\nu}\right)^p}\right\}^{m_\nu},$$

$$(9')\qquad S(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{m_\nu}{\alpha_\nu^z}.$$

Es verdient besonders erwähnt zu werden, dass die obige Formel auch für Logarithmen solcher Producte unverändert bestehen bleibt, bei denen die m_ν nicht mehr *positive ganze* Zahlen sind. Alsdann hört das Produkt indess auf, eine ganze Funktion zu sein, und insbesondere hört seine Ein-

deutigkeit auf, falls die m_ν nicht alle ganze Zahlen sind. Unter transcendenten Funktionen von endlichem Geschlecht haben wir in der Überschrift dieser Arbeit alle in der Formel (7') enthaltenen ein- und mehrdeutigen Funktionen gemeint, obwohl wir weiterhin die ganzen transcendenten Funktionen vorzugsweise berücksichtigen werden.

Eine nach wachsenden Potenzen von x fortschreitende Entwicklung von $\log \Pi(x)$ ergiebt sich offenbar, indem man den Integrationsweg ohne Ende in positiver Richtung verschiebt und die zu den passirten Polen gehörigen Residuen summirt. Die Bedeutung unserer Formel liegt aber nicht hierin, sondern vielmehr in dem Umstande, dass der Integrationsweg auch in der entgegengesetzten Richtung in vielen, und zwar in namhaft zahlreicheren Fällen, als man es auf den ersten Blick anzunehmen geneigt wäre, verschoben werden kann, wobei eine nach absteigenden Potenzen fortschreitende, für grosse Werthe von x brauchbare *asymtotische* Entwicklung von $\log \Pi(x)$ hervorgeht. Zu dem Ende hat man vor allem zu entscheiden, ob die durch die Reihe (9) definirte Funktion $S(z)$ ausserhalb des Convergenzbereiches der Reihe existirt, sowie eventuell von welcher Beschaffenheit die singulären Stellen von $S(z)$ sind, da ja die Benutzung des CAUCHY'schen Satzes auch von diesem Umstande abhängt. *Hiernach erhalten die Dirichlet'schen Reihen der Form* (9) *auch für die Theorie der ganzen transcendenten Funktionen ein ganz besonderes Interesse.* Obwohl die zu erledigenden vorläufigen Untersuchungen im allgemeinen grosse Schwierigkeiten darbieten, so giebt es doch auch, wie ich in einer künftigen Arbeit zeigen werde, sehr allgemeine Gattungen DIRICHLET'scher Reihen, bei denen man die Schwierigkeiten überwinden kann. Siehe die Andeutungen im letzten Paragraphen dieser Arbeit.

In der vorliegenden Arbeit werde ich an besonderen Beispielen erläutern, wie sich die oben angedeutete Anwendung der Formel (8) in einzelnen Fällen gestaltet und von welcher Verschiedenheit die dabei sich ergebenden Resultate sein können. In den Paragraphen 2 und 3 handelt es sich eigentlich nur um die beiden einfachsten Fälle, wo die Nullstellen von $\Pi(x)$ eine arithmetische oder eine geometrische Reihe bilden. Die Anwendung der betreffenden Formel führt zu zwei bei dem ersten Blick so verschiedenen Ergebnissen, wie es die STIRLING'sche Formel und die lineare Transformation einer Thetafunktionen sind. Die DIRICHLET'schen Reihen, welche resp. diesen beiden Fällen entsprechen, nämlich

$$\zeta(z\,,\,w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(w+\nu)^z} \quad \text{und} \quad \frac{a}{a^z - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{a^{\nu z}} \qquad a > 1,$$

bilden zugleich, wie aus § 5 zu finden ist, die einfachsten Typen von zwei allgemeinen Gattungen DIRICHLET'scher Reihen, durch welche, ebenso wie durch diese Reihen, in der ganzen z-Ebene existirende eindeutige Funktionen definirt werden, welche sich an jeder endlichen Stelle wie rationale Funktionen verhalten.

§ 2.

Setzt man

$$(12) \qquad P_n(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\nu}\right)^2 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(\frac{x}{\nu}\right)^{n+1}} \right\}^{\nu^n},$$

so ist für dieses Produkt $\rho = p = n + 1$, $\vartheta = 0$, $m_\nu = \nu^n$,

$$S(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{z-n}} = \zeta(z-n),$$

und somit nach (8')

$$\log P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} \zeta(z-n) \frac{x^z}{z}\, dz, \qquad n + 1 < a < n + 2,$$

oder auch

$$(13) \quad (-1)^n \log P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} \zeta(z) \frac{x^{z+n}}{z+n}\, dz = I_n(x\,;a), \qquad 1 < a < 2,$$

für alle Werthe $x = |x| e^{i\theta}$, welche die Bedingung erfüllen:

$$-\pi < \theta < +\pi.$$

Bekanntlich ist $(z-1)\zeta(z)$ eine ganze transcendente Funktion. Überdies besitzt aber diese Funktion noch die folgende Eigenschaft, die hier als bekannt vorausgesetzt wird: Beschränkt man die Variable z auf einen beliebigen, zur imaginären Axe parallelen Streifen von endlicher Breite, so nähert sich $\zeta(z)$, mit einer passenden Potenz von z multiplicirt, bei wachsendem $|z|$ der Grenze Null. Hieraus folgt aber, dass der Integrations-

weg von $I_n(x\,;\,a)$ unter Berücksichtigung des CAUCHY'schen Satzes in negativer Richtung beliebig weit verschoben werden kann, und zwar convergirt das Integral fortwährend gleichmässig in jedem endlichen Theile der x-Ebene, welcher keinen Punkt mit der negativen Hälfte der reellen Axe gemeinsam hat. Die zu den Polen des Integranden gehörenden Residuen ergeben sich leicht mit Benutzung der Formeln

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta'(0) = -\log\sqrt{2\pi}, \quad \zeta(-2\nu) = 0, \quad \zeta(1-2\nu) = (-1)^\nu \frac{B_\nu}{2\nu},$$
$$(z-1)\zeta(z) = 1 - \psi(1)(z-1) + \ldots .$$

Bei der Annahme $n = 0$ ergiebt sich im Besonderen

$$\log\Gamma(x+1) = \log\sqrt{2\pi} + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x \tag{14}$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu(2\nu-1)} x^{1-2\nu} - I_0(x\,;\,a),$$
$$-2k-1 < a < -2k+1.$$

Bei dieser Herleitung der Stirling'schen Formel wird zugleich die Gültigkeit derselben für die ganze x-Ebene mit Ausnahme der negativen Hälfte der reellen Axe erwiesen.

Ist $n > 0$, so ergeben sich, jenachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist, die folgenden Formeln

$$\log P_{2n}(x) = \zeta'(-2n) - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\log x \tag{15}$$
$$+ \left(\psi(1) + \frac{1}{2n+1}\right)\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2}\frac{x^{2n}}{2n} + \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{2\nu} \frac{x^{2n+1-2\nu}}{2n+1-2\nu} + I_{2n}(x\,;\,a),$$
$$-2k-1 < a < -2k+1 < -2n.$$

$$\log P_{2n-1}(x) = \zeta'(1-2n) + \left(\frac{x^{2n}}{2n} + (-1)^n \frac{B_n}{2n}\right)\log x \tag{16}$$
$$-\left(\psi(1) + \frac{1}{2n}\right)\frac{x^{2n}}{2n} + \frac{1}{2}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + {\sum_{\nu=1}^{k}}' (-1)^\nu \frac{B_\nu}{2\nu}\frac{x^{2n-2\nu}}{2n-2\nu} - I_{2n-1}(x\,;\,a),$$
$$-2k-1 < a < -2k+1 \leqq -2n+1.$$

In der letzten Formel deutet der Strich an, dass das Glied, wo $\nu = n$, nicht vorkommt.

Setzt man $a = -2k - 1 + \delta$, unter δ eine beliebig kleine positive Zahl verstanden, und benutzt die fundamentale Ungleichheit (4), so ergiebt sich, *dass sich das Restintegral in jeder der drei Formeln bei wachsendem* $|x|$ *der Grenze Null nähert, und zwar so schnell, dass noch die Grösse*

$$|x^{m-2\delta} I(x\,;a)| < C(a\,,\varepsilon)\,|x|^{-\delta},$$

wo m *den Überschuss der Zahl* $2k + 1$ *über resp.* $0\,,\,2n\,,\,2n - 1$ *bedeutet, gegen die Null convergirt.* Hierbei muss das Argument von x die Bedingung $-\pi + \varepsilon \leq \theta \leq +\pi - \varepsilon$ erfüllen, unter ε eine beliebig kleine, aber bestimmte positive Zahl verstanden.

Setzt man

$$(17) \qquad \Pi_n(x) = \frac{e^{\pi_n(x)}}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left\{\left(1 + \frac{x}{\nu}\right)e^{-\frac{x}{\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\nu}\right)^2 + \ldots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{\nu}\right)^{n+1}}\right\}^{(\nu,\,n)}} = \Gamma_n(x + 1),$$

$$(\nu\,,\,n) = \frac{\nu(\nu + 1)\ldots(\nu + n - 1)}{1\,.\,2\ldots n},$$

so hat man bei passender Bestimmung der ganzen rationalen Funktionen $\pi_n(x)$, wie aus meiner Arbeit[1] über $\zeta(s\,,w)$ zu finden ist, eine unendliche Folge von Funktionen mit den Eigenschaften

$$\Pi_n(x + 1) = \frac{\Pi_n(x)}{\Pi_{n-1}(x)}, \qquad n = 1\,,\,2\,,\ldots,\,\infty.$$

Da die DIRICHLET'schen Reihen

$$S_n(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu(\nu + 1)\ldots(\nu + n - 1)}{1\,.\,2\ldots n}\,\frac{1}{\nu^z},$$

welche in der Formel (8) diesen Produkten entsprechen, durch die Funktion $\zeta(z)$ offenbar ausgedrückt werden können, so bietet die Herleitung von asymptotischen Formeln für die Logarithmen dieser Π-Funktionen keine neuen Schwierigkeiten dar. Dabei ergeben sich zugleich als specielle Fälle asymptotische Formeln für solche Ausdrücke wie die folgenden

[1] Acta Soc. Sc. Fennicae. Tome 24.

$$\underline{|m} = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\, m,$$

$$\underline{|m}_1 = \underline{|1}\ \underline{|2}\ \underline{|3}\,.\,.\,.\,\underline{|m},$$

$$\underline{|m}_2 = \underline{|1}_1\ \underline{|2}_1\ \underline{|3}_1\,.\,.\,.\,\underline{|m}_1,$$

etc.

§ 3.

Setzt man

$$\Pi_n(x) = \prod_{\nu=0}^{\infty}\{1 + q^{2\nu+1}x\}^{(2\nu+1)^n}, \qquad q = e^{\pi i \tau} < 1, \tag{18}$$

so ist bei diesem Produkt $\rho = p = 0$, $m_\nu = (2\nu + 1)^n$ und $\vartheta = 0$, falls q eine reelle positive Zahl, was im Nachfolgenden angenommen wird, sowie

$$S(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu + 1)^n e^{(2\nu+1)\pi i \tau z} = \left(\frac{1}{\pi i z}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial\tau^n}\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{(2\nu+1)\pi i \tau z} = \left(\frac{1}{\pi i}\right)^n z^{-n}\frac{\partial^n}{\partial\tau^n}\frac{i}{2\sin\pi\tau z}.$$

Somit ist

$$\log \Pi_n(x) = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{\pi i}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial\tau^n}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi z}\,\frac{1}{\sin\pi\tau z}\,\frac{x^z}{z^{n+1}}\,dz, \tag{19}$$

$$0 < a < 1,$$

und zwar gilt diese Formel bei positivem q für die ganze x-Ebene mit Ausnahme der negativen Hälfte der reellen Axe.

Wir sind also zur Untersuchung des folgenden Integrals geführt

$$I(x\,;\,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi z}\,\frac{1}{\sin\pi\tau z}\,\frac{x^z}{z^{n+1}}\,dz, \qquad 0 < a < 1. \tag{20}$$

Die Pole des Integranden sind $z = \nu$ und $z = \frac{\nu}{\tau}$ für $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$; und sie bilden also zwei arithmetische Reihen, deren entsprechende Punkte auf der reellen, beziehungsweise auf der imaginären Axe liegen, weil τ nach der Voraussetzung rein imaginär ist. Nach dem CAUCHY'schen Satze ist $I(x\,;\,a)$ gleich dem Integral $I(x\,;\,-a)$, dessen Integrationsweg zwischen 0 und -1 läuft, vermehrt um die Residuen R_ν, welche zu den auf der

imaginären Axe liegenden Polen gehören. Diese Pole sind, abgesehen von der $(n+3)$-fachen Stelle $z=0$, alle einfach. Andererseits geht aus der Form des Integrals hervor, dass

$$I(x\,;-a) = (-1)^{n+1} I\left(\frac{1}{x}\,;a\right).$$

Man hat also

$$(21) \qquad I(x\,;a) + (-1)^n I(x^{-1}\,;a) = R_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(R_\nu + R_{-\nu}),$$

wo

$$R_\nu + R_{-\nu} = (-1)^\nu \frac{\tau^n}{\nu^{n+1}} \frac{x^{\frac{\nu}{\tau}} + (-1)^n x^{-\frac{\nu}{\tau}}}{\sin \pi \frac{\nu}{\tau}},$$

während R_0 die Form hat

$$R_0(\tau, \log x) = C_{n+2}(\tau)(\log x)^{n+2} + C_n(\tau)(\log x)^n + C_{n-2}(\tau)(\log x)^{n-2} + \ldots,$$

wo die C rationale Funktionen von τ sind. Das letzte Glied ist von x unabhängig, falls n eine gerade Zahl ist.

Verschiebt man den Integrationsweg von (20) ohne Ende in der positiven Richtung der reellen Axe, so nähert sich $I(x\,;a)$ bei der Annahme $|x| < e^{\pi|\tau|}$ der Grenze Null, während sich zugleich auf der rechten Seite eine Reihenentwicklung für $I(x\,;a)$ ergiebt. Setzt man diese Reihenentwicklung in (21) ein, so hat man die Formel

$$(22) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^{n+1}} \frac{x^\nu + (-1)^n x^{-\nu}}{\sin \pi\nu\tau}$$

$$= -R_0(\tau, \log x) + \tau^n \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^{n+1}} \frac{x^{\frac{\nu}{\tau}} + (-1)^n x^{-\frac{\nu}{\tau}}}{\sin \pi\nu \frac{-1}{\tau}},$$

deren linke Seite für $e^{-\pi|\tau|} < |x| < e^{\pi|\tau|}$ und rechte Seite für $-\pi < \theta < +\pi$ convergirt. — Setzt man $x = 1$ und n gleich einer geraden Zahl, so ist im Besonderen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^{2n+1}} \frac{1}{\sin \pi\nu\tau} = r(\tau) + \tau^{2n} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^{2n+1}} \frac{1}{\sin \pi\nu \frac{-1}{\tau}},$$

wo $r(\tau)$ rational in τ ist. Obwohl τ bei der Herleitung dieser Formel als eine rein imaginäre positive Zahl vorausgesetzt wurde, so convergiren doch die beiden Seiten derselben gleichmässig in jedem endlichen Theile der oberhalb der reellen Axe liegenden Halbebene. Bezeichnet man die linke Seite, welche offenbar die Periode 2 besitzt, mit $\varphi(\tau)$, so besitzt diese Funktion die beiden, an die automorphen Funktionen erinnernden Eigenschaften

$$\varphi(\tau + 2) = \varphi(\tau),$$

$$\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = r\left(-\frac{1}{\tau}\right) + \tau^{2n}\varphi(\tau).$$

Was endlich die aus (19) sich ergebenden asymptotischen Formeln betrifft, so wollen wir bei dieser Gelegenheit nur den Fall $n = 0$ näher betrachten. In diesem Falle erhält man für R_0 den Ausdruck

$$R_0(\tau, \log x) = \frac{(\log x)^2}{2\pi\tau} + \frac{\pi}{6}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)$$

und sodann aus (19) und (21) die Formel

$$\log\Pi_0(x) = -\log\Pi_0(x^{-1}) - \frac{(\log x)^2}{4\pi i\tau} + \frac{\pi i}{12}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{2i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\,\frac{x^{\frac{\nu}{\tau}} + x^{-\frac{\nu}{\tau}}}{\sin\pi\nu\dfrac{-1}{\tau}}, \tag{23}$$

welche zeigt, wie sich $\Pi_0(x)$ für grosse Werthe von x verhält. Beschränkt man nämlich $x = |x|e^{i\theta}$ auf den Bereich $-\pi + \varepsilon \leqq \theta \leqq +\pi - \varepsilon$, so bleibt die auf der rechten Seite stehende Reihe endlich; denn es ergiebt sich leicht

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\,\frac{x^{\frac{\nu}{\tau}} + x^{-\frac{\nu}{\tau}}}{\sin\pi\nu\dfrac{1}{\tau}}\right| < -\frac{2}{1 - e^{\frac{2\pi}{i\tau}}}\log\left(1 - e^{\frac{\varepsilon}{i\tau}}\right),$$

unter τ eine rein imaginäre positive Zahl verstanden.

Diese Formel (23) kann aber auch von einem anderen Gesichtspunkte aus betrachtet werden. Sie ist in der That zugleich eine Formel für die lineare Transformation einer gewissen Thetafunktion. Setzt man nämlich

$$\theta(v\,;\,\tau)\,\Pi_0(e^{2\pi iv})\Pi_0(e^{-2\pi iv}) = \prod_{\nu=0}^{\prime}\{1 + q^{2\nu+1}e^{2\pi iv}\}\{1 + q^{2\nu+1}e^{-2\pi iv}\},$$

wo $q = e^{\pi i\tau}$, so ist

$$\log\theta(v\,;\,\tau) = \frac{1}{2i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\,\frac{e^{2\pi i\nu v} + e^{-2\pi i\nu v}}{\sin\pi\nu\tau}.$$

Aus (23) ergiebt sich nun in der That, wenn man $x = e^{2\pi iv}$ setzt:

$$\theta\left(\frac{v}{\tau}\,;\,-\frac{1}{\tau}\right) = \theta(v\,;\,\tau)e^{\frac{\pi iv^2}{\tau} - \frac{\pi i}{12}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)}.$$

§ 4.

Auf Grund der obigen Ergebnisse werden wir ungezwungen veranlasst, die Formel (8) auf die zuerst von Herrn Appell eingehender untersuchten Produkte [1]

(24) $$\Pi(x\,;\,\tau_1\,,\ldots,\,\tau_n) = \prod_{\nu_1,\ldots,\nu_n=0}^{\infty}\{1 + xq_1^{2\nu_1+1}\ldots q_n^{2\nu_n+1}\}$$

$$q_\mu = e^{\pi i\tau_\mu},\quad |q_\mu| < 1,\quad \mu = 1\,,2\,,\ldots,\,n,$$

anzuwenden, wo die Indices ν unabhängig von einander alle positiven ganzzahligen Werthe von der Null an durchlaufen. Es wird sich ergeben, dass die obige Formel für die lineare Transformation der betreffenden Thetafunktion ein specieller Fall einer für diese allgemeineren Produkte gültigen Formel ist.

Die Dirichlet'sche Reihe, welche in der Formel (8) dem Produkte (24) entspricht, lautet

$$S(z) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n=0}^{\prime} q_1^{(2\nu_1+1)z}\ldots q_n^{(2\nu_n+1)z}$$

$$= \frac{q_1^z}{1 - q_1^{2z}}\cdots\frac{q_n^z}{1 - q_n^{2z}} = \left(\frac{i}{2}\right)^n\frac{1}{\sin\pi\tau_1 z}\cdots\frac{1}{\sin\pi\tau_n z}.$$

[1] Mathematische Annalen. Bd. 19.

Jetzt beabsichtige ich aber zugleich, eine solche Anwendung der betreffenden Formel zu geben, bei welcher die den Argumenten der Grössen a_ν und x auferlegten Beschränkungen durch eine andere Wahl des Integrationsweges aufgehoben werden, während allerdings der absolute Betrag von x eine früher nicht stattgefundene Bedingung erfüllen muss. In der Formel (8) müssen die Argumente der Grössen a_ν die Bedingung (10) und das von x die Bedingung (11) erfüllen, während der absolute Betrag von x keiner Beschränkung unterliegt. Benutzt man aber statt der auf der reellen Axe senkrecht stehenden Geraden $u = a$ als Integrationsweg eine die Stellen $z = p + 2, p + 3, \ldots, \infty$ umschliessende Curve $(p + 2, \infty)$, deren kein Theil ausserhalb des Convergenzbereiches der Reihe (9) liegen darf, etwa die gebrochene Linie

$$+\infty - i\omega \;\text{——}\; a - i\omega \;\text{——}\; a + i\omega \;\text{——}\; +\infty + i\omega$$

$$p + 1 < a < p + 2, \quad \text{eventuell} \quad \rho < a < p + 1,$$

so unterliegen in der Formel

$$(25) \qquad \log \Pi(x)$$

$$= \begin{cases} (-1)^p S(p+1)\dfrac{x^{p+1}}{p+1} + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{(p+2,\infty)} \frac{\pi}{\sin \pi z} S(z) \frac{x^z}{z}\, dz, & \rho = p + 1, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{(p+1,\infty)} \frac{\pi}{\sin \pi z} S(z) \frac{x^z}{z}\, dz, & \rho < p + 1, \end{cases}$$

die Argumente der genannten Grössen nunmehr keiner Beschränkung, während dagegen x die Bedingung erfüllen muss, dem absoluten Betrage nach kleiner als die sämmtlichen Grössen a_ν zu bleiben. Die Richtigkeit hiervon geht ohne weiteres hervor, wenn man beachtet, dass x in der Formel (6) bei dieser Wahl des Integrationsweges nur die Bedingung $|x| < 1$ erfüllen muss.

Wendet man die Formel (25) auf das obige Produkt an, bei welchem $\rho = p = 0$, so folgt

$$(26) \qquad \log \Pi(x; \tau_1, \ldots, \tau_n) = \frac{\left(\frac{i}{2}\right)^n}{2\pi i} \int\limits_{(1,\infty)} \frac{\pi}{\sin \pi z} \frac{1}{\sin \pi\tau_1 z} \cdots \frac{1}{\sin \pi\tau_n z} \frac{x^z}{z}\, dz,$$

wo der Integrationsweg ausser den Stellen $z = 1, 2, \ldots, \infty$ keine anderen Pole des Integranden umschliessen darf, und zugleich x die Bedingungen erfüllt

$$|x| < |q_\mu^{-1}| = |e^{-\pi i \tau_\mu}|, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n,$$

welche allerdings den wahren Convergenzbereich des Integrals im allgemeinen nicht definiren.

Die Pole des Integranden zerfallen in $n + 1$ arithmetische Reihen. Setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass nicht nur die τ sondern auch ihre Verhältnisse complexe Grössen sind, so liegen die Punkte, welche diesen $n + 1$ Reihen entsprechen, auf ebenso vielen verschiedenen, im Punkte $z = 0$ einander schneidenden geraden Linien. Ausser der $(n + 2)$-fachen Stelle $z = 0$ sind alle übrigen Pole alsdann einfach. In (25) bezieht sich die Integration auf eine Curve, welche alle auf dem Halbstrahl $0 —— +\infty$ liegenden Pole und keine anderen umschliesst. Auf Grund der symmetrischen Form des Integranden darf man schliessen, dass das Integral, auf irgend einen der übrigen Halbstrahlen bezogen, ebenfalls den Logarithmus eines dem Π analogen Produktes darstellen muss. Andererseits ergiebt sich ohne Mühe, dass das Integral, wenigstens wofern x die Bedingungen

$$|q_\mu| < x < |q_\nu^{-1}|, \qquad \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

erfüllt, gleich der Null ist, falls es auf eine Kreislinie mit unendlich grossem Radius, d. h. falls es auf einmal auf alle $2(n + 1)$ Halbstrahlen bezogen wird. Hierdurch muss sich nun offenbar eine Beziehung zwischen $2(n + 1)$ Produkte der Form (24) ergeben.

Bei der Ermittelung dieser Beziehung bedient man sich mit Vortheil der aus (26) leicht sich ergebenden Formel

$$\log \Pi(x\,; \tau_1, \ldots, \tau_n) = \left(\frac{i}{2}\right)^n \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\sin \pi\nu\tau_1 \ldots \sin \pi\nu\tau_n} \frac{x^\nu}{\nu}.$$

Um das Schlussergebniss in einfacher Weise zusammenfassen zu können, setze man für den Fall, dass n eine gerade Zahl ist:

$$\Theta(x\,; \tau_1, \ldots, \tau_n) = \frac{\Pi(\text{[illegible]}\,; \tau_1, \ldots, \tau_n)}{\Pi(\text{[illegible]}\,; \tau_1, \ldots, \tau_n)}, \qquad n = 2k,$$

für den Fall aber, dass n eine ungerade Zahl ist:

$$\theta(v\,;\tau_1,\ldots,\tau_n) = \Pi(e^{2\pi iv}\,;\tau_1,\ldots,\tau_n)\Pi(e^{-2\pi iv}\,;\tau_1,\ldots,\tau_n), \qquad n = 2k+1.$$

Dann ergiebt sich mit Benutzung des CAUCHY'schen Satzes

$$\begin{aligned}(27)\qquad & \log\theta\left(\frac{v}{\tau}\,;\frac{\tau_1}{\tau},\frac{\tau_2}{\tau},\frac{\tau_3}{\tau},\ldots,\frac{\tau_n}{\tau}\right)\\ & -\log\theta\left(\frac{v}{\tau_1}\,;\frac{-\tau}{\tau_1},\frac{\tau_2}{\tau_1},\frac{\tau_3}{\tau_1},\ldots,\frac{\tau_n}{\tau_1}\right)\\ & +\log\theta\left(\frac{v}{\tau_2}\,;\frac{-\tau}{\tau_2},\frac{-\tau_1}{\tau_2},\frac{\tau_3}{\tau_2},\ldots,\frac{\tau_n}{\tau_2}\right)\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +(-1)^n\log\theta\left(\frac{v}{\tau_n}\,;\frac{-\tau}{\tau_n},\frac{-\tau_1}{\tau_n},\frac{-\tau_2}{\tau_n},\ldots,\frac{-\tau_{n-1}}{\tau_n}\right) = R_n(v),\end{aligned}$$

wo R_n das zur Stelle $z = 0$ gehörige Residuum und τ eine neue der Symmetrie halber benutzte Grösse ist. Es wird zugleich vorausgesetzt, dass die Grössen τ in einer solchen Reihenfolge geschrieben sind, dass

$$\arg\tau < \arg\tau_1 < \ldots < \arg\tau_n.$$

$R_n(v)$ ist eine ganze rationale Funktion von v und eine rationale symmetrische Funktion der Grössen $\tau, \tau_1, \ldots, \tau_n$. Für $n = 1$ und $n = 2$ hat man beispielsweise

$$R_1(v) = -\frac{\pi iv^2}{\tau\tau_1} + \frac{\pi i}{12}\left(\frac{\tau}{\tau_1} + \frac{\tau_1}{\tau}\right),$$

$$R_2(v) = -\frac{\pi iv^3}{3\tau\tau_1\tau_2} + \frac{\pi iv}{12\tau\tau_1\tau_1}(\tau^2 + \tau_1^2 + \tau_2^2).$$

Die obigen θ-Funktionen, welche offenbar periodisch sind, befriedigen zugleich die Funktionalgleichungen

$$\theta(v+\tau\,;\tau) = e^{-\pi i(2v+\tau)}\,\theta(v\,;\tau);$$

$$\left|\begin{aligned}&\theta(v+\tau_1\,;\tau_1\tau_2) = \theta(v\,;\tau_1\tau_2)\,\theta\left(v+\frac{\tau_1}{2}\,;\tau_2\right),\\ &\theta(v+\tau_2\,;\tau_1\tau_2) = \theta(v\,;\tau_1\tau_2)\,\theta\left(v+\frac{\tau_2}{2}\,;\tau_1\right).\end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} \Theta(v + \tau_1 ; \tau_1 \tau_2 \tau_3) = \Theta(v ; \tau_1 \tau_2 \tau_3)\,\Theta\left(v + \frac{\tau_1}{2} ; \tau_2 \tau_3\right), \\ \Theta(v + \tau_2 ; \tau_1 \tau_2 \tau_3) = \Theta(v ; \tau_1 \tau_2 \tau_3)\,\Theta\left(v + \frac{\tau_2}{2} ; \tau_1 \tau_3\right), \\ \Theta(v + \tau_3 ; \tau_1 \tau_2 \tau_3) = \Theta(v ; \tau_1 \tau_2 \tau_3)\,\Theta\left(v + \frac{\tau_3}{2} ; \tau_1 \tau_2\right); \end{cases}$$

etc.

§ 5.

Die Frage, ob eine durch eine vorgelegte DIRICHLET'sche Reihe definirte Funktion ausserhalb des Convergenzbereiches der Reihe existirt, kann in zahlreichen Fällen auf Grund des folgenden Satzes beantwortet werden:

Sind die Glieder der beiden Reihen

$$S(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^{-s}, \qquad S_1(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{-s}$$

von einander derart abhängig, dass A_ν bei hinreichend grossem ν in der Form darstellbar ist

$$A_\nu = a_\nu^{\varkappa} \mathfrak{P}(a_\nu^{-1}), \qquad |\mathfrak{P}(0)| > 0,$$

wo $\varkappa$ eine positive Zahl, während $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche Potenzreihe bedeutet, so verhält sich $S(s)$ an jeder Stelle der s-Ebene regulär, welche für keinen der unendlich vielen Ausdrücke

$$S_1(\varkappa s + k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \infty,$$

eine singuläre Stelle ist.

Denn offenbar lässt sich A_ν^{-s}, wenn wir der Einfachheit halber $\mathfrak{P}(0) = 1$ annehmen, auf die Form bringen

$$A_\nu^{-s} = a_\nu^{-\varkappa s}[1 + f_1(s) a_\nu^{-1} + f_2(s) a_\nu^{-2} + \ldots],$$

wo die f von ν unabhängige ganze rationale Funktionen von s sind. Hieraus folgt

$$(28) \quad S(s) = S_1(\varkappa s) + f_1(s) S_1(\varkappa s + 1) + \ldots + f_k(s) S_1(\varkappa s + k) + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{-\varkappa s - k - 1} \mathfrak{P}_k(a_\nu^{-1}),$$

wo $\mathfrak{P}_k$ eine gewöhnliche Potenzreihe bedeutet, deren Coefficienten ganze rationale Funktionen von s sind. Offenbar convergirt $\mathfrak{P}_k$ als Funktion von s gleichmässig und bleibt bei wachsendem ν dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Grenze, falls s auf ein beliebiges endliches Gebiet beschränkt wird. Hieraus folgt ohne Mühe die Richtigkeit des Satzes.

Bedeutet z. B. $R(w)$ eine beliebige rationale Funktion mit der Eigenschaft $\lim\limits_{w=\infty} R(w) = \infty$, so können wir auf Grund dieses Satzes schliessen, dass die durch die Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [R(w+\nu)]^{-s}, \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} [R(a^{w+\nu})]^{-s}, \qquad |a| > 1,$$

definirten Funktionen in der ganzen s-Ebene existiren, wo sie sich überall im Endlichen wie rationale Funktionen verhalten. Denn wir wissen, dass die durch die einfacheren Reihen

$$\zeta(s\,,\,w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (w+\nu)^{-s}, \qquad \frac{1}{a^{ws}} \frac{a^s}{a^s-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a^{-(w+\nu)s}$$

definirten Funktionen diese Eigenschaft besitzen.

In gewissen Fällen nähert sich die letzte auf der rechten Seite von (28) vorkommende Reihe, welche als Restglied aufzufassen ist, bei wachsendem k der Null. In solchen Fällen erhält man für die linke Seite eine neue Reihenentwicklung, welche bisweilen sogar in der ganzen s-Ebene mit Ausschluss gewisser Stellen convergirt. Ein Beispiel hiervon ist die Formel

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a^\nu} + \frac{a^\nu}{\rho}\right)^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \frac{\rho^{s+2k}}{a^{s+2k}-1}, \qquad |\rho| < |a| > 1.$$

Durch den obigen Satz haben wir noch keinen Aufschluss darüber erhalten, ob z. B. die durch die interessante Reihe

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} (a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2)^{-s}$$

definirte Funktion ausserhalb des Convergenzbereiches derselben existirt. In einer folgenden Arbeit werde ich eine Methode auseinandersetzen, mittelst deren die Existenz der analytischen Fortsetzung nicht nur für

diesen, sondern auch für den viel allgemeineren Fall nachweisbar ist, wo es sich um Reihen der Form

$$(29) \qquad S(s) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = 0}^{\infty} [R(w_1 + \nu_1, \ldots, w_n + \nu_n)]^{-s}$$

handelt, unter $R(w_1, \ldots, w_n)$ eine beliebige in $w_1, \ldots, w_n$ ganze rationale Funktion verstanden. Diese Reihe als Funktion von s besitzt sicher einen durch eine gewisse Halbebene geometrisch darstellbaren Convergenzbereich, falls die reellen Theile der Coefficienten von R positive Zahlen sind. Unter dieser Voraussetzung lässt sich zeigen, *dass $S(s)$ eine in der ganzen s-Ebene existirende eindeutige Funktion ist, welche sich an jeder endlichen Stelle wie eine rationale Funktion verhält und deren Pole alle auf der reellen Axe gelegen sind.* Dies Ergebniss bildet eine ihrer grossen Allgemeinheit halber bemerkenswerthe Erweiterung des Satzes, dass $(s - 1)\zeta(s)$ eine ganze transcendente Funktion ist. Es ist mir ebenfalls gelungen, das Verhalten von $S(s)$ für grosse Werthe von s zu bestimmen. Für den Fall, dass die Coefficienten von R sowie die Grössen $w_1, \ldots, w_n$ positiv sind, kann das Verhalten von $S(s)$ folgenderweise charakterisirt werden: *Beschränkt man s auf einen beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen von endlicher Breite, so nähert sich $e^{-\varepsilon|s|}S(s)$ bei wachsendem $|s|$ der Grenze Null, wie klein auch die positive Zahl ε angenommen werden mag.* Eine viel genauere Bestimmung des Verhaltens von $S(s)$ bei wachsendem $|s|$ ist zwar auch möglich; das Angeführte genügt aber schon, um die grosse Anwendbarkeit der Formel (8) ausser allem Zweifel zu stellen.

Denn in allen diesen Fällen, wo die Coefficienten von R nebst den Grössen w reell und positiv sind während $S(s)$ durch (29) definirt ist, kann nach dem § 1 der Integrationsweg des in (8) vorkommenden Integrals unter Berücksichtigung des Cauchy'schen Satzes in der negativen Richtung der reellen Axe beliebig weit verschoben werden, *wodurch eine in der ganzen x-Ebene, mit Ausnahme der negativen Hälfte der reellen Axe, gültige asymptotische Entwicklung von $\log \Pi(x)$ hervorgeht.*[1] *Das Verhalten des Restintegrals kann auf Grund der fundamentalen Ungleichheit* (4) *beur-*

[1] Diese Entwicklung gilt auch für den Fall, wo die Coefficienten von R complexe Grössen mit positiven reellen Theilen sind, wenn man von der x-Ebene einen gewissen, die negative Hälfte der reellen Axe enthaltenden, *Winkel* ausschliesst.

theilt werden. Die STIRLING'sche Formel ist die einfachste unter den unzähligen, auf diese Weise sich ergebenden Entwicklungen.

In der That umfassen die angedeuteten Untersuchungen des Verfassers eine noch grössere Menge DIRICHLET'scher Reihen als die oben angeführte. Unter den betreffenden Reihen findet sich eine beträchtliche Menge derjenigen, welche für die Zahlentheorie in erster Linie von Interesse sind oder voraussichtlich sein werden. [1]

[1] Ich habe bereits vor der Drucklegung dieser Arbeit alle oben angedeuteten Ergebnisse in einer grösseren Arbeit umständlich dargethan, welche in den Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Tom. 29, enthalten ist und den Titel der vorliegenden Arbeit trägt. Separate bei A. HERMANN, *Paris.*

SUR LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES POUR LES ÉQUATIONS AUX DERIVÉES PARTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE

PAR

U. DINI

À PISE

(Extrait d'une lettre à M. Mittag-Leffler.)

Quand, le mois d'avril dernier, après tant d'années, j'ai eu le plaisir de vous revoir sur le lac de Como a Cadenabbia, je vous ai promis de vous faire connaître quelques remarques que je fais sur la belle méthode des approximations successives de M. Picard pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre à deux variables du type elliptique. Je viens à la fin tenir ma promesse.

Vous vous rappelez certainement cette méthode que M. Picard a publiée jadis en 1890 dans le tome 6 du Journal de math. pur. et appliq. de Liouville (4e série).

Etant donnée une telle équation linéaire du deuxième ordre qu'on entend déja réduite à la forme

$$(1) \qquad \Delta u = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu + h, \quad \text{où} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

on se propose de démontrer l'existence et parvenir à la détermination effective d'une intégrale de cette équation qui soit régulière dans un certain champ C, qu'il faut supposer pris suffisamment petit, et dont les valeurs au contour sont données d'avance arbitrairement.

On ne fait pas d'hypothèse sur ces valeurs au contour, hormis celle d'être finies et continues, ou du moins on n'en dit pas autre chose; et en abrégé la méthode de M. Picard est la suivante.

On admet que pour le champ donné C il existe la fonction $G(x,y,x',y')$ que maintenant il est convenu d'appeler *fonction de Green* pour le point intérieur (x',y') de C, c'est-à-dire celle qui aussi par rapport à x et y que par rapport à x' et y' est harmonique partout en C, à l'exception du point (x',y') ou du point (x,y), selon que l'on considère comme variables x et y ou x' et y', et, en y considérant comme variables x et y, en chaque point (x,y) du contour, est toujours zéro, tandis que quand le point (x,y) est dans le point (x',y') elle devient infinie comme $\log\frac{1}{r}$, r étant la distance entre les deux points (x,y), (x',y').[1] Et l'on admet aussi que pour le champ C il existe une fonction harmonique qui sur le bord de C prend les valeurs données, sans rien supposer pour les dérivées sur ce bord même. Tout cela, d'après les travaux de Schwarz, Neumann, Harnack, Poincaré et d'autres est assuré dans une foule de cas.

En supposant trouvée cette fonction u_0, et en se rappelant que, sous certaines conditions, l'intégrale double

$$(2) \qquad -\frac{1}{2\pi}\iint_C F(x,y)\,G(x,y,x',y')\,dx\,dy$$

représente une fonction v pour le point (x',y') qui est toujours nulle sur le bord de C, est régulière en C et satisfait à l'équation

$$(3) \qquad \Delta v = F(x,y),$$

on construit une fonction $u_1(x',y')$ par la formule

$$u_1(x',y') = -\frac{1}{2\pi}\iint_C F_0(x,y)\,G(x,y,x',y')\,dx\,dy,$$

où $F_0(x,y) = a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + cu_0 + h$; puis on construit l'autre

$$u_2(x',y') = -\frac{1}{2\pi}\iint_C F_1(x,y)\,G(x,y,x',y')\,dx\,dy,$$

dans laquelle $F_1(x,y) = a\frac{\partial u_1}{\partial x} + b\frac{\partial u_1}{\partial y} + cu_1$, et ensuite

$$u_3(x',y') = -\frac{1}{2\pi}\iint_C F_2(x,y)\,G(x,y,x',y')\,dx\,dy,$$

[1] Auparavant on appelait fonction de Green la fonction $g = -G - \log r$ qui est toujours harmonique en C, et sur le bord est égale à $-\log r$.

où $F_2(x, y) = a\frac{\partial u_2}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2, \ldots,$ et alors l'intégrale cherchée est donnée par la somme u de la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{4}$$

à l'égard de laquelle M. Picard trouve qu'elle est convergente uniformément en C, et représente justement la fonction cherchée.

La démonstration de M. Picard s'appuie entièrement sur les propriétés connues de l'intégrale (2) que j'ai indiquée par v, et sur quelques observations qu'il fait lui-même pour cette intégrale v et pour la fonction G, en se rapportant plusieurs fois au cas de cercle, et peut-être en admettant tacitement, par la théorie des représentations conformes, que ce que l'on reconnait tout de suite dans ce cas subsiste aussi pour les autres champs qu'il considère; ce qui pourtant exigerait, il me semble, des explications et des conditions spéciales, car les formules qui proviennent de ces représentations pourraient avoir des singularités.

En remarquant que la fonction G se compose de deux termes, dont l'un est le logarithme de la distance inverse $\frac{1}{r}$ du point (x, y) au point $M'(x', y')$, et l'autre, au signe près, est l'ancienne fonction de Green g qui sur le bord est égale à $-\log r$, et dans le cas du cercle de rayon R se réduit au logarithme de la distance du point (x, y) au point conjugué harmoniquement avec M', multipliée par $\frac{\rho'}{R}$, ρ' étant le rayon vecteur de M', il en conclut que si J est le maximum de $F(x, y)$ dans le champ C, l'intégrale v et ses dérivées $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ ne surpassent pas les nombres MJ et NJ, M et N étant des quantités qui dépendent seulement du champ C et non de la fonction $F(x, y)$, et qui, en supposant C suffisamment petit, peuvent devenir aussi petites que l'on veut.

Or, pour la partie de G qui provient de $\log\frac{1}{r}$ il suffit d'introduire les coordonnées polaires avec le pole en M' pour voir que les parties correspondantes de v et des dérivées $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ restent toujours finies même en s'approchant indéfiniment au contour, et sur ce contour même; mais pour l'autre partie de G qui provient de g, si l'on remarque que, quoique

toujours finie avec ses dérivées quand le point $M'(x', y')$ est dans l'intérieur de C, elle aussi croit à l'infini en même temps que $\log \frac{1}{r}$ quand le point M' va en se rapprochant indéfiniment au contour, on voit que quand on n'est pas dans le cas du cercle, sans faire des remarques d'ordre général, on ne peut pas parvenir aux conclusions susdites de M. Picard. Et si dans le cas du cercle cela est permis tout de suite, c'est parce que alors on peut toujours introduire les coordonnées polaires avec le pole dans le point N conjugué harmonique de M' pour arriver immédiatement à la conclusion de M. Picard, aussi pour la fonction que pour ses dérivées premières, pour la partie de G qui provient de g.

Et, en dehors du cas du cercle, la difficulté devient même plus grande si l'on considère la fonction G sans la décomposer dans les deux $\log \frac{1}{r}$ et g, car quand le point M' s'approche indéfiniment au contour, cette fonction G passe d'une manière toujours plus rapide d'une valeur logarithmiquement infinie à la valeur zéro.

C'est donc là une première objection sur laquelle, du reste, M. Picard lui-même a peut-être voulu arrêter l'attention, puisque il a rappelé explicitement le cas du cercle.

Mais un autre point aussi doit être, il me semble, bien éclairci; c'est celui relatif au maximum J de la fonction $F_0(x, y)$ quand l'équation donnée (1) contient les termes $a\frac{\partial u}{\partial x}$, $b\frac{\partial u}{\partial y}$ des dérivées premières.

Il est certain en effet que, même si l'équation (1) a ces termes $a\frac{\partial u}{\partial x}$ et $b\frac{\partial u}{\partial y}$, la fonction $F_0(x, y)$ en chaque point *intérieur* à C a toujours une valeur finie, car dans les points intérieurs les dérivées $\frac{\partial u_0}{\partial x}$, $\frac{\partial u_0}{\partial y}$ sont finies; mais cela n'arrive pas toujours quand on s'approche indéfiniment au contour si on laisse entièrement arbitraires les valeurs données sur le bord pour l'intégrale u de la (1), en les supposant seulement finies et continues. Au contraire il y a bien des cas dans lesquels, quoique finies et continues les valeurs données pour u sur le bord, les dérivées au contour sont infinies, ou même elles n'existent pas.

Et, de même que pour la fonction $F_0(x, y)$, cette remarque devrait être

faite aussi pour les autres fonctions successives $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, ...; mais puisque ces fonctions se composent seulement avec les dérivées premières des fonctions u_1, u_2, u_3, ... qui viennent successivement déterminées à l'aide de l'intégrale (2), si l'on admet d'être dans le cas du cercle, ou de ces autres champs pour lesquels on puisse s'assûrer que l'intégrale (2) et ses dérivées premières ne surpassent jamais les nombres MJ, et NJ quand J est un nombre fini, on voit tout de suite que quand on se soit assuré que pour la première fonction u_0 les dérivées $\frac{\partial u_0}{\partial x}$, $\frac{\partial u_0}{\partial y}$ et par conséquent $F_0(x, y)$ satisfont à la condition de ne pas surpasser un nombre fini, même en s'approchant indéfiniment du contour, cette condition sera aussi satisfaite pour les dérivées premières des fonctions successives u_1, u_2, u_3, ... et pour les fonctions $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, ... de sorte que la difficulté à surmonter reste seulement pour la fonction u_0. Et cela, on l'entend bien, dans le cas que l'équation donnée (1) ait les termes $a\frac{\partial u}{\partial x}$ et $b\frac{\partial u}{\partial y}$.

Enfin un troisième point du procédé de M. Picard doit aussi être éclairci, et c'est quand ayant trouvé que la série (4) est une fonction u qui en tout C est finie et continue, prend sur le bord les valeurs données, et dans C a aussi ses dérivées premières finies et continues et représentées par les séries

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dots, \\[2ex] \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial u_1}{\partial y} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y} + \dots, \end{cases}$$

il tâche de démontrer que cette fonction u satisfait à l'équation donnée (1).

Pour cela il remarque justement que les formules trouvées donnent

$$u = u_0 - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C \left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu + h\right)G(x, y, x', y')dx\,dy,$$

et que pour pouvoir en conclure que u satisfait à l'équation (1) il faut s'assurer que même la fonction $a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu + h$ ait des dérivées premières finies, ou du moins qu'on trouve satisfaites les conditions plus

générales données d'abord dans le cas de trois variables par M. Hölder [1] et ensuite par M. Morera [2] pour que l'intégrale (2) ait des dérivées secondes, et satisfasse a l'équation (3); mais tandis que, en admettant l'hypothèse des dérivées secondes de u_0 finies et continues dans l'intérieur de C *et sur* C, il montre que la même chose arrivera pour les fonctions successives $u_1, u_2, u_3, \ldots$ et ensuite pour la fonction u qui est donnée par la série (4) (ce qui du reste n'est pas absolument nécessaire), il ne montre pas comme on devrait donner les valeurs u de l'intégrale au contour afin que la condition admise pour les dérivées secondes de u_0 sur le bord fût remplie.

Il est toutefois à remarquer que, sans faire mention de ces exceptions au procédé de M. Picard pour le cas général, MM. Paraf et Le Roy ont traité les mêmes questions par des procédés assez différents dans des cas particuliers.

Mais M. Paraf,[3] en s'arrêtant on peut dire, au cas du cercle et des aires qui peuvent être représentées sur le cercle d'une manière conforme, pose des conditions très restrictives pour les coefficients a, b, c, h de l'équation donnée (1) et pour les valeurs données pour l'intégrale u sur le bord; et M. Le Roy [4] ayant en vue surtout les problèmes de la théorie de la chaleur pour le cas de trois variables x, y, z se limite à considérer l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}+fu=g$$

quand a, b, c, f, g ont les dérivées premières finies et continues et $f>0$,

[1] Hölder, Dissertation inaugurale, *Beiträge zur Potentialtheorie* (Stuttgart 1882).

[2] Morera, *Sulle derivate seconde delle funzione potenziale nello spazio* (Rendiconti del Reale Istit. Lombardo. Vol. 20, pag. 302).

[3] A. Paraf, *Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale* (Annal. de la Fac. des Scienc. de Toulouse, t. 6, chap. 3, 1892). Dans ce Mémoire M. Paraf suppose que les coefficients a, b, c, h, de l'équation donnée (1) aient les dérivées secondes, et les valeurs données au contour pour l'intégrale aient les dérivées troisièmes, en disant pourtant que ces conditions ne sont pas indispensables.

[4] E. Le Roy, Thèse pour le doctorat, *Sur l'intégration des équations de la Chaleur.* (Paris, Gauthier-Villars et fils, 1898.)

et l'expression $a dx + b dy + c dz$ est la différentielle exacte d'une fonction $\mu(x, y, z)$, de sorte que la même équation peut se réduire à la forme plus simple $\Delta u + fu = g$, c'est-à-dire au cas particulier dans lequel dans l'équation donnée manquent les termes aux dérivées premières; et dans ce cas les exceptions que je faisais tout à l'heure n'ont pas lieu, ou elles peuvent être écartées très facilement.

Mais dans le cas général, il me semble que les exceptions restent entièrement.

Ayant communiqué quelques-uns de mes doutes à M. PICARD l'année dernière, il me répondit très-aimablement qu'il les trouvait fondés, et que pour rendre vérifiées les conditions de son analyse du 1890 il fallait faire quelques hypothèses sur la nature des valeurs données pour la fonction sur le bord, pour lesquelles il aurait été suffisant d'admettre l'existence des dérivées des trois premières ordres, tandis qu'en opérant un peu autrement on pourrait montrer qu'il suffit d'aller jusqu'à la dérivée du second ordre. En même temps il m'ajoutait qu'il se proposait d'y revenir cette année dans son cours, et puis dans le quatrième volume de son traité d'analyse.

Quoique sûr que M. PICARD avec ces travaux apportera une nouvelle et importante contribution à la Science, et laissera bien loin les recherches que j'aurai pu faire moi-même [1] j'ai tâché déjà néanmoins de rendre de ma part parfaitement rigoureuse sa méthode qui a désormais déjà pris une place importante dans la Science; et je crois d'y être parvenu avec les considérations que je vais exposer.

En suivant en grande partie les procédés de MM. HÖLDER et MORERA (mém. cit.), je prémets d'abord certaines propriétés, en partie connues, de la fonction $W(x', y') = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_C F \log r \, dx \, dy$, et des autres

---

[1] Ce que je prévoyais quand j'écrivais cette lettre a M. MITTAG-LEFFLER dans le courant de l'année 1899, est arrivé. M. PICARD, d'abord avec des communications à l'Académie des Sciences de Paris, ensuite avec une publication dans le Journal de Math. de Liouville, a éclairci et complété sa méthode, dans des cas pourtant qui ne sont pas précisément ceux que j'ai traité ici, et avec des conditions et des procédés aussi différents. Cela pourrait peut-être demander des changements dans la rédaction de ce travail, mais le temps me fait défaut. D'ailleurs il ne sera pas inutile, je pense, qu'on connaisse mes procédés tels qu'ils sont sortis de mes études. Je n'y ai donc pas apporté aucune variation (10 novembre 1900).

$$-\frac{1}{2\pi}\iint_C F\frac{\partial \log r}{\partial x}dxdy,\qquad -\frac{1}{2\pi}\iint_C F\frac{\partial \log r}{\partial y}dxdy$$

qui, comme on sait, et comme on trouvera aussi dans la suite, représentent les dérivées $\frac{\partial W}{\partial x'}$, $\frac{\partial W}{\partial y'}$, r étant la distance du point $M(x', y')$ au point d'intégration $M(x, y)$, et F étant une fonction de x et y qui, pour le moment, sera seulement supposée toujours finie et intégrable dans le champ C.

En remarquant que

$$\frac{\partial \log r}{\partial x} = \frac{x - x'}{r^2} = \frac{1}{r}\cos(r, x),\qquad \frac{\partial \log r}{\partial y} = \frac{y - y'}{r^2} = \frac{1}{r^2}\cos(r, y)$$

où (r, x), (r, y) sont les angles que la direction de r qui de M' va à M fait avec les directions positives des axes x et y, et en introduisant un système de coordonnées polaires avec le pôle en M', on verra tout de suite que ces fonctions W et $\frac{\partial W}{\partial x'}$, $\frac{\partial W}{\partial y'}$ ne surpassent jamais un nombre fini, même quand le point M' s'approche indéfiniment au contour de C, ou est sur ce contour même.

Prenons en C un autre point $M''(x'', y'')$ dont la distance de $M'(x', y')$ sera indiquée par δ; et par analogie, indiquons maintenant par r', au lieu que par r, la distance entre les points M' et M, et par r'' la distance entre les points M'' et M, et de même indiquons par W' et F', par W'' et F'' les valeurs de W et F dans les points M' et M''; et cherchons comment se changent W et ses dérivées premières $\frac{\partial W}{\partial x'}$, $\frac{\partial W}{\partial y'}$ quand on passe du point M' au point M''.

Nous devrons par conséquent étudier les différences[1]

$$W'' - W' = \frac{1}{2\pi}\iint_C F(\log r'' - \log r')dxdy,$$

$$\frac{\partial W''}{\partial x''} - \frac{\partial W'}{\partial x'} = -\frac{1}{2\pi}\iint_C F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dxdy,$$

$$\frac{\partial W''}{\partial y''} - \frac{\partial W'}{\partial y'} = -\frac{1}{2\pi}\iint_C F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial y} - \frac{\partial \log r'}{\partial y}\right)dxdy,$$

[1] Quand deux fonctions $F(x, y)$, $J(x, y)$ deviennent infinies la première dans un point $M'(x', y')$ d'un champ C, et la deuxième dans un autre point $M''(x'', y'')$ du

et pour cela, en supposant d'abord que les points M' et M'' soient intérieurs au champ C, nous décomposerons C en trois champs, c'est-à-dire:

1° un champ circulaire τ' avec le centre en M' et ayant pour rayon $\frac{1}{2}\delta$;

2° un champ circulaire semblable τ'' avec le centre en M'' et ayant pour rayon $\frac{1}{2}\delta$;

3° le champ restant $C - \tau' - \tau''$.

Les intégrales $\iint\limits_C$ seront aussi décomposées en trois intégrales que nous allons examiner séparement, en commençant par celles de $W'' - W'$, et en introduisant toujours pour τ' et $C - \tau' - \tau''$ les coordonnées polaires (r', θ') avec le pôle en M', et pour τ'' les coordonnées polaires avec le pôle en M''.

Indiquons pour cela par $\overline{F}', \overline{F}'', \overline{F}$ les limites supérieures des valeurs absolues de F en τ', τ'', et $C - \tau' - \tau''$ ou C; et représentons, comme d'ordinaire, avec le signe $|K|$ la valeur absolue de K; nous aurons évidemment

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\tau'} F(\log r'' - \log r')dxdy\right| \leq \frac{\overline{F}'}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\delta}\int\limits_0^{2\pi}(\log r'' - \log r')r'dr'd\theta',$$

---

même champ, sans cesser pourtant d'être intégrables en C, c'est a peine besoin de remarquer que la somme ou différence des intégrales $\iint\limits_C F(x, y)dxdy$, $\iint\limits_C J(x, y)dxdy$ sera encore égale à l'intégrale $P = \iint\limits_C \{F(x, y) \pm J(x, y)\}dxdy$ de la somme ou différence, comme dans le cas ou $F(x, y)$ et $J(x, y)$ sont finies.

En effet si σ' et σ'' sont deux petits champs qui renferment les points M' et M'', nous aurons par les définitions ordinaires

$$P = \lim_{\sigma'=0,\, \sigma''=0}\iint\limits_{C-\sigma'-\sigma''}\{F(x,y) \pm J(x,y)\}dxdy =$$

$$= \lim_{\sigma'=0,\, \sigma''=0}\left\{\iint\limits_{C-\sigma'-\sigma''}F(x,y)dxdy \pm \iint\limits_{C-\sigma'-\sigma''}J(x,y)dxdy\right\} =$$

$$= \lim_{\sigma'=0,\, \sigma''=0}\left\{\iint\limits_{C-\sigma'}F(x,y)dxdy - \iint\limits_{\sigma''}F(x,y)dxdy \pm \iint\limits_{C-\sigma''}J(x,y)dxdy \mp \iint\limits_{\sigma'}J(x,y)dxdy\right\}$$

$$= \lim_{\sigma'=0}\iint\limits_{C-\sigma'}F(x,y)dxdy \pm \lim_{\sigma''=0}\iint\limits_{C-\sigma''}J(x,y)dxdy = \iint\limits_C F(x,y)dxdy \pm \iint\limits_C J(x,y)dxdy,$$

comme on voulait démontrer.

La même chose arrive pour le cas d'un plus grand nombre de variables, et de plusieurs points d'infini.

car, étant dans τ' $\frac{3}{2}\delta > r'' \geqq \frac{1}{2}\delta \geqq r'$, la différence $\log r'' - \log r' = \log \frac{r''}{r'}$ sera toujours positive ou nulle; et en substituant $\log \frac{3}{2}\delta$ à $\log r''$ et en intégrant, on trouve que la valeur absolue de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\iint F(\log r'' - \log r')dx\,dy$$

ne surpassera pas $\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{8}\log 3\right)\overline{F}'\delta^2$.

De même celle de $\frac{1}{2\pi}\iint F(\log r'' - \log r')dx\,dy$ ne surpassera pas $\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{8}\log 3\right)F''\delta^2$.

Enfin pour l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau-\tau''} F(\log r'' - \log r')dx\,dy$ on remarquera d'abord que $\log r'' - \log r' = \frac{r''-r'}{t}$, t étant un nombre compris entre r' et r'', de sorte que cette intégrale pourra s'écrire $\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau'-\tau''} F(r''-r')\frac{r'}{t}dr'd\theta'$; et puisque en formant le triangle $M'M''M$ on voit que $|r'' - r'| < \delta$, et $\frac{r'}{t} < 3$ parce que en $C-\tau'-\tau''$ on a toujours $\frac{r'}{r'} = 1$, et $\frac{r'}{r''} \leqq 1 + \frac{\delta}{r''} < 3$, on en conclut que

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau'-\tau''} F(\log r'' - \log r')dx\,dy\right| \leqq \frac{3F\delta}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau'-\tau''} dr'\,d\theta' < \frac{3F\delta}{2\pi}\iint\limits_{C} dr'\,d\theta',$$

et puisque cette démonstration pourra évidemment s'appliquer aussi au cas où les points M' et M'' sont pris un ou tous les deux sur le contour de C, parce que alors il faudra seulement substituer aux cercles entières τ' et τ'' leurs portions qui seront comprises en C, on en conclut que pour les rapports incrémentaux de W l'on aura toujours $\left|\frac{W''-W'}{\delta}\right| < kF$, F étant la limite supérieure des valeurs absolues de $F(x\,,y)$ en C, et k étant une quantité qui ne surpasse pas le nombre $\frac{3}{2\pi}\iint\limits_{C} dr'\,d\theta'$ et qui par conséquent dépend seulement de l'aire A de C.

Et cette dépendence est telle qu'en supposant l'aire A de C suffisamment petite mais de forme tout-à-fait quelconque, la même quantité k pourra être rendue plus petite qu'une autre quantité quelconque B, car si ε est un nombre inférieur à $\frac{B}{3}$, en faisant autour de M' un cercle σ de rayon ε qui soit en tout ou en partie contenu en C, on aura évidemment $\iint\limits_C dr'd\theta' < \iint\limits_\sigma dr'd\theta' + \frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{C-\sigma} r'dr'd\theta'$, ou $\iint\limits_C dr'd\theta' < 2\pi\varepsilon + \frac{A}{\varepsilon}$; et il suffira que l'on ait $A < \frac{2\pi\varepsilon}{3}(B - 3\varepsilon)$ pour qu'il soit $k < B$. Et indépendamment de cela, il suffit de remarquer que $\iint\limits_C dr'd\theta'$ est le potentiel newtonien de la surface A sur un des ses points (x', y') quand la masse est de densité égale à un, pour en deduire que si A est suffisamment petite, k est très petite elle aussi; et du reste si l'on indique avec L la plus grande distance entre deux points quelconques du contour de C on aura toujours aussi $k \leq 3L$, dont il suit encore, mais seulement pour de cas plus particuliers pour le contour de C, que k sera très petite avec L, et par suite avec C.

Passons maintenant à étudier la différence $\frac{\partial W''}{\partial x''} - \frac{\partial W'}{\partial x'}$, et pour cela considérons l'autre $\Delta = \frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x} = \frac{1}{r''}\cos(r'', x) - \frac{1}{r'}\cos(r', x)$ qui figure sous l'intégrale.

Puisque on a évidemment

$$\Delta = \left(\frac{1}{r''} - \frac{1}{r'}\right)\{\cos(r', x) + \cos(r'', x)\} + \frac{1}{r'r''}\{r''\cos(r'', x) - z'\cos(r', x)\},$$

et que les projections des côtés du triangle $M'M''M$ sur l'axe des x donnent $\delta\cos(\delta, x) + r''\cos(r'', x) - r'\cos(r', x) = 0$, (δ, x) étant l'angle que la direction de M' à M'' fait avec l'axe x, on aura

$$\Delta = \frac{(r' - r'')\{\cos(r', x) + \cos(r'', x)\} - \delta\cos(\delta, x)}{r'r''},$$

et par conséquent $|\Delta| \leq \frac{3\delta}{r'r''}$.

En observant donc que en τ' on a

$$\frac{3}{2}\delta > r'' \geq \frac{1}{2}\delta \geq r', \text{ et en } \tau'' \text{ on a } \frac{3}{2}\delta \geq r' > \frac{1}{2}\delta > r''.$$

on en tire que

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x}-\frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy\right| \leqq 3F'\delta,$$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x}-\frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy\right| \leqq 3F''\delta,$$

et ensuite, en remarquant, comme nous l'avons fait déjà dans le cas de $W''-W'$, que dans $C-\tau'-\tau''$ on a toujours $\frac{r'}{r''}\leqq 3$, on trouve aussi

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau'-\tau''} F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x}-\frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy\right| \leqq \frac{9F\delta}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau'-\tau''}\frac{dr'}{r'}\,d\theta' < \frac{9F\delta}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau'}\frac{dr'}{r'}\,d\theta',$$

et par conséquent

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau'-\tau''} F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x}-\frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy\right| < 9F\left(\log L-\log\frac{1}{2}\delta\right)\delta,$$

où

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau'-\tau''} F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x}-\frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy\right| < 9F\left(\frac{\log 2L}{\log\delta}-1\right)\delta\log\delta.$$

On a les mêmes résultats pour les intégrales qui composent

$$\frac{\partial W''}{\partial y}-\frac{\partial W'}{\partial y};$$

de sorte que l'on peut maintenant conclure que pour tous les points M' et M'' de C, et même quand il sont sur le bord, les valeurs absolues des rapports incrémentaux $\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial W''}{\partial x}-\frac{\partial W'}{\partial x}\right)$, $\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial W''}{\partial y}-\frac{\partial W'}{\partial y}\right)$ ne surpasseront jamais le nombre $-k_1 F\log\delta$, k_1 étant une quantité qui ne surpassera pas le nombre fini $9\left(1-\frac{\log 2L}{\log\delta}\right)$ qui ne dépend pas de F, et tend a devenir indépendent même de la grandeur du champ C.

Le résultats obtenus sur les rapports incrémentaux de W, $\frac{\partial W}{\partial x'}$ et $\frac{\partial W}{\partial y'}$ nous permettraient déjà de faire disparaître quelques-unes des difficultés de la méthode des approximations successives dont nous avons parlé.

Indépendamment de ça, ils ont d'ailleurs un intérêt tout particulier, parce qu'ils sont généraux, et ne supposent rien pour la fonction $F(x, y)$, hormis d'être finie et intégrable en C, de sorte qu'elle pourra même avoir des discontinuités, et ils conduisent à déterminer les dérivées premières de W dans tous les points de C, même sur le bord, sans faire aucune autre hypothèse pour $F(x, y)$, tandis que par eux on peut aussi déterminer les dérivées secondes de W, mais celles-ci seulement pour les points $M'(x', y')$ qui sont *intérieurs* à C, et pour lesquels $F(x, y)$ est continue et le rapport incrémental $\frac{F - F'}{r'}$ est intégrable en M' même réduit aux valeurs absolues, et d'une manière uniforme sur chaque rayon sortant de M', cette fonction $F(x, y)$ étant encore finie et intégrable, mais du reste tout-à-fait quelconque, dans les autres points de C.

Reportons nous en effet aux démonstrations précédentes, et décomposons maintenant le champ $C - \tau' - \tau''$ en deux; l'un étant le champ $\tau - \tau' - \tau''$ qui reste d'un cercle τ ayant pour centre le point M' et un rayon très petit mais fini $\varepsilon \geqq \frac{3}{2}\delta$, quand on y supprime les cercles τ' et τ'', et l'autre étant le champ restant $C - \tau$; et supposons que le point $M''(x'', y'')$ soit sur la même horizontale ou sur la même verticale de M', de sorte que δ sera alors l'accroissement de x' ou de y' $\Delta x'$ ou $\Delta y'$.

Pour le champ $C - \tau$ l'intégrale $\iint\limits_{C-\tau} F \log r' dx dy$ admettra évidemment les dérivées premières et secondes par rapport à x' et y', parce que le point $M'(x', y')$ n'appartient pas au champ d'intégration; et ces dérivées seront

$$(6)\quad \left|\begin{array}{l} -\iint\limits_{C-\tau} F \frac{\partial \log r'}{\partial x} dx dy, \qquad -\iint\limits_{C-\tau} F \frac{\partial \log r'}{\partial y} dx dy, \\ \iint\limits_{C-\tau} F \frac{\partial^2 \log r'}{\partial x^2} dx dy, \qquad \iint\limits_{C-\tau} F \frac{\partial^2 \log r'}{\partial x \partial y} dx dy, \qquad \iint\limits_{C-\tau} F \frac{\partial^2 \log r'}{\partial y^2} dx dy, \end{array}\right.$$

sans qu'on ait besoin d'imposer d'autres conditions à F dans le champ $C-\tau$; et l'on aura évidemment $\iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r'}{\partial x^2}dxdy = -\iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r'}{\partial y^2}dxdy$.

En outre, sous les mêmes conditions pour F dans tout le champ C, les intégrales $-\iint\limits_{C} F\frac{\partial \log r'}{\partial x}dxdy$, $-\iint\limits_{C} F\frac{\partial \log r'}{\partial y}dxdy$ auront aussi toujours une signification, et elles seront pas conséquent les limites pour $\tau = 0$ des deux premières des intégrales précédentes (6).

De même les trois dernières de ces intégrales (6) auront souvent elles aussi des limites $A_{x,x}$, $A_{x,y}$, $A_{y,y}$ (avec $A_{x,x} = -A_{y,y}$) pour τ ou $\varepsilon = 0$, mais cela n'arrivera pas toujours; donc, si, pour le cas où l'on veut chercher aussi les dérivées secondes de W', on fait d'abord l'hypothèse de l'existence de ces limites, hypothèse du reste que nous remplacerons ensuite par une autre, il est certain que, après avoir fixé ε tellement petit que les intégrales (6) soient près de leurs limites

$$(7)\qquad -\iint\limits_{C} F\frac{\partial \log r'}{\partial x}dxdy,\qquad \iint\limits_{C} F\frac{\partial \log r'}{\partial y}dxdy,\qquad A_{x,x}\,,\ A_{x,y}\,,\ A_{y,y}$$

plus qu'un nombre σ aussi petit que l'on voudra, on pourra ensuite prendre δ tellement petit lui aussi que pour toutes les valeurs de δ encore plus petites les rapports incrémentaux correspondants

$$\frac{1}{\delta}\iint\limits_{C-\tau} F(\log r'' - \log r')dxdy,$$

$$\frac{1}{\delta}\iint\limits_{C-\tau} F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dxdy,\qquad \frac{1}{\delta}\iint\limits_{C-\tau} F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial y} - \frac{\partial \log r'}{\partial y}\right)dxdy,$$

soient près des intégrales (6) plus qu'un nombre σ_1 aussi petit lui aussi que l'on voudra; et alors pour ces valeurs de δ ces rapports ne différeront des limites susdites (7) plus de $\sigma + \sigma_1$.

Maintenant, en considérant d'abord le rapport $\frac{W'' - W'}{\delta}$, si l'on se rappelle ce que nous trouvions pour les intégrales

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\tau'} F(\log r'' - \log r')dxdy,\qquad \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\tau''} F(\log r'' - \log r')dxdy,$$

on voit tout de suite que leurs rapports à δ deviennent avec δ aussi petits que l'on veut; et de même en appliquant au cas de $C=\tau$, et par conséquent pour $L=2\varepsilon$, ce que nous trouvions pour l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau'-\tau''} F(\log r''-\log r')\,dx\,dy,$$

on voit que son rapport à δ peut lui aussi être supposé aussi petit que l'on veut quand ε a été déjà pris suffisamment petit; donc évidemment quand on fait tendre δ vers zéro le rapport $\dfrac{W''-W'}{\delta}$ tendra vers l'une ou l'autre des deux premières intégrales (7) divisées par 2π suivant que l'on a $\delta=\Delta x'$ ou $\delta=\Delta y'$; et l'on aura par conséquence

$$\frac{\partial W}{\partial x'}=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C} F\frac{\partial\log r}{\partial x'}\,dx\,dy,\qquad \frac{\partial W}{\partial y'}=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C} F\frac{\partial\log r}{\partial y'}\,dx\,dy$$

pour tous les points $M'(x',y')$ de C, même sur le bord, et cela quand pour $F(x,y)$ on maintient seulement l'hypothèse qu'elle soit finie et intégrable en C.

En passant ensuite à étudier les rapports incrémentaux

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial W''}{\partial x''}-\frac{\partial W'}{\partial x'}\right),\qquad \frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial W''}{\partial y''}-\frac{\partial W'}{\partial y'}\right),$$

nous observerons d'abord que l'on peut écrire

$$(8)\qquad \iint\limits_{\tau} F\left(\frac{\partial\log r''}{\partial x}-\frac{\partial\log r'}{\partial x}\right)dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{\tau}(F-F')\left(\frac{\partial\log r''}{\partial x}-\frac{\partial\log r'}{\partial x}\right)dx\,dy+\iint\limits_{\tau'}(F-F')\left(\frac{\partial\log r''}{\partial x}-\frac{\partial\log r'}{\partial x}\right)dx\,dy$$

$$+\iint\limits_{\tau-\tau'-\tau''}(F-F')\left(\frac{\partial\log r''}{\partial x}-\frac{\partial\log r'}{\partial x}\right)dx\,dy+F'\iint\limits_{\tau}\left(\frac{\partial\log r''}{\partial x}-\frac{\partial\log r'}{\partial x}\right)dx\,dy,$$

où F' est la valeur de $F(x,y)$ en M'; et maintenant si pour ce cas on fait aussi l'hypothèse que $F(x,y)$ soit continue en ce point M', en rappelant ce que nous trouvions pour les deux premières intégrales du second

membre quand il y avait F a la place de $F - F'$ on voit tout de suite que leurs rapports à δ seront aussi petits que l'on voudra si δ aura été déjà pris suffisamment petit.

De même en rappelant que à l'extérieur des cercles τ' et τ'' on a

$$|\Delta| = \left|\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right| \leqq \frac{3\delta}{r'r''}, \quad \text{et} \quad \frac{r'}{r''} \leqq 3,$$

on voit que, toujours en valeur absolue, sera

$$\frac{1}{\delta}\iint_{\tau'-\tau''} (F - F')\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right) dx\,dy \leqq 9 \iint_{\tau - \tau''} \left|\frac{F - F'}{r'}\right| dr'd\theta',$$

donc évidemment, si maintenant on ajoute aussi l'hypothèse que les dérivées premières $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ de $F(x, y)$ soient déterminées et finies, ou du moins que le rapport incrémental $\frac{F - F'}{r'}$ soit intégrable en M' même en le réduisant à ses valeurs absolues, et d'une manière uniforme sur chaque rayon sortant de M', alors le rapport à δ de la troisième intégrale du second membre de (8) sera lui-même aussi petit que l'on voudra si ε aura été pris suffisamment petit.

Et avec cette nouvelle hypothèse pour le rapport $\frac{F - F'}{r'}$, les fonctions $(F - F')\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}$, $(F - F')\frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y}$, $(F - F')\frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2}$ seront aussi évidemment intégrables en M'; et par conséquent puisque l'on a

$$\iint_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r'}{\partial x^2}\,dx\,dy = \iint_{C-\tau} (F - F')\frac{\partial^2 \log r'}{\partial x^2}\,dx\,dy + F'\iint_{C-\tau} \frac{\partial^2 \log r'}{\partial x^2}\,dx\,dy,$$

si l'on remarque que l'intégrale $\iint_{C-\tau} \frac{\partial^2 \log r'}{\partial x^2}\,dx\,dy$ a une limite pour $\tau = 0$, et qu'il ne change même pas avec τ, car si τ_1 est un autre cercle de rayon $\varepsilon_1 < \varepsilon$ avec le centre en M', on a évidemment

$$\iint_{\tau-\tau_1} \frac{\partial^2 \log r'}{\partial x^2}\,dx\,dy = -\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon}\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta'}{r'}\,dr'd\theta' = 0,$$

on en conclut que l'intégrale $\iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r'}{\partial x^2}dxdy$ aura une limite déterminée et finie pour $\tau = 0$, et la même chose arrivera évidemment pour les autres intégrales $\iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r'}{\partial x \partial y}dxdy$, $\iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r'}{\partial y^2}dxdy$; donc, avec la condition que nous posons maintenant pour $\frac{F-F'}{r'}$, celle aussi, que nous avions posée ci-dessus, de l'existence des limites déterminées et finies pour $\tau = 0$ pour les trois dernières des intégrales (6) se trouvera satisfaite; et par suite il sera dorénavant inutile de parler de cette condition.

Avec tout cela, il ne reste plus que d'étudier la dernière intégrale de la formule (8), ou $\iint\limits_{\tau}\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dxdy$; et pour cela nous prendrons à considérer la fonction $u = \frac{(x-a)^2+(y-b)^2-R^2}{4}$ qui satisfait toujours à l'équation $\Delta u = 1$, et sur le cercle C_1 de rayon R avec le centre dans le point (a, b) est toujours zéro.

Par la formule bien connue de Green, nous aurons pour chaque point (x', y') intérieur à C_1

$$u' = \frac{(x'-a)^2+(y'-b)^2-R^2}{4} = -\frac{\eta^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log r' d\theta + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_1}\log r' dxdy;$$

et puisque, comme on sait, et comme du reste il résulte tout de suite du développement de $\log r'$ en série trigonométrique, l'intégrale $\int_0^{2\pi}\log r' d\theta$ a la valeur constante $2\pi \log R$, on en déduit que

$$\text{(9)}\qquad \frac{(x'-a)^2+(y'-b)^2-R^2}{4} + \frac{R^2\log R}{2} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_1}\log r' dxdy,$$

et par conséquent en dérivant on a

$$\frac{x'-a}{2} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_1}\frac{\partial \log r'}{\partial x'}dxdy = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_1}\frac{\partial \log r'}{\partial x}dxdy,$$

l'intégrale du second membre ayant une signification bien déterminée.

De même on a pour le point (x'', y'')

$$\frac{x''-a}{2} = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_1}\frac{\partial \log r''}{\partial x}\,dxdy,$$

et par suite on a la formule remarquable

$$(10) \qquad \frac{x''-x'}{2} = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_1}\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dxdy,$$

qui donne

$$\frac{1}{\Delta x'}\iint\limits_{C_1}\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dxdy = -\pi;$$

de sorte que maintenant il reste assuré que pour chaque point (x', y') *intérieur* à C, quand en ce point $F(x, y)$ est finie et continue et a ses dérivées premières déterminées et finies, ou du moins les rapports incrémentaux $\frac{F-F'}{r'}$ sont intégrables même réduits à leurs valeurs absolues et d'une manière uniforme pour chaque rayon sortant de M', on a la formule

$$(11) \qquad \frac{\partial^2 W'}{\partial x'^2} = \frac{1}{2}F' + \lim_{\tau=0}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}\,dxdy.$$

D'une manière semblable on trouve

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 W'}{\partial x'\partial y'} &= \lim_{\tau=0}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r}{\partial x\partial y}\,dxdy, \\ \frac{\partial^2 W'}{\partial y'^2} &= \frac{1}{2}F' + \lim_{\tau=0}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2}\,dxdy, \end{aligned}\right.$$

et d'après ce que nous avons déjà remarqué, les limites qui figurent dans ces formules seront déterminées et finies.

Et puisque si s et σ sont les contours de C et du petit cercle τ, et α et β sont les angles que la normale intérieure à s fait avec les axes x et y, on a par des formules connues

$$\iint\limits_{C-\tau} \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}\, dx\, dy = -\int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial x} \cos\alpha\, ds - \int\limits_\sigma \frac{\partial \log r}{\partial x} \cos\theta'\, d\sigma =$$

$$= -\int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial x} \cos\alpha\, d\sigma - \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\theta'\, d\theta' = -\int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial x} \cos\alpha\, ds - \pi,$$

et par conséquent

$$\iint\limits_{C-\tau} F \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{C-\tau} (F - F') \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}\, dx\, dy + F' \iint\limits_{C-\tau} \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{C-\tau} (F - F') \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}\, dx\, dy - F' \int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial x} \cos\alpha\, ds - F'\pi,$$

il s'ensuit que pour les dérivées secondes de W on a aussi les formules

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} &= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_C (F - F') \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}\, dx\, dy - \frac{1}{2\pi} F' \int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial x} \cos\alpha\, ds, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial y'} &= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_C (F - F') \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y}\, dx\, dy, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} &= \iint\limits_C (F - F') \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2}\, dx\, dy - \frac{1}{2\pi} F' \int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial y} \cos\beta\, ds, \end{aligned} \right.$$

lesquelles, à cause de la formule connue

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial x} \cos\alpha\, ds + \frac{1}{2\pi} \int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial y} \cos\beta\, ds = \frac{1}{2\pi} \int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial p}\, ds = -1,$$

nous donnent tout de suite

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} = F',$$

comme on le trouve aussi en ajoutant la formule (11) avec la deuxième des formules (12); de sorte que cette propriété du potentiel logarithmique reste ainsi démontrée d'une manière générale pour tous les points $M'(x', y')$ *intérieurs* à C pour lesquels $F(x, y)$ est finie et continue et a ses dérivées premières

$\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ déterminées et finies, ou du moins plus généralement est telle que son rapport incrémental $\frac{F-F'}{r'}$ est uniformément intégrable sur chaque rayon sortant de M' même en le réduisant à ses valeurs absolues, tandis que *pour les autres points de C on exige seulement que la même fonction $F(x, y)$ soit finie et intégrable.*

Ces résultats, qui du reste sont ceux donnés pour le cas de trois variables par MM. Hölder et Morera, enoncés toutefois d'une manière plus générale, peuvent être encore généralisés car avec des légères modifications dans les procédés précédents on pourrait même considérer le cas dans lequel pour la fonction $F(x, y)$ le point (x', y') appartient à une ligne de discontinuité de la fonction même $F(x, y)$, etc.

Tout cela admis, revenons aux trois objections qui, d'après ce que j'ai dit en commençant, il me parait qu'on puisse faire à la méthode de M. Picard.

Supposons toujours pour cela que C soit un de ces champs pour lesquels il est certain qu'il existe la fonction de Green $G = -g - \log r$, et rappelons la formule connue

$$(14) \qquad U' = \frac{1}{2\pi}\int U\frac{\partial G}{\partial p}\,ds - \frac{1}{2\pi}\iint_C F(x, y)\,G\,dx\,dy$$

qui donne la valeur de U dans le point (x', y') intérieur à C quand U est une fonction pour laquelle on suppose l'existence d'avance, et qui dans le champ C est finie et continue avec ces dérivées premières jusqu'au contour, tandis que ses dérivées secondes $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ sont finies et intégrables en C, et, hormis tout au plus un nombre fini de points ou un nombre fini de lignes, satisfont toujours à l'équation $\Delta U = F(x, y)$, cette fonction $F(x, y)$ étant finie et intégrable en C.

Disons pour abréger que $F(x, y)$ satisfait en C aux *conditions normales* quand, exception faite tout au plus pour un nombre fini de points, ou pour un nombre fini de lignes, elle satisfait en chaque point aux conditions que toute à l'heure nous admettions seulement pour le point (x', y') que l'on voulait considérer dans le cas des dérivées secondes de W; c'est-à-dire admettons que, sauf les dites exceptions, pour chaque point (x', y')

de C la fonction $F(x, y)$ soit finie et continue et ait toujours les dérivées premières déterminées et finies, ou du moins qu'elle soit telle que les rapports incrémentaux $\frac{F - F'}{r'}$ soient uniformément intégrables pour les dits points $M'(x', y')$ sur chaque rayon sortant de M' même en les réduisant aux valeurs absolues. Alors il est certain que si $F(x, y)$ satisfait en C à ces conditions normales, la fonction $W = \frac{1}{2\pi}\iint_C F(x, y)\log r dxdy$ que nous avons étudiée dans ce qui précède sera une fonction qui satisfaira à toutes les conditions de U, et par conséquent pour sa valeur W' dans le point $M'(x', y')$ on aura aussi

$$(15) \qquad W' = \frac{1}{2\pi}\int_s W_s \frac{\partial G}{\partial p} ds + \frac{1}{2\pi}\iint F(x, y)(\log r + g) dxdy,$$

de sorte qu'il sera

$$(16) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_s W_s \frac{\partial G}{\partial p} ds = -\frac{1}{2\pi}\iint F(x, y) g dxdy,$$

W_s étant les valeurs de W sur le bord de C.

Cela posé, remarquons maintenant que dans le cas du cercle, si l'on donne des valeurs U_s sur le bord qui aient toujours les dérivées premières déterminées et finies, et aient aussi les dérivées secondes, ou du moins leurs dérivées premières aient leurs rapports incrémentaux intégrables même en les réduisant aux valeurs absolues, alors il existe une fonction harmonique U qui prend ces valeurs U_s sur le bord, et a les dérivées premières finies même en s'approchant indéfiniment au contour, et sur le contour aussi, et ces dérivées ne surpassent jamais l'intégrale des dits rapports incrémentaux rendus positifs, multipliée par un facteur toujours inférieure à un certain nombre fini.

Dans le cas du cercle cette particularité se démontre très facilement, comme nous le verrons plus tard, car dans ce cas on a sous une forme très simple l'expression de la fonction harmonique U; et même pour la dérivée $\frac{\partial U}{\partial \theta'}$ on démontre qu'elle est toujours comprise entre les limites inférieures

et supérieures de $U'_1(\theta')$. Pour d'autres champs les recherches me paraissent assez difficiles, et je me réserve de tâcher de les faire dans une autre occasion; mais, malgré cela, puisque il ne voudrait pas la peine de s'arrêter au cas du cercle, car étant alors suffisantes les considérations de M. Picard, il n'y aurait pas besoin de ces études que nous faisons pour l'intégrale $\iint_C F(x, y) g dx dy$; et puisque d'ailleurs l'on comprend bien déjà qu'il doit y avoir beaucoup d'autres champs pour lesquels on a les mêmes particularités, nous admettrons sans plus que les champs C que nous considérons soient de ceux-ci, en supposant aussi que les lignes du contour (qui pourront avoir aussi des points anguleux) aient toujours leur courbure finie; et pour abréger nous les appellerons *champs normaux*.

Alors si les valeurs données U_s au contour de C satisferont aux conditions susdites, la fonction harmonique U correspondante sera unique et aura certainement l'expression $\frac{1}{2\pi}\int_s U_s \frac{\partial G}{\partial p} ds$, et ses valeurs absolues ne surpasseront jamais le maximum de ceux de U_s, tandis que ses dérivées premières auront les particularités que nous avons indiquées ci-dessus; donc, puisque en s'aidant de ce que nous avons déjà trouvé pour la fonction W nous démontrerons tout de suite ci-dessous que les valeurs W_s que prend cette fonction W satisfont aux conditions que l'on posait toute à l'heure pour les valeurs U_s, il est certain que le premier membre de la formule (16) ou le premier terme du second membre de la formule (15) est une fonction harmonique V qui a toutes les particularités de la dite fonction U, et sur le bord a les mêmes values W_s de W.

Or, en considérant les valeurs W_s comme provenant de W, et en indiquant par $W'(s)$ la dérivée de W_s par rapport à s qui certainement, d'après ce qui précède, sera déterminée et finie, on a

$$W'(s) = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{dy}{ds},$$

et par suite si, en restant sur le bord, on passe du point $M'(x', y')$ qui correspond à l'arc s, au point $M''(x'', y'')$ qui correspond à $s + \Delta s$, et dont la distance de M' est δ, le rapport $\frac{\delta}{\Delta s}$ tendra vers l'unité quand M'' s'approchera indéfiniment à M', et avec les notations qui précèdent on aura

$$(17)\qquad \frac{W'(s+\Delta_s)-W'(s)}{\Delta_s}=\frac{1}{\Delta_s}\left(\frac{\partial W''}{\partial x}-\frac{\partial W'}{\partial x}\right)\frac{dx'}{ds}+\frac{1}{\Delta_s}\left(\frac{\partial W''}{\partial y}-\frac{\partial W'}{\partial y}\right)\frac{dy'}{ds}+$$
$$+\frac{\partial W''}{\partial x}\frac{\dfrac{dx''}{ds}-\dfrac{dx'}{ds}}{\Delta_s}+\frac{\partial W''}{\partial y}\frac{\dfrac{dy''}{ds}-\dfrac{dy'}{ds}}{\Delta_s};$$

donc, en remarquant que les facteurs qui multiplient $\frac{\partial W''}{\partial x}$ et $\frac{\partial W''}{\partial y}$ dépendent seulement du contour et sont finies parce que ce contour a la courbure toujours finie, et en rappelant aussi ce que nous trouvions pour les dérivées $\frac{\partial W}{\partial x}$ et $\frac{\partial W}{\partial y}$ et pour les rapports

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial W''}{\partial x}-\frac{\partial W'}{\partial x}\right),\qquad \frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial W''}{\partial y}-\frac{\partial W'}{\partial y}\right)$$

même sur le bord de C, on en tire que les valeurs absolues des rapports incrémentaux de $W'(s)$ ne surpassent jamais $k_2 F\log\delta$, F étant la limite supérieure des valeurs absolues de F en C, et k_2 ne surpassant jamais, quel que soit C, un certain nombre fini qui dépend seulement du contour de C; et cela met en évidence ce que nous voulions, c'est-à-dire que les valeurs absolues des rapports incrémentaux de $W'(s)$ seront toujours intégrables même en les réduisant aux valeurs absolues, comme justement il fallait qu'il fût pour pouvoir en tirer les conclusions que nous énonçâmes toute à l'heure pour V.

Il suit de là que les dérivées premières de cette fonction V qui, il est maintenant assuré, ne peuvent pas surpasser les intégrales des valeurs (17), ne surpasseront jamais $k_3 F$, k_3 étant un nombre fini qui dépend seulement du contour de C et qui évidemment devient avec ce contour aussi petit que l'on veut, parce que c'est une intégrale de la forme $\int_s \log\delta ds$; donc, puisque la même chose arrive évidemment pour les valeurs de V en C parce qu'elles sont toujours comprises entre les limites inférieures et supérieures de W_s, on peut maintenant en conclure qui si le champ C est un champ normal, et en même temps la fonction $F(x,y)$ satisfait en C aux conditions normales, l'intégrale

$$(18)\qquad \frac{1}{2\pi}\iint_C F(x,y)g\,dx\,dy$$

du second membre de la formule (15), et par conséquent aussi l'intégrale double

$$(19) \qquad A = \frac{1}{2\pi} \iint_C F(x, y) G dx dy$$

toute entière, auront toutes les particularités de W, c'est-à-dire elles et leurs dérivées premières, même sur le bord, ne surpasseront jamais MF et NF, où M et N ne surpassent pas certains nombres finis qui dépendent seulement du contour de C, et qui deviennent avec ce contour aussi petits que l'on veut.

Et cela toujours, comme nous avons dit, quand C est un champ normal, et la fonction $F(x, y)$ y satisfait aux conditions normales; mais il n'est pas exclu, *et cela doit être bien remarqué*, que même si ces conditions ne sont pas *toutes* remplies, il pourra encore arriver que les intégrales (18) et (19) aient toujours les mêmes particularités.

En effet, notre démonstration pour les valeurs et pour les dérivées premières de l'intégrale (18), et par conséquent de A, s'appuie toute sur la formule (14) dans laquelle il faut nécessairement supposer que la fonction U existe et satisfait généralement en *tout* C à l'équation $\Delta U = F(x, y)$, et par suite il faut supposer que la fonction que nous avons indiquée par W ait elle aussi cette particularité, ce que par les démonstrations qui précèdent reste assuré seulement quand $F(x, y)$ satisfait en C aux conditions normales; et en outre quand on veut tirer nos conclusions des formules (15) ou (16) il faut aussi supposer que C soit un champ normal; mais il est évident que même quand ces conditions ne seront pas toutes satisfaites on pourra quelquefois vérifier *autrement* que l'intégrale (18) et par conséquent aussi A auront les propriétés voulues; seulement alors il faudra faire ces vérifications à part.

C'est justement ce que l'on peut faire dans le cas du cercle, comme (et je l'ai déjà dit en commençant) M. Picard avait déjà remarqué, sans rien dire pour les autres champs, car alors la fonction g, à une quantité constante près, est elle aussi le logarithme d'une distance; de sorte que dans le cas du cercle, ainsi que dans tous les autres cas pour lesquels on pourra retrouver à part les dites propriétés de l'intégrale (18) ou de A, il ne sera pas nécessaire d'exiger que $F(x, y)$ satisfasse en C aux conditions normales.

Tout cela pour ce qui regarde les valeurs et les dérivées premières

de l'intégrale (17) et de A quand on s'approche indéfiniment au contour, ou l'on se place sur le contour même. Mais quand il suffit de considérer seulement les points (x', y') *intérieurs* à C, comme cela arrive ordinairement quand on a à s'occuper des dérivées secondes de A, alors il n'est pas nécessaire d'avoir égard à toutes ces particularités.

Et en effet si l'on veut, par ex.: considérer les dérivées secondes de A dans les points intérieurs (x', y'), en remarquant que celles de l'intégrale (18) sont évidemment

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F(x, y)\frac{\partial^2 g}{\partial x'^2}dxdy, \quad \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F(x, y)\frac{\partial^2 g}{\partial x'\partial y'}dxdy, \quad \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F(x, y)\frac{\partial^2 g}{\partial y'^2}dxdy,$$

et en s'appuyant sur les formules (13), on trouvera tout de suite

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial x'^2} &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C (F - F')\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}dxdy + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F\frac{\partial^2 g}{\partial x'^2}dxdy - \\ &\qquad - \frac{F'}{2\pi}\int\limits_C \frac{\partial \log r}{\partial x}\cos\alpha ds, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial x'\partial y'} &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C (F - F')\frac{\partial^2 \log r}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F\frac{\partial^2 g}{\partial x'\partial y'}dxdy, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial y'^2} &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C (F - F')\frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2}dxdy + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F\frac{\partial^2 g}{\partial y'^2}dxdy - \\ &\qquad - \frac{F'}{2\pi}\int\limits_C \frac{\partial \log r}{\partial y}\cos\beta ds, \end{aligned}\right.$$

α et β étant les angles de la normale intérieure au contour avec les axes x et y; et cela pour tous les points *intérieurs* $M'(x', y')$ pour lesquels les rapports $\dfrac{F - F'}{r'}$ sont intégrables d'une manière uniforme sur chaque rayon sortant de M' même en les réduisant aux valeurs absolues, $F(x, y)$ restant maintenant dans tous les autres points de C absolument quelconque et seulement finie et intégrable.

Après cela la première des objections que je faisais au procédé de M. Picard vient tomber entièrement quand on suppose que C soit un champ normal et que les coefficients a, b, c, h de l'équation donnée (1) satisfassent aux conditions normales, ce qui est déjà un cas plus général que celui considéré par M. Picard qui supposait que les dits coefficients en C avaient les dérivées déterminées et finies. Et même si les dites conditions pour le champ C, ou pour les coefficients a, b, c, h, ne sont pas satisfaites on n'exclut pas que, comme dans le cas du cercle, A et ses dérivées premières puissent encore ne surpasser jamais, en valeur absolue, les nombres MF et NF susdits; seulement il faudra faire pour ces cas des vérifications spéciales, après lesquelles seulement la difficulté que je faisais pour la méthode de M. Picard viendra encore à disparaître.

Ensuite, évidemment la deuxième objection viendra elle aussi à tomber, si l'on suppose que C soit un champ normal, et que les valeurs données sur le bord pour l'intégrale que l'on cherche de l'équation (1) aient les dérivées premières déterminées et finies, et les secondes aussi, ou du moins les rapports incrémentaux des dérivées premières soient intégrables même en les réduisant aux valeurs absolues; car alors, avec les dites limitations pour les champs C, la fonction harmonique que, en commençant, nous avons indiqué par u_0 aura ses dérivées premières déterminées et finies même en s'approchant indéfiniment au contour, et sur le contour aussi; donc des objections à la méthode de M. Picard il ne reste maintenant que celle relative aux dérivées secondes des fonctions successives $u_0, u_1, u_2, \ldots$ et de leur série (4).

Mais cette objection va tomber elle aussi tout de suite, et même dans un cas plus général que celui de M. Picard, d'après ce que nous avons démontré ci-dessus.

Prenons en effet la formule (4) des approximations successives, c'est-à-dire

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n + \ldots,$$

où

$$u_1 = -\frac{1}{2\pi}\iint_C \left(a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + cu_0 + h\right) G\,dx\,dy,$$

$$u_n = \frac{1}{2\pi}\iint_C \left(a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + cu_{n-1}\right)(\log r + g)\,dx\,dy \quad \text{pour } n > 1,$$

qui, avec nos limitations pour le champ C, et pour les valeurs données sur le bord pour u, représente certainement, d'après les démonstrations de M. Picard une fonction qui en tout C est finie et continue avec ses dérivées premières (5), même en s'approchant indéfiniment au contours, et sur ce contour aussi.

Observons maintenant que puisque u_0 a certainement les dérivées secondes déterminées et finies dans l'intérieur de C, en s'appuyant sur ce que nous avons démontré on trouvera successivement que la même particularité subsiste aussi pour les termes $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n, \ldots$ en tous les points $M'(x', y')$, *intérieurs* à C, où les coefficients a, b, c, h de l'équation donnée (1) ont une dérivée déterminée et finie, ou du moins ont des rapport incrémentaux $\frac{a-a'}{r'}, \frac{b-b'}{r'}, \frac{c-c'}{r'}, \frac{h-h'}{r'}$ qui sont intégrables d'une manière uniforme sur chaque rayon sortant de M' même quand on les réduit aux valeurs absolues, et cela sans d'autres conditions pour leurs valeurs dans les autres points de C, hormis celle d'être toujours finies et intégrables; et ces dérivées secondes de $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n, \ldots$ pourront être déterminées en s'aidant des formules (20).

Pour tous ces points $M'(x', y')$ on pourra donc former les trois séries $\sum \frac{\partial^2 u_n}{\partial x'^2}, \sum \frac{\partial^2 u_n}{\partial x' \partial y'}, \sum \frac{\partial^2 u_n}{\partial y'^2}$ des dérivées secondes, et à cause des formules (20), la première de ces séries sera la suivante:

$$
(21) \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x'^2} + \frac{1}{2\pi} \sum_2^{\infty} \Bigg| \iint_C \Big\{ a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c u_{n-1} -
$$
$$
- a' \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'} - b' \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'} - c' u'_{n-1} \Big\} \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} dx dy +
$$
$$
+ \iint_C \left(a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c u_{n-1} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x'^2} dx dy -
$$
$$
- \left(a' \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'} + b' \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'} + c' u'_{n-1} \right) \int_s \frac{\partial \log r}{\partial x} \cos \alpha ds \Bigg|,
$$

et nous allons l'étudier.

Remarquons pour cela que, si l'on s'arrêtait au cas (qui du reste sera le cas ordinaire) dans lequel les coefficients a, b, c, h de la (1) satisfont en C aux conditions normales, alors outre que pour le point (x', y') on

pourrait former la série (21) aussi pour tous les points de son voisinage, et pour les théorèmes connus de la dérivation par série il suffirait de démontrer que dans ces voisinages la même série (21) converge uniformément; et cette démonstration pourrait se faire très aisement en décomposant la même série (21) dans les trois séries (A), (B), (C) qui se forment avec les trois parties dont se composent ses terme, et en les examinant séparémment.

Mais, puisque on peut le faire assez aisément, nous resterons dans le cas plus général dans lequel on admet seulement de savoir que, pour le point $M'(x', y')$ qui l'on considére, les rapports $\frac{a-a'}{r'}$, $\frac{b-b'}{r'}$, $\frac{c-c'}{r'}$, $\frac{h-h'}{r'}$ satisfont à la condition d'intégrabilité d'une manière uniforme sur chaque rayon sortant de M' même en les réduisant aux valeurs absolues, sans rien supposer pour les autres points du voisinage de ce point M'; et alors, puisque on ne sait pas si on peut former la série (21) aussi pour ces autres points, il faudra appliquer d'autres théorèmes de la dérivation par série, pour montrer que la série (21), considérée seulement pour le point $M'(x', y')$, est convergente et représente la dérivée seconde $\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}$.

Considérons pour cela la série des dérivées premières de la (4), ou

$$(22)\qquad \frac{\partial u_0}{\partial x'}+\frac{\partial u_1}{\partial x'}-\frac{1}{2\pi}\sum_2^\infty \iint_C \left(a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}+cu_{n-1}\right)\frac{\partial \log r}{\partial x}\,dx\,dy+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\sum_2^\infty \iint_C \left(a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}+cu_{n-1}\right)\frac{\partial g}{\partial x'}\,dx\,dy,$$

qui représentera certainement $\frac{\partial u}{\partial x'}$; et remarquons que, puisque g et ses dérivées sont toujours finies quand, comme à present, le point $M'(x', y')$ est supposé intérieur à C, la deuxième série $\sum\limits_2^\infty$ a certainement une dérivée qui est donnée par la série des dérivées en tous les points intérieurs à C. Evidemment donc il suffira de chercher si la première série

$$(23)\qquad \sum_2^\infty \iint_C \left(a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}+cu_{n-1}\right)\frac{\partial \log r}{\partial x}\,dx\,dy$$

a une dérivée qui soit la série des dérivées dans le point $M'(x', y')$.

Indiquons pour cela par R'_m et R''_m les restes de cette série (23) pour les points $M'(x', y')$ et $M''(x'', y'')$ où $x'' = x' + \Delta x'$, $y'' = y'$, et rappelons le théorème du § 102 de mes *Fondamenti per la teorica delle funzioni di una variabile reale;* il suffira de démontrer que pour chaque nombre m supérieur à un certain nombre m' il existe un nombre ε (variable ou non avec m) tel que pour les valeurs de $\Delta x'$ numériquement inférieurs à ε le rapport $\Delta_1 = \dfrac{R'_m - R''_m}{\Delta x'}$ ne surpassera jamais en valeur absolue un nombre donné σ aussi petit que l'on voudra.

Remarquons pour cela qu'en ayant

$$\Delta_1 = \frac{1}{\Delta x'} \sum_{m+1}^{\infty} \iint_C \left(a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c u_{n-1}\right)\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right) dx dy,$$

on pourra décomposer Δ_1 dans les deux séries

$$(24) \quad \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{\Delta x'} \iint_C \left(a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c u_{n-1} - a' \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'} - b' \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'} - c' u'_{n-1}\right) \times \left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right) dx dy,$$

$$(25) \quad \frac{1}{\Delta x'} \iint_C \left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right) dx dy \sum_{m+1}^{\infty} \left(a' \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'} + b' \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'} + c' u'_{n-1}\right)$$

qui sont convergentes; et puisque, quand $\Delta x'$ s'approche indéfiniment de zéro le rapport $\dfrac{1}{\Delta x'} \displaystyle\iint_C \left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right) dx dy$ tend vers la dérivée seconde de $\displaystyle\iint_C \log r dx dy$ qui est toujours déterminée et finie, et la série

$$\sum_{2}^{\infty} \left(a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c u_{n-1}\right)$$

converge uniformément *en tout* C, et aussi, d'après les raisonnements de M. Picard, est convergente la série $\sum_{2}^{\infty} (\bar{a}\alpha_{n-1} + \bar{b}\beta_{n-1} + \bar{c}\gamma_{n-1})$ où $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, α_{n-1}, β_{n-1}, γ_{n-1} sont les limites supérieures des valeurs absolues de a, b, c,

$\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}$, $\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}$, u_{n-1} en C est convergente, il est certain que si l'on prend un nombre m' tel que le reste $\sum_{m'+1}^{\infty} (\bar{a}\alpha_{n-1} + \bar{b}\beta_{n-1} + \bar{c}\gamma_{n-1})$ de cette série ne surpasse pas un nombre très petit que l'on ait choisi σ_1, alors pour chaque point $M'(x', y')$ intérieur à C la série (25), même quand $\Delta x'$ sera devenue numériquement inférieure à un certain nombre ε que nous fixerons ci-après, restera toujours aussi petite que l'on voudra pour toutes les valeurs de m supérieures à m'.

Or, quant à la série (24) remarquons qu'elle peut se décomposer dans les quatre

$$(26)\quad \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{\Delta x'} \iint_C \left\{ a\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} - \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'}\right) + b\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} - \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'}\right) + c(u_{n-1} - u'_{n-1}) \right\} \times \left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right) dx\, dy,$$

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\Delta x'} \iint_C (a - a')\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right) dx\, dy \sum_{m+1}^{\infty} \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'}, \\ &\frac{1}{\Delta x'} \iint_C (b - b')\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right) dx\, dy \sum_{m+1}^{\infty} \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'}, \\ &\frac{1}{\Delta x'} \iint_C (c - c')\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right) dx\, dy \sum_{m+1}^{\infty} u'_{n-1}, \end{aligned} \right.$$

et puisque, d'après nos hypothèses sur les rapports $\frac{a - a'}{r'}$, $\frac{b - b'}{r'}$, $\frac{c - c'}{r'}$ pour le point M' les rapports à $\Delta x'$ des intégrales doubles qui figurent dans les dernières séries (27), quand $\Delta x'$ s'approche indéfiniment à zéro, tendent vers les dérivées secondes des fonctions

$$\iint_C (a - a') \log r\, dx\, dy, \qquad \iint_C (b - b') \log r\, dx\, dy, \qquad \iint_C (c - c') \log r\, dx\, dy,$$

qui d'après les dites hypothèses sont déterminées et finies, c'est évident que si le nombre m' aura été pris suffisamment grand, les trois séries (27) seront elles aussi aussi petites que l'on voudra pour $m > m'$, quand $\Delta x'$ sera numériquement inférieure à ε.

Il reste maintenant à étudier la série (26), et pour celle-ci nous procèderons comme il suit.

Prenons un petit champ circulaire ω avec le centre dans le point $M'(x', y')$ et dont le rayon sera choisi de manière que ω soit tout entier intérieur à C, et sera pris pour le nombre ε; et décomposons C dans les deux champs ω et $C-\omega$.

La série (26) pourra se décomposer dans les deux

$$(28)\quad \sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{\Delta x'}\iint\limits_{C-\omega}\left\{a\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}-\frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'}\right)+b\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}-\frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'}\right)+c(u_{n-1}-u'_{n-1})\right\} \times\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x}-\frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy,$$

$$(29)\quad \sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{\Delta x'}\iint\limits_{\omega}\left\{a\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}-\frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'}\right)+b\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}-\frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'}\right)+c(u_{n-1}-u'_{n-1})\right\} \times\left(\frac{\partial \log r''}{dx}-\frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy,$$

et puisque, si l'on suppose que $\Delta x'$ soit déjà numériquement inférieure à ε, dans les intégrales qui figurent dans la première de ces séries les points M' et M'' n'appartiennent pas au champ d'intégration $C-\omega$, avec les mêmes procédés que nous appliquâmes en commençant pour étudier la partie de la différence $\frac{\partial W''}{\partial x''}-\frac{\partial W'}{\partial x'}$ correspondante au champ que alors nous avions indiqué par $C-\tau'-\tau''$, on trouve tout de suite que la dite série (28) sera toujours numériquement inférieure à

$$36\pi(\log 2L_1-\log\varepsilon)\sum_{m+1}^{\infty}(\bar{a}\alpha_{n+1}+\bar{b}\beta_{n-1}+\bar{c}\gamma_n).$$

L_1 étant la limite supérieure des distances de M' aux points du contour; et par conséquent, même si ε aura été pris très petit, en grandissant, si cela sera nécessaire, le nombre m' déjà choisi ci-dessus, la dite série (28) sera toujours aussi petite que l'on voudra pour toutes les valeurs de m supérieures à m'.

Pour considérer maintenant la serie (29), remarquons d'abord que u_{n-1} est donné par la formule

$$u_{n-1} = \frac{1}{2\pi} \iint \left(a \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-2}}{\partial y} + c u_{n-2}\right) \log r d\xi d\eta + \tag{30}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint \left(a \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-2}}{\partial y} + c u_{n-2}\right) g(\xi, \eta, x, y) d\xi d\eta,$$

où a, b, c, u_{n-2} sous les intégrales sont fonctions de ξ, η, et r est la distance entre les points (x, y) et (ξ, η); et déduisons d'ici les valeurs des différences

$$\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} - \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'}\,, \quad \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} - \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'}\,, \quad u_{n-1} - u'_{n-1} \tag{31}$$

pour les points (x, y), (x', y') du champ ω que l'on doit considérer à présent pour l'étude de la série (29).

Ces différences (31) auront chacune deux termes comme dans l'expression (30) de u_{n-1}, et en appliquant aux premiers de ces termes les considérations générales que nous avons faites en commençant pour l'étude des différences $W'' - W'$, $\frac{\partial W''}{\partial x''} - \frac{\partial W'}{\partial x'}$, on verra tout de suite que les parties des différences (31) qui proviennent de leurs premiers termes ne surpasseront pas en valeur absolue pour les deux premières différences la quantité

$$(\bar{a}\alpha_{n-2} + \bar{b}\beta_{n-2} + \bar{c}\gamma_{n-2}) K_1 r' \log r',$$

et pour la troisième la quantité

$$(\bar{a}\alpha_{n-2} + \bar{b}\beta_{n-1} + \bar{c}\gamma_{n-2}) K_2 r',$$

K_1 et K_2 étant des nombres finis qu'on peut supposer ne dépendants que du champ C.

De même on trouve que les parties des différences (31) qui proviennent de leurs deuxièmes termes ne surpasseront jamais une quantité de la forme $(\bar{a}\alpha_{n-2} + \bar{b}\beta_{n-2} + \bar{c}\gamma_{n-2}) K_3 r'$, où K_3 est encore un nombre fini; car si l'on observe que maintenant le point (x, y), ainsi que l'autre (x', y'), est toujours compris dans le champ ω qui est tout intérieur à C, on voit que dans ce cas la fonction $g(\xi, \eta, x, y)$ est finie et continue avec ses

dérivées par rapport à x et y *pour tous les points* (ξ, η) de C,[1] et par conséquent les différences

$$g(\xi, \eta, x, y) - g(\xi, \eta, x', y'),$$

$$\frac{\partial g(\xi, \eta, x, y)}{\partial x} - \frac{\partial g(\xi, \eta, x', y')}{\partial x'},$$

$$\frac{\partial g(\xi, \eta, x, y)}{\partial y} - \frac{\partial g(\xi, \eta, x', y')}{\partial y'},$$

avec le développement par la série de TAYLOR peuvent se mettre toutes sous la forme

$$A(x - x') + B(y - y') \quad \text{ou} \quad K_n r',$$

où A, B, K_n pourront être assez grandes, mais ne surpasseront jamais un nombre fini $\frac{K_3}{C}$ qui dépend seulement de C et de ε.

Donc évidemment la série (29) sera toujours numériquement inférieure à

$$\frac{1}{\Delta x'} \iint_C \{(\bar{a} + \bar{b}) K_1 r' \log r' + (\bar{c} K_2 + K_2) r'\} \left| \frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x'} \right| dx\, dy$$

$$\times \sum_{m+1}^{\infty} (\bar{a}\alpha_{n-2} + \bar{b}\beta_{n-2} + \bar{c}\gamma_{n-2})$$

où nous avons indiqué avec $\left| \frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x} \right|$ la valeur absolue de la différence $\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}$; donc, puisque avec les mêmes procédés généraux que nous avons appliqués en commençant à la fonction indiquée alors par W, avec la décomposition du champ C dans les trois champs τ', τ'', $C - \tau' - \tau''$, on voit tout de suite que pour tous les valeurs de $\Delta x'$ numériquement inférieures à ε les rapports

$$\frac{1}{\Delta x'} \iint r' \log r' \left| \frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x} \right| dx\, dy, \qquad \frac{1}{\Delta x'} \iint r' \left| \frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x} \right| dx\, dy$$

restent finis, on en conclut que même la série (29), pour ces valeurs de $\Delta x'$ et quand $m > m'$, sera toujours aussi petite que l'on voudra; et avec

[1] C'est justement pour pouvoir considérer la fonction $g(\xi, \eta, x, y)$ seulement pour les points (x, y) pour lesquels elle a les propriétés indiquées que nous avons décomposée la série (26) dans les deux (28) et (29).

cela d'après le théorème que j'ai rappelé du § 102 des mes *Fondamenti* etc., reste démontré que pour le point (x', y') la dérivation par série est applicable à la série (22), et par conséquence on a, pour la (21) et en ayant regard à la première des formules (20)

$$(32) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{1}{2\pi}\left(a'\frac{\partial u'}{\partial x'} + b'\frac{\partial u'}{\partial y'} + c'u' + h'\right)\int_s \frac{\partial \log r}{\partial x}\cos\alpha ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\iint_C (h - h')\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} dx dy + \frac{1}{2\pi}\iint_C h\frac{\partial^2 g}{\partial x'^2} dx dy$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\sum_1^\infty \left| \iint_C \left\{ a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + cu_{n-1} \right.\right.$$

$$\left. - a'\frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'} - b'\frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'} - c'u'_{n-1}\right\}\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} dx dy$$

$$\left. + \iint_C \left(a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + cu_{n-1}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial x'^2} dx dy \right| ;$$

et maintenant en remarquant que le même résultat peut s'obtenir pour $\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}$, on trouvera tout de suite

$$\Delta u = -\frac{1}{2\pi}\left(a'\frac{\partial u'}{\partial x'} + b'\frac{\partial u'}{\partial y'} + c'u' + h'\right)\int_s \left(\frac{\partial \log r}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \log r}{\partial y}\cos\beta\right)ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(a'\frac{\partial u'}{\partial x'} + b'\frac{\partial u'}{\partial y'} + c'u' + h'\right)\int_s \frac{\partial \log r}{dp} ds = a'\frac{\partial u'}{\partial x'} + b'\frac{\partial u'}{\partial y'} + c'u' + h',$$

comme il fallait démontrer.

Avec cela la belle méthode de M. Picard des approximations successives est réduite parfaitement rigoureuse pour toutes les équations (1), avec les seules limitations que nous avons posées pour le champ C et pour les valeurs données pour l'intégrale sur le bord; et cela d'une manière bien générale, puisque on n'admet même pas que les coefficients a, b, c, h, qui doivent pourtant être finis et intégrables en C, aient aussi les dérivées premières déterminées et finies, mais seulement on exige qu'ils satisfassent en C aux conditions que nous avons dit conditions normales, si, comme il est naturel, on veut être sûr que la fonction (4) que l'on trouve pour

u satisfait à l'équation donnée (1) en tous les points intérieurs à C, exceptés seulement, tout au plus, les points isolés et les lignes singulières (en nombre fini) qui, même avec les conditions normales, on admet qu'ils puissent exister, où les coefficients a, b, c, h n'aient pas les propriétés ordinaires relatives à la continuité, et à l'intégrabilité d'une manière uniforme des rapports $\frac{a-a'}{r'}, \frac{b-b'}{r'}, \frac{c-c'}{r'}, \frac{h-h'}{r'}$ sur chaque rayon sortant du point (x', y') même en les réduisant à leurs valeurs absolues.

Cela d'ailleurs sera le cas ordinaire; mais du reste si quelquefois ces conditions normales pour les coefficients a, b, c, h ne seront pas satisfaites, on pourra toutefois considérer encore le cas dans lequel le champ C est un cercle, ou même plus généralement est un de ces champs pour lesquels on pourra encore de quelque manière s'assurer que, pour toute fonction $F(x, y)$ finie et intégrable au C, l'intégrale double (18) ou

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F(x, y)g(x, y, x', y')dxdy$$

et ses dérivées premières, même quand le point (x', y') s'approche indéfiniment au contour, ou est sur ce contour même, restent inférieures aux nombres $M\overline{F}$, et $N\overline{F}$, $\overline{F}$ étant la limite supérieure des valeurs absolues de $F(x, y)$ en C, et M et N étant des nombres finis qui dépendent seulement du champ C et qui peuvent même être réduits aussi petits que l'on voudra en prenant le champ C suffisamment petit. Seulement dans ces cas, tandis qu'il sera encore certain que la fonction u déterminée par la série (4) sera finie et continue avec ses dérivées premières en tout C, et prendra sur le bord les valeurs données, on ne sera pas sûr de même qu'elle satisfait en C à l'équation donnée (1), sauf pour les points (x', y') intérieurs à C pour lesquels a, b, c, h sont continues et les rapports $\frac{a-a'}{r'}, \frac{b-b'}{r'}, \frac{c-c'}{r'}$ et $\frac{h-h'}{r'}$ sont intégrables d'une manière uniforme sur chaque rayon sortant du point (x', y') même en les réduisant à leurs valeurs absolues; de sorte que dans ces cas il pourra y avoir des portions superficielles de C, ou même seulement des points ou des lignes isolées, où on sera encore tout à fait sûr que la fonction trouvée (4) satisfait à l'équation donnée (1) et aux autres conditions voulues, en même temps qu'il pourra y avoir aussi des points ou des lignes, ou même d'autres

portions superficielles de C où on ne sera pas sûr que cette équation (1) soit satisfaite.

Du reste, même en restant dans le cas plus restreint des conditions normales pour a, b, c, h, la circonstance que dans ce cas aussi nous avons admis qu'il puisse y avoir des lignes singulières est bien remarquable, car on pourra, par exemple, supposer que dans une certaine portion A de C doive être satisfaite une certaine équation (1) et dans la portion restante B de C doive être satisfaite une autre équation dans la quelle a, b, c, h ne soient pas toutes les mêmes fonctions que l'on avait en A; et alors la série (4) des approximations successives donnera encore la fonction u qui est finie et continue en tout C, même sur le contour, elle et ses dérivées premières, et prend sur le bord les valeurs données, et en A satisfait à la première équation (1) et en B satisfait à l'autre; l'incertitude pour l'équation (1) à satisfaire restant seulement, outre que sur le bord, le long de la ligne de séparation de A et B.

Enfin il est à peine nécessaire de remarquer que toutes nos objections et nos recherches sur la méthode des approximations successives de M. Picard se rapportent principalement au cas dans lequel l'équation donnée (1) a au moins un des deux termes $a\frac{\partial u}{\partial x}$, $b\frac{\partial u}{\partial y}$ qui portent les dérivées premières; tandis que quand ces deux termes manquent tout devient bien plus simple, car alors il suffit que le champ C soit de ceux pour lesquels il existe la fonction de Green, que les valeurs données au contour pour l'intégrale soient finies et continues, et enfin que les coefficients c et h satisfassent aux conditions normales.

Dans ce cas en effet, puisque dans les fonctions que nous avons indiquées en commençant avec $F_0, F_1, F_2, \ldots$ ne figurent pas les dérivées premières de $u_0, u_1, u_2, \ldots$, il n'y a pas lieu à considérer les dérivées de l'intégrale double (18), tandis que cette intégrale à cause de (16) résulte inférieure au nombre MF; et alors cette seule condition, quand le champ C est suffisamment restreint, donne tout de suite la formule

$$u = u_0 + \frac{1}{2\pi}\iint_C (cu + h)G\,dx\,dy,$$

de laquelle, à cause de nos considérations sur les fonctions indiquées par W et par A, on en tire d'abord que pour tous les points (x', y') de C,

même sur le bord, la fonction u est finie et continue et prend sur le bord les valeurs données, et la même chose arrive pour ses dérivées premières dans tous les points (x', y') *intérieurs* à C; et ensuite, à cause de cette particularité pour les dérivées premières de u et de ce que nous trouvâmes pour l'intégrale A, on en tire que u satisfait à l'équation donnée (1) en tout C, sauf tout au plus sur le bord, et dans les points ou sur les lignes des singularités des fonctions c et h.

Et avec ce procédé on voit aussi que l'équation donnée actuelle $\Delta u = cu + h$ pourra avoir des formes différentes en différentes portions de C, car les fonctions c et h peuvent encore avoir des lignes de discontinuité etc.

Maintenant, avant de finir, c'est le cas aussi de montrer que la limitation que nous avons posée pour les champs C dans le cas que l'équation donnée (1) ait au moins un des deux termes $a\frac{\partial u}{\partial x}$, $b\frac{\partial u}{\partial y}$, c'est-à-dire la condition d'être de ceux que nous avons nommés champs normaux, se trouve satisfaite, comme nous avons affirmé à sa place, pour le cercle, et par conséquent aussi pour tous les autres champs que l'on peut déduire du cercle avec les procédés ordinaires de représentation, quand les formules correspondantes à ces représentations ne portent pas elles-mêmes des singularités.

Rappelons pour cela que dans le cas du cercle C de rayon R, si l'on introduit les coordonnées polaires (ρ, θ) avec le pôle dans le centre, la fonction harmonique qui prend sur le bord des valeurs données $u(\theta)$ est déterminée dans les points intérieurs (ρ', θ') par la formule de Poisson

$$(33) \qquad u(\rho', \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta)\frac{R^2 - \rho'^2}{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho'\cos(\theta - \theta')}d\theta,$$

et ces valeurs dans les points intérieurs tendent avec continuité vers les valeurs données $u(\theta)$ en s'approchant indéfiniment au contour, si ces valeurs données $u(\theta$ sont finies et continues, et l'on a $u(0) = u(2\pi)$.

Supposons maintenant que ces valeurs données $u(\theta)$ aient aussi la dérivée première $u'(\theta)$ finie et continue pour tous les points du contour, ou du moins intégrable même en la reduisant à ses valeurs absolues, et avec cette hypothèse cherchons les dérivées premières $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ et $\frac{\partial u}{\partial \theta'}$ de $u(\rho', \theta')$ en tous les points de C, même en s'approchant indéfiniment au contour.

Puisque l'on a en général, si $a < b$,

$$\int \frac{d\alpha}{a + b\cos\alpha} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\right) + \text{ const.},$$

et par conséquent

$$\int \frac{d\theta}{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho'\cos(\theta - \theta')} = \frac{2}{R^2 - \rho'^2} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{R+\rho'}{R-\rho'}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta - \theta')\right] + \text{ const.},$$

si l'on écrit la (33) sous la forme

$$u(\rho', \theta') = \int_{\theta'-\pi}^{\theta'+\pi} u(\theta) \frac{R^2 - \rho'^2}{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho'\cos(\theta - \theta')} d\theta,$$

en y appliquant l'intégration par parties, on trouvera tout de suite la formule suivante

$$(34) \qquad u(\rho', \theta') = u(\theta' - \pi) - \frac{1}{\pi}\int_{\theta'-\pi}^{\theta'+\pi} u'(\theta) \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{R+\rho'}{R-\rho'}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta - \theta')\right] d\theta$$

qui donne une autre expression de la fonction $u(\rho', \theta')$; et maintenant, de même qu'à l'aide de (33) on pourra aisément déterminer une expression de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \theta'}$ qui met bien en évidence ce qu'il advient de cette dérivée en s'approchant indéfiniment au contour, ainsi en s'aidant de la formule (34) on pourra déterminer une expression semblable pour l'autre dérivée $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$.

En effet la formule (33) nous donne

$$\frac{\partial u}{\partial \theta'} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta'}\left[\frac{R^2 - \rho'^2}{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho'\cos(\theta - \theta')}\right] d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{R^2 - \rho'^2}{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho'\cos(\theta - \theta')}\right] d\theta$$

et en appliquant l'intégration par parties on trouve immédiatement la formule

$$\frac{\partial u}{\partial \theta'} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u'(\theta)\frac{R^2-\rho'^2}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos(\theta-\theta')}d\theta, \tag{35}$$

qui donne la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \theta'}$ que nous cherchions, et par laquelle on voit (chose du reste bien naturelle puisque $\frac{\partial u}{\partial \theta'}$ satisfait à l'équation $\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial \theta'}\right)=0$) que cette dérivée a les valeurs qui prend la fonction harmonique dont les valeurs sur le bord sont $u'(\theta)$; et pourtant cette dérivée $\frac{\partial u}{\partial \theta'}$ ira avec continuité vers la dérivée de la fonction au contour pour tous les points θ' pour lesquels cette dérivée $u'(\theta)$ est finie et continue; et elle sera toujours finie et comprise entre les limites inférieurs et supérieurs de cette dérivée $u'(\theta)$ si celle-ci sera toujours finie et intégrable.

Ensuite, en faisant la dérivation par rapport a ρ' sous l'intégrale, la formule (34) nous donne

$$\frac{\partial u}{\partial \rho'} = -\frac{2R}{\pi}\int_{\theta'-\pi}^{\theta'+\pi} u'(\theta)\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta-\theta')}{(R-\rho')^2+(R+\rho')^2\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(\theta-\theta')}d\theta, \tag{36}$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial \rho'} = -\frac{R}{\pi}\int_{\theta'-\pi}^{\theta'+\pi} u'(\theta)\frac{\sin(\theta-\theta')}{(R-\rho')^2\cos^2\frac{1}{2}(\theta-\theta')+(R+\rho')^2\sin^2\frac{1}{2}(\theta-\theta')}d\theta$$

et l'on pourra écrire aussi

$$\frac{\partial u}{\partial \rho'} = -\frac{R}{\pi}\int_{\theta'-\pi}^{\theta'+\pi} u'(\theta)\frac{\sin(\theta-\theta')}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos(\theta-\theta')}d\theta$$

ou enfin

$$\frac{\partial u}{\partial \rho'} = -\frac{R}{\pi}\int_0^{2\pi} u'(\theta)\frac{\sin(\theta-\theta')}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos(\theta-\theta')}d\theta \tag{37}$$

et ces formules donneront des différentes expressions de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ en tous les points (ρ', θ') *intérieurs* au cercle.

Maintenant pour voir ce qu'il arrive quand on s'approche indéfiniment au contour, remarquons qu'avec une décomposition convenable en parties de l'intégrale du second membre de la formule (37), et avec un changement de variable, on trouve aussi

$$(38)\qquad \frac{\partial u}{\partial \rho'} = -\frac{R}{\pi}\int_0^\pi \{u'(\theta'+\alpha) - u'(\theta'-\alpha)\}\frac{\sin\alpha}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos\alpha}\,d\alpha.$$

et par conséquent si l'on suppose maintenant que pour chaque valeur de θ la dérivée $u'(\theta)$ soit toujours finie et intégrable, et que pour la valeur θ' que l'on considère le rapport $\frac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\alpha}$ soit intégrable pour $\alpha = 0$ même en le réduisant à ses valeurs absolues, alors en remarquant que

$$R^2+\rho'^2 > 2R\rho' \quad \text{et} \quad R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos\alpha \geqq (R-\rho')^2,$$

et en s'aidant de l'une ou de l'autre de ces deux conditions selon que l'on a par ex.: $\frac{1}{2}R \leqq \rho' < R$ ou $\rho' < \frac{1}{2}R$, on trouve qu'en chaque point sur le rayon correspondant à la valeur θ' on aura

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \rho'}\right| < k\int_0^\pi \left|\frac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\alpha}\right| d\alpha,$$

k étant un nombre fini, qui l'on voit tout aisément que ne surpassera jamais le nombre $\frac{4}{\pi R}$.

Mais on peut voir aussi que, sous la dite hypothèse sur le rapport $\frac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\alpha}$ pour la valeur θ' que l'on considère, la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ existe effectivement même sur le bord, et elle est donnée par l'intégrale limite

$$(39)\qquad -\frac{1}{2\pi R}\int_0^\pi \{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)\}\cot\frac{\alpha}{2}\,d\alpha$$

de celle qui figure dans la valeur (38) de $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ pour les points intérieurs et qui aura évidemment toujours une signification pour les dits points θ'.

Pour démontrer cela remarquons que cette intégrale (39) peut aussi être regardée comme la limite pour $\rho' = R$ de l'autre

$$-\frac{R}{\pi}\int_0^\pi \{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)\}\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2R\rho'\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha,$$

et par conséquent si l'on trouvera que la différence

$$\Omega = -\frac{R}{\pi}\int_0^\pi \{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)\}\left\{\frac{\sin\alpha}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos\alpha}-\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2R\rho'\sin\frac{\alpha}{2}}\right\}d\alpha$$

entre cette intégrale et celle de la formule (38) peut devenir et rester aussi petite que l'on voudra quand ρ' s'approche indéfiniment à R, alors il sera certain que la valeur (38) aura une limite en allant au contour sur le rayon qui correspond à l'angle polaire θ', et cette limite sera justement l'intégrale (39), qui viendra pourtant à être la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ sur le bord pour la valeur θ'.

Or, l'on a évidemment

$$\Omega = \frac{1}{2R\rho'}\int_0^\pi \frac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,\frac{(R-\rho')^2}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos\alpha}\cos\frac{\alpha}{2}\,d\alpha,$$

et ici le rapport $\frac{(R-\rho')^2}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos\alpha} = \frac{(R-\rho')^2}{(R-\rho')^2+2R\rho'(1-\cos\alpha)}$ ne surpasse jamais l'unité; donc en indiquant avec ε un nombre aussi petit que l'on voudra, et en remarquant que l'intégrale $\int_0^\pi$ peut se décomposer dans les deux $\int_0^\varepsilon$, $\int_\varepsilon^\pi$, on en tire que la valeur absolue de Ω sera toujours inférieure à la somme des deux termes

$$\frac{\lambda}{\pi\rho'}\int_0^\varepsilon\left|\frac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\alpha}\right|d\alpha,$$

$$\frac{(R-\rho')^2}{4\pi R\rho'^2}\int_\varepsilon^\pi\frac{|u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)|}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{R^2+\rho'^2}{2R\rho'}-\cos\alpha}\,d\alpha,$$

λ étant une valeur moyenne de $\dfrac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ pour α comprise entre o et ε et pourtant très voisine de l'unité.

Or, si l'on prend pour ε un nombre assez petit, le premier de ces deux termes, d'après notre hypothèse, sera aussi petit que l'on voudra.

Ensuite, après avoir ainsi fixé ε, si l'on indique par m la limite supérieure des valeurs absolues de $u'(\theta)$ sur le bord, et l'on remarque que $\dfrac{R^2+\rho'^2}{2R\rho'}>1$, on voit tout de suite que le second terme ne surpasse pas $\dfrac{(R-\rho')^2 m}{2\pi R\rho'^2\sin\frac{\varepsilon}{2}}\displaystyle\int_\varepsilon^\pi\frac{d\alpha}{1-\cos\alpha}$, ou $\dfrac{(R-\rho')^2 m\cos\frac{\varepsilon}{2}}{2\pi R\rho'^2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}$; et quelque petit qu'on ait pris ε on pourra déterminer toujours un nombre ρ_1 inférieur à R mais aussi près de R que pour toutes les valeurs de ρ' entre ρ_1 et R cette dernière quantité soit aussi petite que l'on voudra; donc évidemment il reste maintenant démontré que pour les valeurs de θ' qui à present nous considérons la dérivée $\dfrac{\partial u}{\partial\rho'}$ existe même sur le bord, et alors sa valeur est donnée par l'intégrale (39); ou, en d'autres termes la formule (38) pour les dits valeurs de θ' subsiste même au contour.

En résumé donc, nous pouvons maintenant affirmer que si l'on se propose de déterminer dans un cercle C de rayon R une fonction harmonique u qui sur le bord prenne des valeurs données qui constituent une fonction finie et continue $u(\theta)$ pour laquelle on ait $u(2\pi)=u(0)$, et dont la dérivée prémière $u'(\theta)$ existe et soit finie et continue ou du moins finie et intégrable entre o et 2π, alors cette fonction u non seulement existera

toujours en tout C, et pour chaque point (ρ', θ') intérieur à C sera donnée par les formules

$$u(\rho', \theta') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta)\frac{R^2-\rho'^2}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos(\theta-\theta')}d\theta,$$

ou

$$u(\rho', \theta') = u(\theta'-\pi) - \frac{1}{\pi}\int_{\theta'-\pi}^{\theta'+\pi} u'(\theta)\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{R+\rho'}{R-\rho'}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta-\theta')\right]d\theta,$$

et elle aura les dérivées premières $\frac{\partial u}{\partial \theta'}$ et $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ déterminées et finies dans les mêmes points (ρ', θ') intérieurs à C, mais il adviendra aussi que en s'approchant indéfiniment aux points θ' du contour, la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \theta'}$ ira avec continuité vers la valeur $u'(\theta')$ de la dérivée de $u(\theta)$ dans tous les points θ' de continuité de cette dérivée, et en ces points sera elle aussi égale a cette dérivée $u'(\theta')$; tandis que pour l'autre dérivée $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ sur le bord on pourra assurer qu'elle est déterminée et finie seulement pour les points θ' pour lesquels le rapport $\frac{u'(\theta+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\alpha}$ sera intégrable pour $\alpha = 0$ même en le réduisant à ses valeurs absolues.

Et la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \theta'}$ sera donnée par la formule

$$(40) \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta'} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u'(\theta)\frac{R^2-\rho'^2}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos(\theta-\theta')}d\theta$$

pour tous les points (ρ', θ') intérieurs au cercle, et l'autre dérivée $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ sera donnée par la formule

$$(41) \qquad \frac{\partial u}{\partial \rho'} = -\frac{R}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)\right\}\frac{\sin\alpha}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos\alpha}d\alpha$$

pour tous les points (ρ', θ') intérieurs au cercle, et même pour les dits

points $(R\,, \theta')$ du contour pour lesquels le rapport $\dfrac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\alpha}$ sera intégrable même réduit à ses valeurs absolues.

Et les valeurs absolues de $\dfrac{\partial u}{\partial \theta'}$ ne surpasseront jamais la limite supérieure des valeurs absolues de $u'(\theta)$ sur le bord, et celles de $\dfrac{\partial u}{\partial \rho'}$ sur chaque rayon correspondant aux dits points θ' ne surpasseront jamais la valeur de l'intégrale $\dfrac{4}{\pi R}\displaystyle\int_0^{\pi}\left|\frac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\alpha}\right|d\alpha$, ou $4\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}l}\left|\frac{u'(s'+s)-u'(s'-s)}{s}\right|ds$.

Et pourtant si $u'(\theta)$ sera finie et continue pour toutes les valeurs de θ de o à 2π, la dérivée $\dfrac{\partial u}{\partial \theta'}$ sera finie et continue en tout le cercle, et même sur le bord où elle aura les valeurs $u'(\theta)$, et ses valeurs seront toujours comprises entre les valeurs minima et maxima de $u'(\theta)$; et si le rapport $\dfrac{u'(\theta+\alpha)-u'(\theta-\alpha)}{\alpha}$ sera intégrable pour $\alpha=0$ même en le réduisant à ses valeurs absolues *pour toutes les valeurs de θ' de* o à π, alors aussi la dérivée $\dfrac{\partial u}{\partial \rho'}$ existera pour tous les points du cercle et même sur le bord et ses valeurs seront toujours déterminées par la formule (41) et ne surpasseront jamais la limite supérieure des valeurs de l'intégrale

$$\frac{4}{\pi R}\int_0^{\pi}\left|\frac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\alpha}\right|d\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}l}\left|\frac{u'(s'+s)-u'(s'-s)}{s}\right|ds$$

pour toutes les valeurs de θ' de o à π, ou de s' de o à $\frac{1}{2}l=\pi R$.

En particulier donc, puisque le rapport $\dfrac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\alpha}$ peut s'écrire aussi $\dfrac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta')}{\alpha}+\dfrac{u'(\theta'-\alpha)-u'(\theta')}{-\alpha}$, on peut de même affirmer que le résultat que nous avons énoncé dernièrement subsistera toujours quand les valeurs données au contour $u(\theta)$ ont aussi les dérivées secondes déterminées et finies, ou du moins quand, les dérivées premières étant encore déterminées et finies, leurs rapports incrémentaux seront toujours intégrables même en les réduisant à leurs valeurs absolues; et dans ce cas

les valeurs absolues de $\frac{\partial u}{\partial \rho}$, ne surpasseront jamais la limite supérieure des valeurs de l'intégrale entre 0 et 2π de ces rapports incrémentaux réduits positifs multipliée par le nombre $\frac{4}{\pi R}$, ou celle du produit de $\frac{4}{\pi}$ par l'intégrale entre θ et l des rapports incrémentaux $\frac{u'(s' \pm s) - u'(s)}{\pm s}$ réduits positifs.

En rappelant donc les recherches précédents sur la méthode de M. Picard, on peut dire maintenant que le cas du cercle correspond évidemment, ainsi que nous avions déjà affirmé, à un cas de champ normal; et pourtant il ne reste pas aucun doute que pour le cercle, et ainsi pour tous les champs qui peuvent se représenter sur le cercle par le moyen d'une représentation conforme avec des formules qui ne portent pas des singularités, la méthode des approximations successives de M. Picard soit parfaitement rigoureuse quand le cercle ou le champ correspondant est suffisamment petit, et les valeurs données sur le bord ont aussi les dérivées secondes finies, ou du moins les rapports incrémentaux des dérivées premières sont intégrables même en les réduisant à leurs valeurs absolues; et cela, bien entendu, pour les points pour lesquels les coefficients a, b, c, h de l'équation donnée (1) satisfont aux conditions normales dont nous avons parlé en ce qui précède.

Enfin je remarquerai que les résultats obtenus pour l'équation linéaire (1) subsistent aussi pour les équations plus générales

$$\Delta u = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

sous certaines conditions, comme M. Picard aussi l'a relevé.

Il suffit pour cela de supposer que pour le champ C on ait les mêmes conditions que l'on avait précédemment, et que la fonction F soit toujours finie quand x et y se meuvent en C, et u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, et $\frac{\partial u}{\partial y}$ restent elles aussi entre des limites déterminées; et que si l'on indique $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ par v et w la différence

$$F(x, y, u, v, w) - F(x', y', u', v', w')$$

puisse se mettre sous la forme

$$A(u - u') + B(v - v') + C(w - w') + P,$$

P étant elle aussi de la forme $A_1(x - x') + B_1(y - y')$, ou plus généralement étant telle que le rapport $\frac{P}{r'}$ soit intégrable même en le réduisant à ses valeurs absolues dans le voisinage du point (x', y') et avec les valeurs u', v', w' de u, v, w; et A, B, C ne surpassant jamais certains nombres finis qui dépendent seulement du champ que l'on considère et de l'équation donnée.

Avec ces conditions, *mutatis mutandis*, les procédés de M. Picard avec les compléments que j'ai donnés ici, peuvent se répéter parfaitement, de sorte que l'on parvient aussi aux mêmes résultats que dans le cas de l'équation linéaire (1).

Pise (Italie), le 8 décembre 1899.

ÜBER DIE REDUCTION DER BINÄREN QUADRATISCHEN FORMEN MIT COMPLEXEN COEFFICIENTEN UND VARIABELN

VON

JULIUS HURWITZ
in BASEL.

In meiner Dissertation (Halle a. S. 1895) habe ich eine besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung complexer Grössen behandelt.[1] Diese Art der Kettenbruch-Entwicklung habe ich dann in meiner (nicht gedruckten) Habilitationsschrift für die Reduction der quadratischen Formen mit complexen Coefficienten und Variabeln in ähnlicher Weise verwendet, wie die Kettenbruch-Entwicklungen reeller Grössen für die Reduction der reellen quadratischen Formen positiver Determinante benutzt werden. Ich erlaube mir nun im Folgenden die Habilitationsschrift zu veröffentlichen und ihr zur Vervollständigung das Erforderliche aus meiner Dissertation vorauszuschicken.

[1] Diese Kettenbruch-Entwicklung schliesst sich eng an die in diesem Journal erschienenen zwei Abhandlungen des Herrn A. HURWITZ (Zürich) an:

1. *Über die Entwicklung complexer Grössen in Kettenbrüche.* Bd. 11.
2. *Über eine besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung reeller Grössen.* Bd. 12.

Acta mathematica. 25. Imprimé le 9 octobre 1901.

I. ABSCHNITT.

Besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung complexer Grössen.

§ 1. *Kettenbruch-Entwicklung erster Art.*

Durch die Geraden:

$$x + y = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$$

$$x - y = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$$

zerlege ich die Ebene der complexen Zahlen in unendlich viele Quadrate. Die Mittelpunkte dieser Quadrate sind die Repräsentanten der durch $(1+i)$ teilbaren complexen ganzen Zahlen, die Eckpunkte der Quadrate diejenigen aller nicht durch $(1+i)$ teilbaren complexen ganzen Zahlen.

Zur Abkürzung der Ausdrucksweise werde ich die complexe Zahl auch zur Bezeichnung des die Zahl repräsentirenden Punktes und umgekehrt verwenden und ferner jedes Quadrat nach seiner Mittelpunktszahl benennen. Das Quadrat a bezeichne ich auch durch Q_a.

Q_0 nenne ich das Anfangs-Quadrat und teile die übrigen Quadrate in acht Typen ein, wie folgt:

Typus $(1+i)$: alle zwischen $x - y = 1$ und $x - y = -1$ befindlichen Quadrate $k(1+i)$, $k = +1, +2, +3, \ldots$.

Typus $(-1-i)$: alle zwischen denselben Geraden befindlichen Quadrate $k(1+i)$, $k = -1, -2, -3, \ldots$.

Typus $(1-i)$: alle zwischen $x + y = 1$ und $x + y = -1$ befindlichen Quadrate $k(1-i)$, $k = +1, +2, +3, \ldots$.

Typus $(-1+i)$: alle zwischen denselben Geraden befindlichen Quadrate $k(1-i)$, $k = -1, -2, -3, \ldots$.

Betrachtet man das durch die bisher charakterisirten Quadrate gebildete Flächenstück als Achsenkreuz, so bleiben noch die Quadrate in den Quadranten übrig, nämlich:

Typus (2): alle Quadrate des Quadranten zwischen

$$x - y = + 1 \quad \text{und} \quad x + y = + 1.$$

Typus (— 2): alle Quadrate des Quadranten zwischen

$$x - y = - 1 \quad \text{und} \quad x + y = - 1.$$

Typus ($2i$): alle Quadrate des Quadranten zwischen

$$x - y = - 1 \quad \text{und} \quad x + y = + 1.$$

Typus (— $2i$): alle Quadrate des Quadranten zwischen

$$x - y = + 1 \quad \text{und} \quad x + y = - 1.$$

Über die Begrenzung der Quadrate setze ich folgendes fest:

Zum Anfangsquadrate sind alle vier Seiten zu rechnen.

Zu jedem Quadrate der vier ersten Typen sind drei Seiten zu rechnen, und zwar ist stets die Seite von der Begrenzung auszuschliessen, welche die zwei Eckzahlen vom kleinsten absoluten Betrag unter den vier Eckzahlen verbindet.[1]

Zu jedem Quadrate der vier letzten Typen sollen die zwei Seiten gerechnet werden, welche sich in derjenigen Eckzahl schneiden, die den grössten absoluten Betrag im Quadrate aufweist.

Wenn wir noch jede Eckzahl zu dem Quadrate rechnen, welchem die beiden Seiten angehören, deren Schnitt die Eckzahl ist, so haben wir durch diese Festsetzungen erreicht, dass jede Zahl der Ebene einem ganz bestimmten Quadrate angehört.

Ich ordne nun jeder nicht ganzzahlig complexen Zahl x_0 die Mittelpunktszahl a_0 des Quadrates zu, dem x_0 angehört; jede complexe ganze

---

[1] Die zu einem Quadrate gehörige Begrenzung ist in der Figur 1 dadurch kenntlich gemacht, dass die zugehörigen Seiten zusammenhängend und von den nicht zugehörigen getrennt gezeichnet sind.

Zahl aber sei sich selbst zugeordnet. Bildet man nun, von einer beliebigen complexen Zahl x_0 ausgehend, die Gleichungskette:

$$(1) \qquad x_0 = a_0 - \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = a_1 - \frac{1}{x_2}, \quad \ldots, \quad x_n = a_n - \frac{1}{x_{n+1}}, \quad \ldots,$$

wo allgemein a_n die complexe ganze Zahl bedeutet, welche x_n zugeordnet ist, so ergiebt sich aus dieser Gleichungskette die Kettenbruch-Entwicklung:

$$x_0 = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 \ldots}},$$

die abgekürzt auch durch:

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

bezeichnet werde.

Diese Kettenbruch-Entwicklung bezeichne ich als Entwicklung *erster Art* zum Unterschiede von einer mit ihr aufs engste zusammenhängenden zweiten Entwicklungsart, welche an späterer Stelle zur Besprechung gelangen wird.

§ 2. *Associirte und conjugirte Zahlen.*

Die unserm Entwicklungsverfahren zu Grunde gelegte Einteilung der complexen Zahlen-Ebene besitzt vier Symmetrie-Achsen, nämlich das Geraden-Paar $x = 0$, $y = 0$ und das Geraden-Paar $x = y$, $x = -y$. Hieraus folgt, dass wenn wir die ganze Ebene um den Punkt 0 drehen, die Einteilung in sich übergeht, falls die Drehung ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ beträgt. Eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ entspricht, je nach dem Sinne der Drehung, einer Multiplication aller Zahlen mit i oder $-i$; drehen wir daher die Ebene, etwa in dem der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne, um den Nullpunkt, nach einander um $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, so geht jede Zahl x_0 nach einander über in ihre drei associirten Zahlen ix_0, $-x_0$, $-ix_0$.

Um die Eigenschaften unsrer Entwicklungsart zu untersuchen, genügt es demnach, dieselben für die Zahlen zweier Typen festzustellen, denn aus diesen lassen sich sofort die Eigenschaften für die Zahlen der associirten Typen ableiten.

Ist z. B. $x_r = a_r - \frac{1}{x_{r+1}}$ eine Gleichung der Gleichungskette (1), so bestehen mit ihr zugleich die Gleichungen:

$$ix_r = \quad ia_r - \frac{1}{-ix_{r+1}},$$

$$-x_r = -a_r - \frac{1}{-x_{r+1}},$$

$$-ix_r = -ia_r - \frac{1}{ix_{r+1}}.$$

Hieraus folgt weiter, dass mit der Kettenbruch-Entwicklung einer Zahl x_0:

$$x_0 = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, x_{n+1})$$

auch die Entwicklungen der associirten Zahlen:

$$\begin{aligned} ix_0 &= \quad (ia_0, -ia_1, \quad ia_2, -ia_3, \ldots, (-1)^{n+1} ix_{n+1}), \\ -x_0 &= (-a_0, -a_1, -a_2, -a_3, \ldots, -x_{n+1}), \\ -ix_0 &= (-ia_0, \quad ia_1, -ia_2, \quad ia_3, \ldots, (-1)^n ix_{n+1}) \end{aligned}$$

bekannt sind.

Wir werden im Folgenden die Discussion stets an Zahlen der Typen $(1 + i)$ und (2) knüpfen.

Aus dem Umstande, dass die Achse der reellen Zahlen eine Symmetrielinie der Einteilung ist, folgt, dass falls x_r dem Quadrate a_r angehört, $\bar{x}_r$ dem Quadrate $\bar{a}_r$ angehört, wo $\bar{x}$ die zu x conjugirte Zahl bezeichnen soll.

Lautet daher die Entwicklung von x_0:

$$x_0 = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x_{n+1}),$$

so lautet die Entwicklung der conjugirten Zahl $\bar{x}_0$:

$$\bar{x}_0 = (\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n, \bar{x}_{n+1}).$$

§ 3. *Folgegesetze für die Teilnenner.*

Ist $x_r = a_r - \frac{1}{x_{r+1}}$ eine Gleichung der Gleichungskette (1), so gehört der Punkt x_r dem Quadrate a_r an, und wir finden, von x_r ausgehend, den

Punkt x_{r+1}, wie folgt. Wir bringen das Quadrat a_r mit dem Anfangsquadrat zur Deckung, indem wir Q_{a_r} ohne Drehung so verschieben, dass der Mittelpunkt a_r längs der Verbindungsgeraden $\overline{0, a_r}$ gleitet. Der Punkt x_r fällt dadurch im Quadrate 0 auf den Punkt $x_r - a_r = -\frac{1}{x_{r+1}}$. Durch Transformation des so erhaltenen Punktes nach reciproken Radien und darauf folgende Spiegelung an der Achse der imaginären Zahlen gelangen wir nun zum Punkte x_{r+1}.

Da $-\frac{1}{x_{r+1}}$ für alle Werte von r stets dem Quadrate 0 angehört, so ergiebt sich zunächst, dass die Grössen $x_1, x_2, \ldots$ sämmtlich in denjenigen sich ins Unendliche erstreckenden Teil der Ebene fallen, welcher von den über den Seiten von Q_0 als Durchmesser nach aussen beschriebenen Halbkreisen begrenzt wird, diese vier Halbkreise, ohne die Einheitspunkte, als Begrenzung mitgerechnet.

Wir wollen zur Abkürzung die erwähnten vier Halbkreise, ohne die Einheitspunkte, mit $B_{1+i}, B_{1-i}, B_{-1+i}, B_{-1-i}$ und die diese zu Vollkreisen ergänzenden Halbkreise mit $B^0_{1+i}, B^0_{1-i}, B^0_{-1+i}, B^0_{-1-i}$ bezeichnen.

Die Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ werde ich zur Abkürzung bisweilen auch als »Reste« der Kettenbruch Entwicklung von x_0 bezeichnen.

Der von $B_{1+i}, B_{1-i}, B_{-1+i}, B_{-1-i}$ begrenzte, sich ins Unendliche erstreckende Teil der Ebene werde der »Raum R« genannt.

Nach Obigem können wir jetzt sagen:

Die Reste der Kettenbruch-Entwicklung erster Art einer Grösse x_0 gehören sämmtlich dem Raume R an; die Reste sind daher sämmtlich absolut genommen > 1.

Auf die Begrenzungsbogen des Raumes R fällt eine Grösse x_{r+1} dann und nur dann, wenn die vorhergehende Grösse x_r auf der Seite eines Quadrates liegt. Ist nun x_r eine dem Raume R angehörende Grösse und gehört:

1) a_r dem Typus $(1+i)$ an, so kann $-\frac{1}{x_{r+1}}$ nicht auf Seite $\overline{-1, -i}$ des Anfangsquadrates und daher x_{r+1} nicht auf B_{1-i} fallen;

2) a_r dem Typus (2) an, so kann $-\frac{1}{x_{r+1}}$ nicht auf die Seiten $\overline{-1, i}$ und $\overline{-1, -i}$ des Anfangsquadrates und daher x_{r+1} nicht auf B_{1+i} und B_{1-i} fallen.

Hieraus erhalten wir, unter Berücksichtigung der im vorigen Paragraphen angestellten Betrachtungen, das

Folgegesetz A:

Ist a_r vom Typus:	$(1+i)$	$(-1+i)$	$(-1-i)$	$(1-i)$	(2)	$(2i)$	(-2)	$(-2i)$
so kann x_{r+1} nicht liegen auf:	B_{1-i}	B_{-1-i}	B_{-1+i}	B_{1+i}	B_{1+i} B_{1-i}	B_{1-i} B_{-1-i}	B_{-1-i} B_{-1+i}	B_{-1+i} B_{1+i}

Umgekehrt folgt aus dieser Tabelle, dass wenn:

x_{r+1} liegt auf:	B_{1+i}	B_{1-i}	B_{-1-i}	B_{-1+i}
a_r nicht den Typen:	$1-i$	$1+i$	$-1+i$	$-1-i$
	2	2	-2	-2
	$-2i$	$2i$	$2i$	$-2i$

angehören kann.

Eine weitere Beschränkung für die Teilnenner ergiebt sich aus dem Umstande, dass die Quadrate $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ nur zu je einem Teile dem Raume R angehören.

Gehört etwa x_r $(r \neq 0)$ dem Quadrate $1+i$ an, so fällt $-\frac{1}{x_{r+1}}$ nicht in den Teil des Anfangsquadrats, der von Seite $\overline{-1, -i}$ und Halbkreis B^0_{-1-i} begrenzt wird. Hieraus folgt, dass x_{r+1} keinem Quadrate der Typen (2), $(1-i)$, $(-2i)$ angehören, a_{r+1} also keine Zahl dieser Typen sein kann. Es ergiebt sich so das

Folgegesetz B: $(r \neq 0)$

Ist $a_r = 1+i$;	so a_{r+1}	nicht Typen:	(2), $(1-i)$, $(-2i)$
$a_r = -1+i$;	» a_{r+1}	» »	$(-2i)$, $(-1-i)$, (-2)
$a_r = -1-i$;	» a_{r+1}	» »	(-2), $(-1+i)$, $(2i)$
$a_r = 1-i$;	» a_{r+1}	» »	$(2i)$, $(1+i)$, (2)

Es erweist sich als zweckmässig, die Entwicklungen solcher Grössen, welche auf einem der Bogen B_{1+i}, B_{1-i}, B_{-1+i}, B_{-1-i}, oder auf einer der Geraden $x-y = \pm 1$, $x+y = \pm 1$ liegen, von den übrigen gesondert

zu betrachten. Wir wollen zur Abkürzung die Entwicklung einer auf einem der Bogen B liegenden Zahl als *B-Entwicklung*, die Entwicklung einer auf einer der bezeichneten vier Geraden liegenden Zahl als *G-Entwicklung* bezeichnen.

Die nachfolgende Tabelle giebt eine Übersicht der bei einer B- oder G-Entwicklung auftretenden Folgen:

	x_0 auf:	$a_0 =$	$a_1 =$	$a_2 =$	$a_3 =$	$a_4 =$	…	x_{n+1} auf:	
(a_1)	B_{1+i}	$1+i$	$k_1(1+i)$	$-1-i$	$k_1'(1+i)$	$1+i$	…	B_{1+i}	falls $n+1 \equiv 0 \pmod 4$
								B_{-1-i}	» $n+1 \equiv 2 \pmod 4$
								$x-y=1$	» $n+1 \equiv 1 \pmod 4$
								$x-y=-1$	» $n+1 \equiv 3 \pmod 4$
(a_2)	B_{-1-i}	$-1-i$	$k_2(1+i)$	$1+i$	$k_2'(1+i)$	$-1-i$	…	B_{-1-i}	falls $n+1 \equiv 0 \pmod 4$
								B_{1+i}	» $n+1 \equiv 2 \pmod 4$
								$x-y=-1$	» $n+1 \equiv 1 \pmod 4$
								$x-y=1$	» $n+1 \equiv 3 \pmod 4$
(a_3)	B_{1-i}	$1-i$	$k_3(1-i)$	$-1+i$	$k_3'(1-i)$	$1-i$	…	B_{1-i}	falls $n+1 \equiv 0 \pmod 4$
								B_{-1+i}	» $n+1 \equiv 2 \pmod 4$
								$x+y=-1$	» $n+1 \equiv 1 \pmod 4$
								$x+y=1$	» $n+1 \equiv 3 \pmod 4$
(a_4)	B_{-1+i}	$-1+i$	$k_4(1-i)$	$1-i$	$k_4'(1-i)$	$-1+i$	…	B_{-1+i}	falls $n+1 \equiv 0 \pmod 4$
								B_{1-i}	» $n+1 \equiv 2 \pmod 4$
								$x+y=1$	» $n+1 \equiv 1 \pmod 4$
								$x+y=-1$	» $n+1 \equiv 3 \pmod 4$
(a_5)	$x-y=1$	$k_5(1+i)$	$-1-i$	$k_5'(1+i)$	$1+i$	$k_5''(1+i)$	…	$x-y=1$	falls $n+1 \equiv 0 \pmod 4$
								$x-y=-1$	» $n+1 \equiv 2 \pmod 4$
								B_{-1-i}	» $n+1 \equiv 1 \pmod 4$
								B_{1+i}	» $n+1 \equiv 3 \pmod 4$
(a_6)	$x-y=-1$	$k_6(1+i)$	$1+i$	$k_6'(1+i)$	$-1-i$	$k_6''(1+i)$	…	$x-y=-1$	falls $n+1 \equiv 0 \pmod 4$
								$x-y=1$	» $n+1 \equiv 2 \pmod 4$
								B_{1+i}	» $n+1 \equiv 1 \pmod 4$
								B_{-1-i}	» $n+1 \equiv 3 \pmod 4$
(a_7)	$x+y=1$	$k_7(1-i)$	$-1+i$	$k_7'(1-i)$	$1-i$	$k_7''(1-i)$	…	$x+y=1$	falls $n+1 \equiv 0 \pmod 4$
								$x+y=-1$	» $n+1 \equiv 2 \pmod 4$
								B_{-1+i}	» $n+1 \equiv 1 \pmod 4$
								B_{1-i}	» $n+1 \equiv 3 \pmod 4$
(a_8)	$x+y=-1$	$k_8(1-i)$	$1-i$	$k_8'(1-i)$	$-1+i$	$k_8''(1-i)$	…	$x+y=-1$	falls $n+1 \equiv 0 \pmod 4$
								$x+y=1$	» $n+1 \equiv 2 \pmod 4$
								B_{1-i}	» $n+1 \equiv 1 \pmod 4$
								B_{-1+i}	» $n+1 \equiv 3 \pmod 4$

k_i, k_i', k_i'', bedeuten in dieser Übersicht Zahlen der Reihe ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ...; k_5, k_6, k_7, k_8 können auch null sein.

§ 4. *Entscheidung, ob ein vorgelegter Kettenbruch eine Entwicklung erster Art ist.*

Die Frage, ob ein vorgelegter Kettenbruch:

$$(2) \qquad (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n, x_{n+1}),$$

dessen Wert eingerichtet x_0 sei, die Entwicklung erster Art der Grösse x_0 ist, lässt sich mit Hülfe der folgenden Sätze beantworten.

I. *Stimmt die Aufeinanderfolge der Teilnenner des Kettenbruchs (2) mit einer der Folgen (α_i) überein, so stellt der Kettenbruch eine B- bezgl. G-Entwicklung dar, wenn x_{n+1} die bei der Folge (α_i) angegebene Bedingung erfüllt.*

Beweis: Wir zeigen, dass dieser Satz für $n+2$ Grössen $b_0, b_1, \ldots, b_n$, x_{n+1} gültig ist, wenn wir seine Gültigkeit für $n+1$ Grössen $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$, x_n voraussetzen. Da er für 2 Grössen (b_0, x_1) leicht als richtig erkannt wird, so folgt dann seine allgemeine Gültigkeit.

Wir ersetzen in der Gleichung:

$$(2) \qquad x_0 = (b_0, b_1, \ldots, b_n, x_{n+1}),$$

$$b_n - \frac{1}{x_{n+1}} \quad \text{durch} \quad x_n,$$

dadurch geht dieselbe über in:

$$(3) \qquad x_0 = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, x_n)$$

und in dieser Gleichung erfüllt nun x_n ebenfalls die Bedingung unsres Satzes. Denn nehmen wir etwa an, dass die rechte Seite der Gleichung (2) mit der Folge (α_1) übereinstimmt, so liegt x_{n+1} auf B_{1+i}, falls $n+1 \equiv 0 \pmod 4$ ist, und b_n ist eine Zahl vom Typus $(1+i)$ oder $(-1-i)$; daher fällt $-\frac{1}{x_{n+1}}$ auf Seite $\overline{-1, i}$ des Quadrates 0 und $b_n - \frac{1}{x_{n+1}} = x_n$, [wo $n \equiv 3 \pmod 4$], auf $x - y = -1$, wie erforderlich.

Ist $n+1 \equiv 1 \pmod 4$, also $n \equiv 0 \pmod 4$, so liegt x_{n+1} auf $x-y=1$ und b_n ist $= 1+i$, daher $b_n - \frac{1}{x_{n+1}}$ auf B_{1+i}, wie erforderlich.

Analog erledigen sich die übrigen Möglichkeiten.

Nehmen wir nun an, dass die Gleichung (3) eine B- bezgl. G-Entwicklung darstellt, so ergiebt sich, da b_n die x_n zugeordnete Zahl ist, aus (3), durch die Substitution $x_n = b_n - \frac{1}{x_{n+1}}$, dass auch die Gleichung (2) eine B- bezgl. G-Entwicklung darstellt.

II$_c$. *Es sei*

$$x_0 = (b_0\,,\, b_1\,,\, \ldots\,,\, b_n\,,\, y_{n+1}) \tag{4}$$

ein beliebiger Kettenbruch, von dem vorausgesetzt wird, dass:

$$b_0\,,\, b_1\,,\, \ldots\,,\, b_n \quad \text{sämmtlich} \quad \equiv 0 \pmod{1+i}$$

$$b_1\,,\, \ldots\,,\, b_n \quad \text{von null verschieden}$$

sind und die Aufeinanderfolge der Teilnenner $b_1, \ldots, b_n$ dem Folgegesetz (B) genügt.

Setzen wir:

$$y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}\,, \qquad y_{n-1} = b_{n-1} - \frac{1}{y_n}\,, \quad \ldots, \quad y_1 = b_1 - \frac{1}{y_2}\,, \qquad x_0 = b_0 - \frac{1}{y_1}\,,$$

so gehören $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_1$ dem Raume R an, wenn y_{n+1} und y_n dem Raume R angehören.

Beweis: Da y_n dem Raume R angehört, so gehört $-\frac{1}{y_n}$ dem Quadrate o an, und daher liegt $b_{n-1} - \frac{1}{y_n} = y_{n-1}$ sicher im Raume R, falls b_{n-1} nicht eine der Zahlen $1+i\,,\, 1-i\,,\, -1+i\,,\, -1-i$ ist.

Ist aber $b_{n-1} = 1+i$, auf welchen Fall wir uns der Symmetrie wegen beschränken können, so kann b_n nicht den Typen (2), $(1-i)$, $(-2i)$ angehören, $b_n - \frac{1}{y_{n+1}} = y_n$ muss daher einem Quadrate der übrigen Typen angehören. Hieraus folgt, dass $-\frac{1}{y_n}$ nicht ins Innere des Teils vom Quadrate o fallen kann, der durch Seite $\overline{-1\,,\,-i}$ und Halbkreis B^0_{-1-i}

begrenzt wird; $y_{n-1} = b_{n-1} - \frac{1}{y_n} = 1 + i - \frac{1}{y_n}$ fällt daher in den Teil des Quadrats $1 + i$, der dem Raume R angehört.

Da nun y_n und y_{n-1} dem Raume R angehören, so folgt in analoger Weise, dass auch y_{n-2} dem Raume R angehört. So fortfahrend, rückwärts zu schliessen, gelangen wir schliesslich bis zu y_1, d. h. zum vollständigen Nachweis unserer Behauptung.

II$_b$. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* II$_a$ *fallen* $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_1$ *weder auf einen der Bogen* $B_{1\pm i}$, $B_{-1\pm i}$, *noch auf eine der Geraden* $x \pm y = \pm 1$, *wenn* y_{n+1} *nicht auf einem dieser Bogen oder auf einer dieser Geraden liegt.*

Beweis: Da $-\frac{1}{y_{n+1}}$ weder auf die Seiten des Quadrats 0, noch auf die Halbkreise B^0_{1+i}, B^0_{1-i}, B^0_{-1+i}, B^0_{-1-i} fällt, so liegt $y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$ weder auf einem der Bogen B_{1+i}, B_{1-i}, B_{-1+i}, B_{-1-i}, noch auf einer der Geraden $x \pm y = \pm 1$. Hieraus folgt analog, dass für y_{n-1} das Gleiche gilt u. s. f. bis zu y_1.

III. *Es sei*

$$x_0 = (b_0, b_1, \ldots, b_n, y_{n+1}) \tag{4}$$

ein beliebiger Kettenbruch, dessen Teilnenner folgende Bedingungen erfüllen:

$$b_0, b_1, \ldots, b_n \quad \text{sind sämmtlich} \quad \equiv 0 \pmod{1 + i},$$

$$b_1, \ldots, b_n \quad \text{sind von null verschieden,}$$

$$\text{die Folge} \quad b_1, \ldots, b_n \quad \text{genügt dem Gesetze } (B).$$

Wenn dann y_{n+1} *weder auf einem der Bogen* $B_{1\pm i}$, $B_{-1\pm i}$, *noch auf einer der Geraden* $x \pm y = \pm 1$ *liegt und* $y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$ *und* y_{n+1} *dem Raume* R *angehören, so stellt die Gleichung* (4) *die Entwicklung erster Art der Grösse* x_0 *dar.*

Beweis: Es werde gesetzt:

$$y_{n-1} = b_{n-1} - \frac{1}{y_n}, \quad \ldots, \quad y_1 = b_1 - \frac{1}{y_2}, \qquad x_0 = b_0 - \frac{1}{y_1}.$$

Da nach Voraussetzung und II_b: $y_{n+1}, y_n, \ldots, y_2$ weder auf einen der im Satze bezeichneten Bogen noch auf eine der Geraden fallen, so liegen $-\frac{1}{y_{n+1}}, -\frac{1}{y_n}, \ldots, -\frac{1}{y_2}$ im Innern des Quadrats o; da ferner nach II_a, ebenso wie y_n, auch $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_1$ dem Raume R angehören, so sind $b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1$ die diesen Grössen nach dem Entwicklungsverfahren erster Art zugeordneten Zahlen. Nach Satz II_b folgt ferner, dass $-\frac{1}{y_1}$ ins Innere des Quadrats o fällt, und daher ist auch b_0 die x_0 zugeordnete Zahl.

Die Gleichungskette:

$$y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}, \qquad y_{n-1} = b_{n-1} - \frac{1}{y_n}, \ \ldots, \ y_1 = b_1 - \frac{1}{y_2}, \qquad x_0 = b_0 - \frac{1}{y_1}$$

ist demnach identisch mit der sich durch den Entwicklungsansatz erster Art für x_0 in umgekehrter Reihenfolge ergebenden Kette von Gleichungen.

IV. *Es sei wieder:*

$$x_0 = (b_0, b_1, \ldots, b_n, y_{n+1}) \tag{5}$$

ein Kettenbruch, dessen Teilnenner die Bedingungen erfüllen:

$$\begin{array}{rll} b_0, b_1, \ldots, b_n & \textit{sind sämmtlich} & \equiv 0 \pmod{1+i}, \\ b_1, \ldots, b_n & \textit{sind von null verschieden,} & \\ \textit{die Folge}\ \ b_1, \ldots, b_n & \textit{genügt dem Gesetze}\ (B). & \end{array}$$

Existirt ein Index r, der der Reihe $1, 2, \ldots, n$ angehört, so dass die Folge $(b_r, b_{r+1}, \ldots, y_{n+1}) = y_r$ eine B- oder G-Entwicklung darstellt, und ist r der kleinste Index dieser Art, so ersetzen wir in (5) die Folge $(b_r, b_{r+1}, \ldots, y_{n+1})$ durch ihren Wert y_r. Wir wollen dann für y_r wieder y_{n+1} geschrieben denken, so dass, wenn wir nach Gleichung (5):

$$x_0 = b_0 - \frac{1}{y_1}, \qquad y_1 = b_1 - \frac{1}{y_2}, \ \ldots, \ y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$$

setzen, y_{n+1} die erste der Grössen $x_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}$ ist, welche auf einem der Bogen $B_{1\pm i}, B_{-1\pm i}$ oder auf einer der Geraden $x \pm y = \pm 1$ liegt.[1]

[1] Ist der Index $r = 1$, so hat man $x_0 = (b_0, y_1)$; die folgenden Sätze IV_a und IV_b bleiben bestehen, doch braucht x_0 nicht dem Raume R anzugehören.

IV$_a$. *Liegt under obigen Voraussetzungen y_{n+1} auf einem der Bogen $B_{1\pm i}$, $B_{-1\pm i}$, so stellt die Gleichung* (5) *die Entwicklung erster Art der Grösse x_0 dar, wenn y_{n+1} und b_n das Folgegesetz* (A) *erfüllen.*

Beweis: Da $-\frac{1}{y_{n+1}}$ auf einer Seite des Quadrates o liegt, so gehört $y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$ dem Raume R an. Da also y_{n+1} und y_n dem Raume R angehören, so folgt nach Satz II, dass auch $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_1$ dem Raume R angehören.

Es möge y_{n+1} etwa auf B_{1+i}, also $-\frac{1}{y_{n+1}}$ auf Seite $\overline{-1, i}$ von Q_0 fallen; dann kann, wegen des Folgegesetzes (A), b_n nicht den Typen $(1-i)$, (2), $(-2i)$ angehören und daher ist b_n die $y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$ zugeordnete Zahl.

Nun kann y_n, nach unsern Voraussetzungen, nicht auf einem der Bogen B oder einer der Geraden $x \pm y = \pm 1$ liegen, daher ist nach Satz III:

$$x_0 = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, y_n)$$

die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von x_0, und diese geht durch die Substitution $y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$ in die Kettenbruch-Entwicklung erster Art: $(b_0, b_1, \ldots, b_n, y_{n+1})$ der Grösse x_0 über.

IV$_b$. *Liegt unter den gleichen Voraussetzungen y_{n+1} auf einer der Geraden $x \pm y = \pm 1$, so stellt die Gleichung* (5) *die Entwicklung erster Art der Grösse x_0 dar, wenn y_{n+1} und $y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$ dem Raume R angehören.*

Beweis: Da y_{n+1} dem Raume R angehört und auf einer der Geraden $x \pm y = \pm 1$ liegt, so liegt $-\frac{1}{y_{n+1}}$ im Innern des Quadrates o und da $y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$ dem Raume R angehört, ohne, nach Voraussetzung, auf einen der vier Bogen B zu fallen, so ist b_n die y_n zugeordnete Zahl.

Nach Satz II$_a$ gehört auch $y_{n-1} = b_{n-1} - \frac{1}{y_n}$ dem Raume R an;

$$x_0 = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, y_n)$$

ist daher nach Satz III die Entwicklung erster Art von x_0, und nun folgt durch die Substitution $y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$ die Behauptung unseres Satzes.

Die in diesem Paragraphen bewiesenen Sätze liefern die hinreichenden Kriterien zur Beurteilung, ob ein vorgelegter Kettenbruch die Entwicklung erster Art der durch ihn definirten Grösse ist. Es zeigt sich zugleich, dass die im § 3 aufgestellten Gesetze für die Entwicklung erster Art charakteristisch sind.

§ 5. *Complexe rationale Zahlen.*

Alle (mit einer complexen ganzen Zahl) abbrechenden Entwicklungen erster Art stellen offenbar complexe rationale Zahlen dar. Dieser Satz gilt auch umgekehrt:

Denn entwickeln wir $x_0 = \frac{m + ni}{r + si} = \frac{\mu}{\mu_1}$, so erhalten wir:

$$\frac{\mu_1}{x_1} = \mu_1 a_0 - \mu \quad \text{eine complexe ganze Zahl} \quad = \mu_2,$$

und da $|x_1| > 1$ ist: $|\mu_1| > |\mu_2|$;[1]

$$x_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} = a_1 - \frac{1}{x_2},$$

woraus folgt:

$$\frac{\mu_2}{x_2} = \mu_2 a_1 - \mu_1 \quad \text{eine complexe ganze Zahl} \quad = \mu_3$$

und:

$$|\mu_2| > |\mu_3|$$

u. s. f.

$$x_n = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} = a_n - \frac{1}{x_{n+1}},$$

$$\frac{\mu_{n+1}}{x_{n+1}} \quad \text{eine complexe ganze Zahl} \quad = \mu_{n+2}$$

und

$$|\mu_{n+1}| > |\mu_{n+2}|.$$

[1] $|x|$ bedeutet hier, wie im Folgenden stets:

»absoluter Betrag der Grösse x».

Da hiernach die Normen von $\mu_1, \mu_2, \ldots$ eine abnehmende Reihe positiver ganzer Zahlen bilden, so muss diese Reihe schliesslich abbrechen, d. h. eine der Zahlen μ, etwa $\mu_{n+2} = 0$ werden und folglich $\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} = x_n$ mit der dieser Zahl in der Entwicklung zugeordneten Zahl a_n zusammenfallen.

Wir nehmen nun an, μ und μ_1 seien teilerfremde complexe Zahlen, was offenbar keine Beschränkung involvirt, und betrachten die aus der Entwicklung folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\mu &= a_0\mu_1 - \mu_2, \\
\mu_1 &= a_1\mu_2 - \mu_3, \\
\mu_2 &= a_2\mu_3 - \mu_4, \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\mu_{n-2} &= a_{n-2}\mu_{n-1} - \mu_n, \\
\mu_{n-1} &= a_{n-1}\mu_n \quad - \mu_{n+1}, \\
\mu_n &= a_n \quad \mu_{n+1}.
\end{aligned}$$

Da μ und μ_1 teilerfremd sind, so folgt aus diesen Gleichungen, dass μ_{n+1} notwendig eine Einheit ist. Nehmen wir nun an, a_n sei eine Eckzahl, also $\equiv 1 \pmod{1+i}$, so ergiebt sich, dass μ_n eine Eckzahl ist, hiernach aus der vorletzten Gleichung, dass μ_{n+1} eine Eckzahl ist, und so weiter, rückwärts schliessend, dass alle Zahlen μ Eckzahlen, also $\equiv 1 \pmod{1+i}$ sein müssen.

Nehmen wir aber an, a_n sei $\equiv 0 \pmod{1+i}$, so ergiebt sich durch die gleiche Betrachtung, dass $\mu_{n-1} \equiv 1$, $\mu_{n-2} \equiv 0$, $\mu_{n-3} \equiv 1$, $\mu_{n-4} \equiv 0 \pmod{1+i}$ u. s. f.

Endigt demnach die Entwicklung einer complexen rationalen Zahl mit einer Eckzahl, so sind Zähler und Nenner der complexen Zahl, nach Forthebung gemeinsamer Factoren, $\equiv 1 \pmod{1+i}$; endigt die Entwicklung mit einer durch $1+i$ teilbaren Zahl, so ist, nach Forthebung gemeinsamer Factoren, entweder der Zähler $\equiv 0 \pmod{1+i}$ und der Nenner $\equiv 1 \pmod{1+i}$, oder umgekehrt.

Gehen wir bei der Betrachtung obiger Gleichungen von μ und μ_1 aus, so sehen wir, dass die soeben angegebenen Bedingungen für den

Charakter des letzten Teilnenners auch hinreichend sind. Wir haben also den Satz:

Die Kettenbruch-Entwicklung erster Art einer complexen rationalen Zahl endigt dann und nur dann mit einem nicht durch $1+i$ *teilbaren Teilnenner, wenn, nach Forthebung gemeinsamer Factoren, weder der Zähler noch der Nenner der Zahl durch* $1+i$ *teilbar sind.*

§ 6. *Convergenz der Kettenbruch-Entwicklung erster Art.*

Wir nehmen jetzt an, die complexe Grösse x_0 sei irrational. Die alsdann nicht abbrechende Kettenbruch-Entwicklung erster Art von x_0 laute:

$$x_0 = (a_0\,,\, a_1\,,\, \ldots\,,\, a_n\,,\, \ldots),$$

der n^{te} Näherungsbruch dieser Entwicklung werde mit $\frac{p_n}{q_n}$ bezeichnet und

$$x_0 - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\theta_n}{q_n^2}$$

gesetzt.

Der betrachtete Kettenbruch convergiert und sein Wert ist x_0, wenn $\frac{\theta_n}{q_n^2}$ mit unbegrenzt wachsendem n unendlich klein wird.

Um zu beweisen, dass dies der Fall ist, zeigen wir zunächst, dass q_n mit wachsendem n, dem absoluten Betrage nach, ins Unbegrenzte wächst, oder, woraus dies folgt, dass $\left|\frac{q_n}{q_{n-1}}\right|$ für jeden Wert von n grösser als 1 ist.

Setzen wir

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = k_n\,,$$

so ist der Gleichung:

$$q_n = a_n q_{n-1} - q_{n-2}$$

zufolge, (in welcher $q_0 = 1$, $q_{-1} = 0$ zu nehmen ist):

$$k_1 = a_1\,, \qquad k_2 = a_2 - \frac{1}{k_1}\,,\ \ldots\,,\ k_n = a_n - \frac{1}{k_{n-1}}\,,$$

und es ist zu beweisen, dass für jeden Wert von n: $|k_n| > 1$ ist.

Zu dem Ende beschreiben wir um die Mittelpunkte aller Quadrate unsrer Einteilung, mit dem Radius 1, Kreisbogen und zwar dergestalt, dass die einem Quadrate zugehörigen Seiten umschrieben werden, die Kreisbogen aber an den nicht zugehörigen Seiten endigen. Auf diese Weise erhalten wir eine neue Einteilung der Ebene, in welcher wir den Einheitskreis und acht Gruppen sich anschliessender Kreisgebiete unterscheiden.

Zu jedem Kreisgebiet rechnen wir als Begrenzung die gegen den Mittelpunkt convexen Kreisbogen, so dass hiernach zum Einheitskreise keine Begrenzung, zu den Kreisgebieten um die Quadrate der Typen $(1+i)$, $(1-i)$, $(-1+i)$, $(-1-i)$ je ein Bogen und zu allen übrigen Kreisgebieten je zwei Bogen gehören.

Wir behaupten nun, dass die Grösse k_n stets in das Innere des Kreisgebiets um a_n fällt.

Für k_1 trifft diese Behauptung zu. Wir nehmen an, der Nachweis sei bis k_{n-1} geführt und zeigen, dass dann auch k_n die Behauptung erfüllt.

Ist a_n eine Zahl vom Typus $(1+i)$, so kann a_{n-1} in keinem Falle $1-i$ sein, folglich liegt k_{n-1} nicht im Innern des Kreisgebiets um $1-i$, sondern im Innern anderer Kreisgebiete. Daher liegt $-\frac{1}{k_{n-1}}$ nicht im Innern oder auf den Begrenzungsbogen des Zweiecks $(-1, -i)$,[1] sondern im übrigen Innenraum des Einheitskreises, und demnach fällt $k_n = a_n - \frac{1}{k_{n-1}}$ ins Innere des Kreisgebiets um a_n.

Ist a_n eine Zahl vom Typus (2), so kann a_{n-1} weder $1+i$, noch $1-i$ sein, daher $-\frac{1}{k_{n-1}}$ nicht im Innern oder auf den Begrenzungsbogen der Zweiecke Z_{-1-i} und Z_{-1+i} liegen, und demnach fällt $k_n = a_n - \frac{1}{k_{n-1}}$ ins Innere des Kreisgebiets um a_n.

Analog ergiebt sich unsere Behauptung für Zahlen a_n, die andern Typen angehören.

Es ist somit bewiesen, dass $k_n = \frac{q_n}{q_{n-1}}$ stets dem Kreisgebiete um a_n

---

[1] Das Flächenstück, welches dem Einheitskreise und dem Vollkreise um $(-1-i)$ gemeinsam ist, bezeichne ich als Zweieck $(-1, -i)$ oder Z_{-1-i}; analoge Bedeutung haben die Abkürzungen Z_{1+i}, Z_{1-i}, Z_{-1+i}.

angehört, ohne auf dessen Begrenzung zu fallen, dass folglich $\left|\frac{q_n}{q_{n-1}}\right|$ stets > 1 ist, woraus, wie bemerkt, hervorgeht, dass $|q_n|$ mit n über alle Grenzen wächst.

Nun ist:

$$x_0 = \frac{p_n x_{n+1} - p_{n-1}}{q_n x_{n+1} - q_{n-1}}$$

folglich:

$$x_{n+1} = \frac{q_{n-1} x_0 - p_{n-1}}{q_n x_0 - p_n} = \frac{x_0 - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{x_0 - \frac{p_n}{q_n}} \cdot \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{\Theta_{n-1}}{\Theta_n} \cdot \frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{\Theta_{n-1}}{\Theta_n} \cdot k_n,$$

daher:

$$\frac{\Theta_{n-1}}{\Theta_n} = \frac{x_{n+1}}{k_n}.$$

Demnach haben wir:

$$\begin{aligned}
\frac{\Theta_0}{\Theta_1} &= -\frac{1}{x_1 \Theta_1} = \frac{x_2}{k_1}, \\
\frac{\Theta_1}{\Theta_2} &= \frac{x_3}{k_2}, \\
&\;\;\vdots \\
\frac{\Theta_{n-1}}{\Theta_n} &= \frac{x_{n+1}}{k_n},
\end{aligned}$$

folglich:

$$-\frac{1}{x_1 \Theta_n} = \frac{x_2 \cdot x_3 \ldots x_{n+1}}{k_1 k_2 \ldots k_n}$$

oder:

$$-\frac{1}{\Theta_n} = \frac{x_1 \cdot x_2 \ldots x_{n+1}}{k_1 k_2 \ldots k_n}$$

und da:

$$k_1 k_2 \ldots k_n = q_n$$

ist:

$$-\frac{1}{\Theta_n} = \frac{x_1 \cdot x_2 \ldots x_{n+1}}{q_n}.$$

Hieraus folgt:

$$\left|\frac{1}{\theta_n}\right| > \left|\frac{1}{q_n}\right|$$

oder:

$$|\theta_n| < |q_n|,$$

demnach:

$$\left|\frac{\theta_n}{q_n^2}\right| < \frac{1}{|q_n|}$$

und daher:

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{\theta_n}{q_n^2}\right| = 0, \text{ w. z. b. w.}$$

§ 7. *Hülfssatz über die Grössen* θ_n.

Es sei eine beliebige complexe irrationale Grösse x in einen Kettenbruch erster Art entwickelt und es werde allgemein gesetzt:

$$x - \frac{p_n}{q_n} - \frac{\theta_n}{q_n^2}.$$

Bilden wir die Grössen θ_n für alle Werte von n, so erhalten wir eine unendliche Reihe von complexen Grössen:

$$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \ldots,$$

und wenn wir diese als Punkte der complexen Zahlen-Ebene deuten, eine unendliche Menge von Punkten.

Von dieser Punktmenge beweisen wir den folgenden Satz:

Die Punktmenge $\theta_0, \theta_1, \ldots$ *besitzt stets mindestens eine im Endlichen liegende Häufungsstelle.*

Wir beweisen diesen Satz indirekt.

Würde die betrachtete Punktmenge keine im Endlichen liegende Häufungsstelle besitzen, so müsste der unendlich ferne Punkt die einzige Häufungsstelle der Menge sein. Es müsste daher:

$$\lim_{n=\infty} \theta_n = \infty \quad \text{und folglich} \quad \lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{\theta_n}\right) = 0 \quad \text{sein.}$$

Nun ist allgemein:

$$\frac{\theta_n}{q_n^2} = x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n x_{n+1} - p_{n-1}}{q_n x_{n+1} - q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}$$

$$= -\frac{1}{q_n^2\left(x_{n+1} - \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}$$

demnach:

$$\frac{1}{\theta_n} = -\left(x_{n+1} - \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) = -\left(x_{n+1} - \frac{1}{k_n}\right),$$

und es müsste also der absolute Betrag der Differenz $x_{n+1} - \frac{1}{k_n}$ mit wachsendem n unbegrenzt abnehmen.

Da nun, nach Früherem, die Grössen x_{i+1} stets dem Raume R angehören, die Grössen $\frac{1}{k_i}$ stets im Einheitskreise liegen, so ist dies nur möglich, wenn sich die Grössen x_{n+1} und $\frac{1}{k_n}$ in den Paaren

$$\left(x_{v+1}, \frac{1}{k_v}\right), \quad \left(x_{v+2}, \frac{1}{k_{v+1}}\right), \quad \ldots$$

den Einheitspunkten mehr und mehr annähern. Es muss daher möglich sein, nach Annahme beliebig kleiner um die Einheitspunkte abgegrenzter Umgebungen, den Index v so zu bestimmen, dass alle Reste $x_{v+1}, x_{v+2}, \ldots$ der Entwicklung erster Art der Grösse x in die Umgebungen hineinfallen.

Wir zeigen nun, dass diese Folgerung aus unserer Annahme einen Widerspruch involviert.

Zu diesem Nachweis beschreiben wir um die Einheitspunkte kleine Kreise und wählen deren Radius δ so, dass die vier Kreise sich gegenseitig ausschliessen, und dass durch Transformation aller Punkte im Innern eines der Kreise nach reciproken Radien vom Nullpunkte aus, als Pol, der sich ergebende neue Kreis nur mit dem betreffenden Kreise ein Gebiet gemeinsam hat, (nicht in die andern Umgebungen hineinreicht).

Nun betrachten wir einen in die Umgebung des Punktes 1 fallenden Rest x_μ. Dieser kann den Quadraten 2, $1 + i$, $1 - i$ angehören. (S. Fig. 2.)

I. Es gehöre x_n dem Quadrate 2 an, dann ist

$$x_n = 2 - \frac{1}{x_{n+1}}, \quad \text{daher} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}$$

x_{n+1} fällt wieder in die Umgebung des Punktes 1, denn $-\frac{1}{x_{n+1}} = x_n - 2$ fällt in den Teil der Umgebung des Punktes (-1), der im Quadrate 0 liegt, und dieser geht durch Transformation nach reciproken Radien und darauf folgende Spiegelung an der Y-Achse in ein Gebiet über, welches nur mit der Umgebung des Punktes 1 ein Stück gemein hat.

Bilden wir:

$$x_{n+1} - 1 = \frac{1}{2 - x_n} - 1 = \frac{x_n - 1}{2 - x_n},$$

so ergiebt sich:

$$\left| x_{n+1} - 1 \right| = \frac{\left| x_n - 1 \right|}{\left| 2 - x_n \right|}$$

und da $\left| 2 - x_n \right| < 1$ ist:

$$\left| x_{n+1} - 1 \right| > \left| x_n - 1 \right|$$

d. h. der Abstand des neuen Restes vom Punkte 1 hat sich vergrössert.

II. Es gehöre x_n dem Quadrate $1 + i$ an, dann ist:

$$x_n = 1 + i - \frac{1}{x_{n+1}} \quad \text{und daher:} \quad x_{n+1} = \frac{1}{1 + i - x_n}.$$

x_{n+1} fällt in die Umgebung des Punktes $(-i)$, denn $-\frac{1}{x_{n+1}}$ fällt in den Teil dieser Umgebung, der im Quadrat o liegt und von B^o_{-1-i} und Seite $\overline{-i, 1}$ ausgeschnitten wird. Dieser Teil geht durch Transformation nach reciproken Radien und Spiegelung an der Y-Achse in ein Gebiet über, welches nur mit der Umgebung des Punktes $(-i)$ ein Stück gemein hat.

Bilden wir:

$$x_{n+1} - (-i) = \frac{1}{1 + i - x_n} - (-i) = \frac{i(1 - x_n)}{1 + i - x_n}$$

so ergiebt sich:

$$\left| x_{n+1} - (-i) \right| = \frac{\left| x_n - 1 \right|}{\left| x_n - (1 + i) \right|}$$

und da $|x_n - (1 + i)| < 1$ ist, so folgt:

$$|x_{n+1} - (-i)| > |x_n - 1|$$

d. h. der Abstand des neuen Restes vom Punkte $(-i)$ ist grösser, als der des vorhergehenden vom Punkte 1.

III. Es gehöre x_n dem Quadrate $1 - i$ an, dann ist:

$$x_n = 1 - i - \frac{1}{x_{n+1}}, \quad \text{daher} \quad x_{n+1} = \frac{1}{1 - i - x_n}.$$

x_{n+1} fällt in die Umgebung des Punktes i, denn $-\frac{1}{x_{n+1}}$ fällt in den Teil dieser Umgebung, der im Quadrate o liegt und von B^o_{-1+i} und Seite $\overline{i, 1}$ ausgeschnitten wird. Dieser Teil geht durch Transformation nach reciproken Radien und Spiegelung an der Y-Achse in ein Gebiet über, welches nur mit der Umgebung des Punktes i ein Stück gemein hat.

Bilden wir:

$$x_{n+1} - i = \frac{1}{1 - i - x_n} - i = \frac{-i(1 - x_n)}{1 - i - x_n},$$

so ergiebt sich:

$$|x_{n+1} - i| = \frac{|x_n - 1|}{|x_n - (1 - i)|}$$

und da $|x_n - (1 - i)| < 1$ ist, so folgt:

$$|x_{n+1} - i| > |x_n - 1|$$

d. h. der Abstand des neuen Restes vom Punkte i ist grösser, als der des vorhergehenden vom Punkte 1.

Da die Betrachtung für die Fälle, dass x_n der Umgebung eines der Punkte -1, i, $-i$ angehört, ganz analog ist, wie die obige, oder auch, wegen der Symmetrie unsrer Einteilung, auf die obige Betrachtung zurückgeführt werden kann, so ergiebt sich als allgemeines Resultat:

Wenn der Index n so bestimmt ist, das die Reste $x_n, x_{n+1}, \ldots$ ad. infin. in die Umgebungen der Punkte $1, -1, i, -i$ fallen, so wächst mit dem Index der Reste die Entfernung der sie repräsentierenden Punkte von den bezüglichen Einheitspunkten, und folglich kann $x_{n+1} - \frac{1}{k_n}$ nicht mit wachsendem n, dem absoluten Betrage nach, unbegrenzt abnehmen.

Unsere Annahme, dass die Werte θ_n die einzige Häufungsstelle ∞ besitzen, ist daher nicht zulässig; diese Werte müssen folglich mindestens eine im Endlichen liegende Häufungsstelle haben.

Es sei nun χ eine im Endlichen liegende Häufungsstelle der Werte θ_n. Beschreiben wir dann vom Nullpunkte aus, mit einem Radius $\rho > |\chi|$, einen Kreis, so können wir eine unendliche Reihe von Indices: $n_1, n_2, n_3, \ldots$ bestimmen, so dass die diesen entsprechenden Grössen θ: $\theta_{n_1}, \theta_{n_2}, \theta_{n_3}, \ldots$ sämtlich ins Innere des Kreises mit dem Radius ρ fallen, dass also der absolute Betrag aller dieser Grössen kleiner ist, als die endliche positive Zahl ρ.

Da ferner aus:

$$x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{\theta_{n-1}}{q_{n-1}^2},$$

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\theta_n}{q_n^2}$$

durch Elimination von x folgt:

$$\frac{\theta_{n-1}}{q_{n-1}^2} = \frac{\theta_n}{q_n^2} + \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{\theta_n}{q_n^2} - \frac{1}{q_n q_{n-1}},$$

daher:

$$\theta_{n-1} = \theta_n \left(\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)^2 - \frac{q_{n-1}}{q_n}$$

und folglich, weil $\left|\frac{q_{n-1}}{q_n}\right|$ stets < 1,

$$|\theta_{n-1}| < |\theta_n| + 1$$

ist, so sind die Grössen:

$$|\theta_{n_1-1}|, |\theta_{n_1}|; |\theta_{n_2-1}|, |\theta_{n_2}|; |\theta_{n_3-1}|, |\theta_{n_3}|; \ldots$$

sämmtlich $< \rho + 1$.

§ 8. *Periodicität der Entwicklung erster Art für quadratische Irrationalitäten.*

Gestützt auf den im vorigen Paragraphen abgeleiteten Hülfssatz, beweisen wir nun den Satz:

Genügt die complexe Grösse x_0 einer quadratischen Gleichung

$$(6) \qquad ax^2 + 2bx + c = 0,$$

deren Discriminante $D = b^2 - ac$ kein volles Quadrat (also auch nicht null) ist, und wo a, b, c complexe ganze Zahlen bedeuten, so wird die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von x_0 periodisch.

Es sei:

$$x_0 = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x_{n+1})$$

die Entwicklung erster Art der Grösse x_0; dann ist eingerichtet:

$$(7) \qquad x_0 = \frac{p_n x_{n+1} - p_{n-1}}{q_n x_{n+1} - q_{n-1}}$$

und daher:

$$\frac{\theta_n}{q_n^2} = x_0 - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n x_{n+1} - p_{n-1}}{q_n x_{n+1} - q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{-1}{q_n^2\left(x_{n+1} - \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)},$$

$$\frac{\theta_{n-1}}{q_{n-1}^2} = x_0 - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n x_{n+1} - p_{n-1}}{q_n x_{n+1} - q_{n-1}} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$$

$$= \frac{-x_{n+1}}{q_{n-1}^2\left(\frac{q_n}{q_{n-1}} x_{n+1} - 1\right)} = \frac{-1}{q_{n-1}^2\left(\frac{q_n}{q_{n-1}} - \frac{1}{x_{n+1}}\right)},$$

folglich:

$$(8) \qquad x_{n+1} - \frac{q_{n-1}}{q_n} = -\frac{1}{\theta_n},$$

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{1}{\theta_{n-1}}.$$

Da x_0 der Gleichung (6) genügt, so genügt, zufolge der Gleichung (7): x_{n+1} der Gleichung:

$$a(p_n x - p_{n-1})^2 + 2b(p_n x - p_{n-1})(q_n x - q_{n-1}) + c(q_n x - q_{n-1})^2 = 0,$$

welche geordnet:

$$(9) \qquad Ax^2 + 2Bx + C = 0$$

lauten möge. In dieser Gleichung sind A, B, C wieder complexe ganze

Zahlen und die Discriminante $B^2 - AC$ ist gleich der Discriminante $b^2 - ac = D$ der Gleichung (6), da die Gleichung (9) aus (6) durch die lineare Substitution: $x = \frac{p_n x - p_{n-1}}{q_n x - q_{n-1}}$, deren Determinante $p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = 1$ ist, hervorgeht.

Bezeichnen wir die zweite Wurzel der Gleichung (9) mit y_{n+1}, so ist:

$$(10) \qquad y_o = \frac{p_n y_{n+1} - p_{n-1}}{q_n y_{n+1} - q_{n-1}}$$

die zweite Wurzel der Gleichung (6) und von x_o verschieden, da $b^2 - ac$, nach Voraussetzung, nicht verschwindet.

Aus (10) folgt nun:

$$y_{n+1} = \frac{q_{n-1} y_o - p_{n-1}}{q_n y_o - p_n} \quad \text{und} \quad \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{q_n y_o - p_n}{q_{n-1} y_o - p_{n-1}}$$

und daher:

$$y_{n+1} - \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{-1}{q_n^2\left(y_o - \frac{p_n}{q_n}\right)} = \frac{-1}{q_n^2\left(y_o - x_o + \frac{\theta_n}{q_n^2}\right)} = \frac{-1}{q_n^2} \frac{1}{(y_o - x_o) + \frac{\theta_n}{q_n^2}} = -\varepsilon_n,$$

$$\frac{1}{y_{n+1}} - \frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{1}{q_{n-1}^2\left(y_o - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)} = \frac{1}{q_{n-1}^2} \cdot \frac{1}{(y_o - x_o) + \frac{\theta_{n-1}}{q_{n-1}^2}} = \varepsilon'_{n-1}.$$

Da $y_o - x_o$ von null verschieden ist, so ergiebt sich hieraus, dass in den Gleichungen:

$$y_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} - \varepsilon_n,$$

$$\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} + \varepsilon'_{n-1}$$

die Grössen ε_n und ε'_{n-1} mit wachsendem n, dem absoluten Betrage nach, beliebig klein werden.

Bilden wir nun:

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \left(x_{n+1} - \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) + \varepsilon_n = -\frac{1}{\theta_n} + \varepsilon_n = -\left(\frac{1}{\theta_n} - \varepsilon_n\right),$$

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{y_{n+1}} = \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{q_n}{q_{n-1}}\right) - \varepsilon'_{n-1} = \frac{1}{\theta_{n-1}} - \varepsilon'_{n-1}$$

(vergl. Gleichungen (8)),

so folgt

$$\left| x_{n+1} - y_{n+1} \right| \geqq \left| \frac{1}{\theta_n} \right| - \left| \varepsilon_n \right|,$$

$$\left| \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{y_{n+1}} \right| \geqq \left| \frac{1}{\theta_{n-1}} \right| - \left| \varepsilon'_{n-1} \right|,$$

und da $\left| \frac{1}{\theta_n} \right|$ und $\left| \frac{1}{\theta_{n-1}} \right|$ nach unserm Hülfssatz für unendlich viele Werte von n grösser als $\frac{1}{\rho + 1} = \rho'$ sind, so ergiebt sich, dass für unendlich viele Indices die absoluten Beträge der Differenzen:

$$x_{n+1} - y_{n+1}$$

und

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{y_{n+1}}$$

grösser als ρ'' werden, wo ρ'' eine um beliebig wenig kleiner als ρ' angenommene Grösse bedeutet.

Aus Gleichung (9) aber folgt:

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \pm \frac{\sqrt{D}}{A}, \qquad \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{y_{n+1}} = \pm \frac{\sqrt{D}}{C},$$

daher ist für unendlich viele Indices n:

$$\frac{|\sqrt{D}|}{|A|} > \rho'' \quad \text{und} \quad \frac{|\sqrt{D}|}{|C|} > \rho''$$

folglich:

$$|A| < \frac{|\sqrt{D}|}{\rho''}, \qquad |C| < \frac{|\sqrt{D}|}{\rho''}.$$

Es müssen folglich die absoluten Beträge von A, C und $B = \sqrt{D + AC}$ für unendlich viele Indices n kleiner als eine bestimmte endliche Grösse ausfallen, was nur möglich ist, wenn A, B, C und daher auch

$$x_{n+1} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

für einen gewissen Index einmal die einem früheren Index entsprechenden

Werte wieder annehmen. Es muss hiernach also einmal ein Rest der Entwicklung der Grösse x_0 mit einem früheren Reste identisch, d. h. es muss die Entwicklung von x_0 periodisch werden, w. z. b. w.

§ 9. *Kettenbruch-Entwicklung zweiter Art.*

Bei dem Convergenzbeweise im § 6 sind wir auf eine zweite Einteilung der Ebene der complexen Zahlen geführt worden. Die Vermutung liegt nahe, dass wenn wir diese Einteilung zur Entwicklung einer complexen Grösse in einen Kettenbruch benutzen, die neue Entwicklung zu der auf die quadratische Einteilung gegründeten in einer besondern Beziehung stehen wird.

Wir wollen die neue Entwicklungsweise als »Entwicklung zweiter Art» bezeichnen.

Über die der zweiten Entwicklungsart zu Grunde liegende Einteilung ist schon im § 6 das Wesentlichste gesagt worden.

Wir ordnen jeder nicht ganzzahligen complexen Zahl x_0 die durch $1 + i$ teilbare complexe ganze Zahl zu, welche im Mittelpunkte[1] des Kreisgebiets liegt, dem x_0 angehört. Jede complexe ganze Zahl aber sei sich selbst zugeordnet.

Zur Abkürzung bezeichne ich jedes Kreisgebiet durch seine Mittelpunktszahl, die zu einem Kreisgebiete a_n gehörigen Randbogen (ohne die auf ihnen befindlichen Eckzahlen) mit R_{a_n}, die nicht zugehörigen mit P_{a_n}. Wenn wir die Peripherien der Kreisgebiete $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ vervollständigen, so mögen die im Einheitskreise liegenden Bogen (ohne die Einheitspunkte) mit P'_{1+i}, P'_{1-i}, P'_{-1+i}, P'_{-1-i}, die entstehenden Zweiecke mit Z_{1+i} etc. bezeichnet werden.

Jede Eckzahl wollen wir als zu dem Kreisgebiete gehörig betrachten, zu dem die zwei Kreisbogen gerechnet werden, in deren Berührungsstelle die Eckzahl liegt.

Den unendlichen Teil der Ebene ausserhalb des Kreisgebiets o und mit Ausschluss der Peripherie des Einheitskreises bezeichnen wir als den Raum R'.

[1] Unter Mittelpunkt ist hier der Mittelpunkt des Vollkreises um das betreffende Quadrat zu verstehen.

Gehen wir nun von einer beliebigen complexen Grösse x_o aus und bilden die Gleichungskette

$$x_o = a_o - \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = a_1 - \frac{1}{x_2}, \quad . \; . \; . \; , \quad x_n = a_n - \frac{1}{x_{n+1}} \; . \; . \; . \; . \; .$$

wo allgemein a_n die x_n zugeordnete complexe ganze Zahl bedeutet, so ergiebt sich aus dieser die Kettenbruch-Entwicklung zweiter Art der Grösse x_o:

$$x_o = (a_o, a_1, \ldots, a_n, \ldots).$$

Da nur x_o selbst auf dem Einheitskreise liegen kann, so fallen alle Reste $x_1, x_2, \ldots$ der Entwicklung in dem Raum R'; diese Reste sind demnach absolut genommen sämmtlich > 1.

Fällt ein Rest x_r auf einen Gebietsrand, so fallen alle folgenden Reste auf Gebietsränder, und zwar nur auf P_{1+i}, P_{1-i}, P_{-1+i}, P_{-1-i}.

Die Aufeinanderfolge der Teilnenner und Reste unterliegt wieder gewissen Beschränkungen.

Ist x_r $(r \neq 0)$ ein dem Typus $(1 + i)$ angehörender Rest, so kann $-\frac{1}{x_r}$ nicht ins Innere des Zweiecks Z_{-1-i} fallen, und folglich x_{r+1} nicht dem Kreisgebiete $1 - i$ angehören, a_{r+1} also nicht $= 1 - i$ sein.

Ist x_r ein Rest, der dem Typus (2) angehört, so kann $-\frac{1}{x_r}$ nicht ins Innere der Zweiecke Z_{-1+i} und Z_{-1-i} fallen, und daher x_{r+1} nicht den Kreisgebieten $1 + i$ und $1 - i$ angehören, also a_{r+1} weder $1 + i$, noch $1 - i$ sein.

Mit Berücksichtigung der Symmetrie unsrer Einteilung erhalten wir hiernach das Folgegesetz:

	Ist a_r vom Typus:	$(1 + i)$,	$(-1 + i)$,	$(-1 - i)$,	$(1 - i)$,
	so ist $a_{r+1} \neq$	$1 - i$	$-1 - i$	$-1 + i$	$1 + i$
(B')	Ist a_r vom Typus:	(2)	$(-2i)$	(-2)	$(2i)$
	so ist $a_{r+1} \neq$	$\begin{cases} 1 + i \\ 1 - i \end{cases}$	$\begin{matrix} -1 + i \\ 1 + i \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 - i \\ -1 + i \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 - i \\ -1 - i \end{matrix}$

Liegt ferner x_r auf dem Rande eines Kreisgebiets vom Typus $(1 + i)$,

so fällt $-\frac{1}{x_{r+1}}$ auf P'_{-1-i}, daher x_{r+1} auf P_{1-i}, und folglich ist a_{r+1} eine der Zahlen 2, $2-2i$, $-2i$.

Liegt x_r auf dem Rande eines Kreisgebiets vom Typus (2), so fällt $-\frac{1}{x_{r+1}}$ auf P'_{-1+i} oder P'_{-1-i}, daher x_{r+1} auf P_{1+i} oder P_{1-i}, und folglich ist a_{r+1} eine der Zahlen $2i$, $2+2i$, 2, $2-2i$, $-2i$.

Hieraus ergiebt sich das folgende Gesetz:

Liegt x_r auf dem Rand eines Kreisgebiets

	vom Typus:	$(1+i)$	$(-1+i)$	$(-1-i)$	$(1-i)$
	so liegt x_{r+1} auf:	P_{1-i}	P_{-1-i}	P_{-1+i}	P_{1+i}
(A')	vom Typus:	(2)	$(2i)$	(-2)	$(-2i)$
	so liegt x_{r+1} auf:	P_{1+i}	P_{1-i}	P_{-1-i}	P_{-1+i}
		P_{1-i}	P_{-1-i}	P_{-1+i}	P_{1+i}

oder umgekehrt:

Liegt x_r (und folglich auch x_{r+1}) auf einem Rande

und liegt x_{r+1} auf:	P_{1+i}	P_{1-i}	P_{-1-i}	P_{-1+i}
so liegt x_r auf dem Rande eines Gebiets der Typen	2	$2i$	-2	$-2i$
	$-2i$	2	$2i$	-2
	$1-i$	$1+i$	$-1+i$	$-1-i$

Die Sätze der §§ 2 und 5 gelten genau ebenso für Entwicklungen zweiter Art, wie für solche erster Art.

Liegt die zu entwickelnde Zahl auf der Achse der reellen Zahlen, auf der Achse der rein imaginären Zahlen, auf dem Rande eines Quadrates oder eines Kreisgebiets, oder endlich auf einem der Bogen B_{1+i}, B_{1-i}, B_{-1+i}, B_{-1-i}, so sind die Kettenbruch-Entwicklungen erster und zweiter Art identisch. (Hiernach ergeben z. B. B- und G-Entwicklungen erster Art die gleichen Kettenbrüche zweiter Art.)

§ 10. *Convergenz der Entwicklungen zweiter Art.*

Um die Convergenz einer nicht abbrechenden Kettenbruch-Entwicklung zweiter Art:

$$x = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$$

zu beweisen, setzen wir wieder:

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\Theta}{q_n^2}$$

und

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = k_n.$$

Ebenso, wie im § 6 haben wir dann:

$$k_1 = a_1, \qquad k_2 = a_2 - \frac{1}{k_1}, \qquad \ldots, \qquad k_n = a_n - \frac{1}{k_{n-1}}$$

und beweisen zunächst, dass auch hier $|k_n| > 1$ ist, für jeden Wert von n.

Zu diesem Nachweis benutzen wir die dem ersten Entwicklungsverfahren zu Grunde liegende Einteilung der Ebene.

Wir zeigen, dass k_n stets dem Raume R angehört, und zwar entweder ins Innere oder auf eine der vier Seiten des Quadrats a_n fällt.

Wir nehmen an, der Nachweis sei schon bis k_{n-1} geführt, und zeigen, dass unter dieser Annahme auch k_n die Behauptung erfüllt. Da $k_1 = a_1$ dem Raume R und dem Quadrate a_1 angehört, so ergiebt sich dann die allgemeine Gültigkeit der Behauptung.

Aus unsrer Annahme folgt, dass $-\frac{1}{k_{n-1}}$ entweder im Innern oder auf einer der vier Seiten des Quadrats o liegt, folglich $k_n = a_n - \frac{1}{k_{n-1}}$ sicher dem Raume R angehört und im Innern oder auf einer der vier Seiten des Quadrats a_n liegt, falls a_n nicht einen der Werte $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$, $-1 - i$ besitzt. Ist aber $a_n = 1 + i$, so kann a_{n-1} nicht den Typen $(1 - i)$, (2), $(-2i)$ angehören (nach Gesetz (B')), daher liegt k_{n-1} in Quadraten der übrigen Typen, bezüglich auf einer Seite dieser Quadrate, $-\frac{1}{k_{n-1}}$

folglich nicht im Innern des Teils vom Quadrate o, der von Seite $\overline{-1, -i}$ und Bogen B^o_{-1-i} begrenzt wird. Es folgt hieraus, dass $a_n - \frac{1}{k_{n-1}}$ dem Raume R angehört und zwar im Quadrate $1 + i$ oder auf dem Rande desselben liegt.

Analog ergiebt sich die Behauptung für $a_n = 1 - i, -1 + i, -1 - i$.

Corollar: Falls a_1 nicht einen der Werte $1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i$ hat, fällt k_n stets ins Innere des Quadrats a_n und gehört dem Raume R an, ohne auf dessen Begrenzung zu fallen.

Der Beweis wird, wie oben, durch vollständige Induction geführt.

Wir nehmen an, unsre Behauptung sei bis k_{n-1} nachgewiesen. — Dann liegt $-\frac{1}{k_{n-1}}$ im Innern des Quadrats o, folglich $k_n = a_n - \frac{1}{k_{n-1}}$ im Innern des Quadrats a_n und im Raume R, falls a_n nicht $= 1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i$ ist. — Ist aber $a_n = 1 + i$, so kann a_{n-1} nicht den Typen $(1 - i)$, (2), $(-2i)$ angehören, k_{n-1} liegt also im Innern von Quadraten anderer Typen, $-\frac{1}{k_{n-1}}$ folglich nicht in dem von Seite $\overline{-1, -i}$ und Bogen B^o_{-1-i} begrenzten Teile des Quadrats o und auch nicht auf B^o_{-1-i}. Demnach fällt $k_n = 1 + i - \frac{1}{k_{n-1}}$ ins Innere des dem Raum R zugehörigen Teils des Quadrats $1 + i$ und nicht auf B_{1+i}.

Analog folgt der Satz für $a_n = 1 - i, -1 + i, -1 - i$.

Aus unserm Hauptsatze folgt, dass der absolute Betrag von k_n für jedes n grösser als 1, dass daher für jedes n

$$|q_n| > |q_{n-1}|$$

ist und folglich $|q_n|$ mit wachsendem n über alle Grenzen wächst.

In gleicher Weise, wie im § 6 für die Entwicklungen erster Art abgeleitet, ergiebt sich nun auch für die Entwicklung zweiter Art:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\Theta_n}{q_n^2} \right| = 0,$$

d. h. die Entwicklung zweiter Art: $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ convergirt und stellt die Grösse x_0 dar.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen ergeben sich die folgenden Beziehungen zwischen den beiden Entwicklungsarten:

I. *Entwickelt man eine complexe Grösse* x_0 *in einen Kettenbruch erster Art:*

$$x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots),$$

so ist:

$$(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$$

die Kettenbruch-Entwicklung zweiter Art der Grösse $k_n = \frac{q_n}{q_{n-1}}$.

II. *Entwickelt man eine complexe Grösse* x_0 *in einen Kettenbruch zweiter Art:*

$$x_0 = (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$$

und ist b_1 *nicht eine der Zahlen* $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$, $-1 - i$, *so ist:*

$$(b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1)$$

die Kettenbruch-Entwicklung erster Art der Grösse $k_n = \frac{q_n}{q_{n-1}}$.

Der Ausnahmefall in II tritt ein, wenn $-\frac{1}{x_1}$ im Innern eines der vier Zweiecke Z liegt, und also x_0 ins Innere eines der durch Vervollständigung aller Kreise der Einteilung an den Quadratseiten entstehenden Zweiecke fällt. Liegt x_0 im Innern oder auf der Begrenzung eines der, durch die Vervollständigung aller Kreise, in jedem Quadrate entstehenden Kreisbogen-Vierecke, so gilt der Satz II ohne die Einschränkung.[1]

[1] Beispiele:

I. $\sqrt{3 + 2i} = (2, 2i, -1 - i, 3 + i, \ldots)$ $= 1.$ Art.

$\left(\frac{q_n}{q_{n-1}}\right)_{n=3} = \frac{5 - 7i}{1 - 2i} = (3 + i, -1 - i, 2i)$ $= 2.$ Art.

$(1 + \sqrt{2}) + i\sqrt{2} = (2 + 2i, -1 - i, -3 - 3i, \ldots) = 1.$ Art.

$\left(\frac{q_n}{q_{n-1}}\right)_{n=2} = \frac{1 - 6i}{1 + i} = (-3 - 3i, -1 - i)$ $= 2.$ Art.

II. $\sqrt{3 + 2i} = (1 + i, -1 - i, 2i, 3 + i, \ldots)$ $= 2.$ Art.

$\left(\frac{q_n}{q_{n-1}}\right)_{n=3} = \frac{6 - 4i}{1 - 2i} = (3 + i, 1 + i, 1 + i)$ $= 1.$ Art.

$\sqrt{2} + \frac{9}{10}i = (1 + i, -2, 1 - i, 5 - 7i, \ldots)$ $= 2.$ Art.

$\left(\frac{q_n}{q_{n-1}}\right)_{n=3} = (5 - 7i, 1 - i, -2)$ $= 1.$ Art.

II. ABSCHNITT.

Reduction der binären quadratischen Formen.

Die Frage nach den eigentlichen Darstellungen einer complexen ganzen Zahl m durch eine quadratische Form $f = (a, b, c)$ mit nicht quadratischer Determinante, oder genauer ausgedrückt, nach den zu einander relativ primen complexen ganzzahligen Lösungen x, y der Gleichung:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = m,$$

in welcher a, b, c, m gegebene complexe ganze Zahlen bedeuten und $D = b^2 - ac$ kein volles Quadrat ist, führt analog, wie im reellen Gebiete, auf die folgenden zwei Probleme:

I. Zu untersuchen, ob eine gegebene Form $f = (a, b, c)$ mittels einer Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, deren Determinante $\beta\gamma - \alpha\delta = 1$ ist, in eine andere gegebene Form F von gleicher Determinante, wie f, übergeführt werden kann, oder kürzer ausgedrückt:

Zu untersuchen, ob zwei gegebene Formen von gleicher Determinante äquivalent sind.

II. Alle Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ zu bestimmen, welche eine Form f in eine andere ihr äquivalente F überführen.

Diese zwei Probleme sollen in diesem Abschnitte mit Hülfe der im I. Abschnitt behandelten Kettenbruch-Entwicklungen gelöst werden.[1]

§ 1. *Äquivalenz der Formen.*

Unter einer Substitution:

$$x = \alpha x' - \beta y',$$
$$y = \gamma x' - \delta y'$$

[1] Auf anderem Wege hat Lejeune-Dirichlet diese Probleme in seiner Abhandlung gelöst: *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes*, ges. Werke, Bd. I.

oder abgekürzt bezeichnet:

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

verstehe ich im Folgenden stets eine solche Substitution, deren Determinante $\beta\gamma - \alpha\delta = 1$ ist und deren Coefficienten α, β, γ, δ complexe ganze Zahlen sind.

Zwei Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ heissen congruent nach dem Modul $1 + i$, wenn die Congruenzen bestehen:

$$\alpha \equiv \alpha', \qquad \beta \equiv \beta', \qquad \gamma \equiv \gamma', \qquad \delta \equiv \delta' \; [\text{mod } 1 + i].$$

Da jede complexe ganze Zahl entweder $\equiv 0$, oder $\equiv \pm 1$ (mod $1 + i$) ist, so können wir alle überhaupt möglichen Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ in folgende 6 Classen nach dem Modul $1 + i$ rubriciren:

I Classe: Alle Substitutionen, die $\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sind.

II » » » » $\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ »

III » » » » $\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ »

IV » » » » $\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ »

V » » » » $\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ »

VI » » » » $\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ »

Die inverse Substitution S^{-1} einer Substitution S gehört derselben Classe an, wie S, wenn S der I, II, IV, V[ten] Classe zugehört, die inverse Substitution einer Substitution der III[ten] Classe dagegen gehört der VI[ten] Classe an, und umgekehrt.

Sind

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

zwei beliebige Substitutionen, so bezeichnen wir die aus S und T componirte Substitution:

$$U = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' - \beta\gamma' \,, \alpha\beta' - \beta\delta' \\ \gamma\alpha' - \delta\gamma' \,, \gamma\beta' - \delta\delta' \end{pmatrix}$$

durch das symbolische Product $S \,.\, T$.

Es ist ST stets $\equiv S$ (mod $1 + i$), wenn T der I^ten^ Classe angehört. Gehört T der II^ten^ Classe an, so ist

$$S_{\mathrm{I}} T = S_{\mathrm{II}}, \qquad S_{\mathrm{II}} T = S_{\mathrm{I}}, \qquad S_{\mathrm{III}} T = S_{\mathrm{IV}},$$
$$S_{\mathrm{IV}} T = S_{\mathrm{III}}, \qquad S_{\mathrm{V}} T = S_{\mathrm{VI}}, \qquad S_{\mathrm{VI}} T = S_{\mathrm{V}},$$

wo die dem Buchstaben S angehängten Indices die Classe bezeichnen sollen, der die betreffende Substitution angehört.

Bezeichnen wir die Substitutionen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } S_3, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ mit } S_5,$$

so können wir jede Substitution der vier letzten Classen als eine aus S_3 bezgl. S_5 mit einer Substitution der ersten oder zweiten Classe componirte Substitution ansehen, nämlich:

$$S_{\mathrm{III}} = S_3 S_{\mathrm{I}}, \qquad S_{\mathrm{IV}} = S_3 S_{\mathrm{II}}, \qquad S_{\mathrm{V}} = S_5 S_{\mathrm{I}}, \qquad S_{\mathrm{VI}} = S_5 S_{\mathrm{II}}.$$

Nach diesen Vorbemerkungen, wollen wir nun zwei quadratische Formen $f = (a\,,\, b\,,\, c)$ und $f' = (a'\,,\, b'\,,\, c')$ betrachten.

Sind diese zwei Formen äquivalent, so existirt eine Substitution S, welche f in f' überführt. Dies drücken wir symbolisch durch die Gleichung aus: $f \,.\, S = f'$.

Je nachdem S der I, II, III, IV, V, VI^ten^ Classe angehört, ist dann eine der folgenden symbolischen Gleichungen erfüllt:

$$fS_{\rm I} = f', \qquad fS_{\rm II} = f',$$

$$fS_3S_{\rm I} = f', \qquad fS_3S_{\rm II} = f',$$

$$fS_5S_{\rm I} = f', \qquad fS_5S_{\rm II} = f'$$

und ebenso ist klar, dass wenn umgekehrt eine dieser symbolischen Gleichungen erfüllt wird, die Formen f und f' äquivalent sind.

Es sollen nun im Folgenden zwei Formen f und f' als *vollständig äquivalent* bezeichnet werden, wenn die eine mittels einer Substitution der ersten oder zweiten Classe ($S_{\rm I}$ oder $S_{\rm II}$) in die andere übergeht.[1]

Mit Verwendung dieser Definition folgt dann aus dem Vorhergehenden unmittelbar der Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Äquivalenz zweier Formen f und f' im gewöhnlichen Sinne ist, dass eine der drei Formen:

$$f;\ fS_3 = f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad fS_5 = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

der Form f' vollständig äquivalent ist.

Unter $f = (a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ eine beliebige quadratische Form verstanden, deren Determinante $D = b^2 - ac$ kein volles Quadrat ist, bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung:

$$ax^2 + 2bx + c = 0,$$

nämlich:

$$x_0 = \frac{-b - \sqrt{D}}{a} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{-b + \sqrt{D}}{a}$$

als erste, bezügl. zweite Wurzel der Form f.

Unter $\sqrt{D}$ ist hier derjenige Wurzelwert zu verstehen, der, $D = \alpha + i\beta$ gesetzt, aus:

[1] Diese Bezeichnung ist von L. Kronecker in einem ähnlichen Sinne eingeführt worden.

Die Substitutionen erster und zweiter Classe werden hier bevorzugt, weil die im I. Abschnitt betrachteten Kettenbrüche in ihren aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen nur Substitutionen dieser Classen liefern.

$$\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}, \quad \text{falls} \quad \beta > 0,$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}, \quad \text{falls} \quad \beta < 0,$$

$$\sqrt{\alpha}, \quad \text{falls} \quad \beta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha > 0,$$

$$i\sqrt{-\alpha}, \quad \text{falls} \quad \beta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha < 0$$

resultirt, wenn überall die positiven Wurzelwerte genommen werden.

Analog wie bei reellen Formen mit positiver Determinante, gilt hier der Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die vollständige Äquivalenz zweier Formen f und f' ist, dass ihre ersten Wurzeln x_0 und x'_0 durch eine Gleichung verbunden sind:

$$x_0 = \frac{\alpha x'_0 - \beta}{\gamma x'_0 - \delta},$$

wo $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *eine Substitution der ersten oder zweiten Classe ist.*

Bezeichnen wir zwei complexe Zahlen x und x', welche durch eine Relation $x = \dfrac{\alpha x' - \beta}{\gamma x' - \delta}$ verbunden sind, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Coefficienten einer Substitution erster oder zweiter Classe bedeuten, als *vollständig äquivalente* Zahlen, so können wir obigen Satz auch so aussprechen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die vollständige Äquivalenz zweier Formen f und f' ist, dass ihre ersten Wurzeln x_0 und x'_0 vollständig äquivalente Zahlen sind.

§ 2. *Wurzel-Paare.*

Es seien x und y die von einander verschiedenen, irrationalen Wurzeln einer quadratischen Gleichung:

$$(11) \qquad ax^2 + 2bx + c = 0,$$

deren Coefficienten a, b, c complexe ganze Zahlen sind.

Setzen wir:

$$
(12) \qquad \begin{aligned} x &= a^0 - \frac{1}{x'}, \\ y &= a^0 - \frac{1}{y'}, \end{aligned}
$$

wo a^0 die der Zahl x nach der Entwicklungsvorschrift für Kettenbrüche erster Art zugeordnete complexe ganze Zahl bedeutet, so sind x', y' eindeutig durch x, y bestimmt und offenbar wieder die Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit complexen ganzzahligen Coefficienten von gleicher Discriminante wie (11). Es sind daher x', y', ebenso wie x, y, irrationale von einander verschiedene complexe Grössen.

Wir bezeichnen das auf solche Weise erhaltene Wurzelpaar $(x'\,y')$ als dem Paare $(x\,y)$ *benachbart.*

Ein Wurzelpaar $(x_0\,y_0)$ heisse reducirt, falls x_0, nach 1ter Art entwickelt, einen rein periodischen Kettenbruch liefert.

Aus dieser Definition folgt, dass x_0 notwendig dem Raume R angehören muss.

Bilden wir, von einem beliebigen Wurzelpaar $(x\,y)$ ausgehend, die Reihe von Paaren:

$$
(13) \qquad (x\,y)\,,\ (x'\,y')\,,\ (x''\,y'')\ \ldots
$$

in welcher jedes Paar dem vorhergehenden benachbart ist, so kommen wir stets auf ein reducirtes Paar, da die Kettenbruch-Entwicklung 1ter Art von quadratischen Irrationalitäten, nach § 8., I. Abschnitt, periodisch wird.

Es sei nun $(x_0\,y_0)$ ein in der Reihe (13) vorkommendes reducirtes Wurzelpaar und die Kettenbruch-Entwicklung 1ter Art von x_0 laute:

$$
(14) \qquad x_0 = (a_0\,,\ a_1\,,\ \ldots\,,\ a_n\,,\ x_0).
$$

Dann haben wir, dem Ansatz (12) zufolge:

$$
(15) \qquad y_0 = a_0 - \frac{1}{y_1}, \qquad y_1 = a_1 - \frac{1}{y_2}, \quad \ldots\,, \quad y_n = a_n - \frac{1}{y_{n+1}},
$$

also:

$$
y_0 = (a_0\,,\ a_1\,,\ \ldots\,,\ a_n\,,\ y_{n+1})
$$

und es ergiebt sich ohne Schwierigkeit $y_{n+1} = y_0$.

Setzen wir die Gleichungskette (15) in die Form:

$$(16)\qquad \frac{1}{y_0} = a_n - \frac{1}{\frac{1}{y_n}}, \quad \frac{1}{y_n} = a_{n-1} - \frac{1}{\frac{1}{y_{n-1}}}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{y_1} = a_0 - \frac{1}{\frac{1}{y_0}},$$

so sind dies die Gleichungen für die Kettenbruch-Entwicklung 2ter Art der Grösse $\frac{1}{y_0}$.

Beweis: Richten wir den Kettenbruch (15) ein:

$$y_0 = \frac{p_n y_{n+1} - p_{n-1}}{q_n y_{n+1} - q_{n-1}},$$

so folgt:

$$y_{n+1} = y_0 = \frac{q_{n-1} y_0 - p_{n-1}}{q_n y_0 - p_n},$$

daher:

$$\frac{1}{y_0} = \frac{q_n y_0 - p_n}{q_{n-1} y_0 - p_{n-1}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} + \frac{1}{q_{n-1}^2 y_0 - p_{n-1} q_{n-1}}$$

oder wenn wir:

$$x_0 = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + \frac{\theta_{n-1}}{q_{n-1}^2}$$

also

$$p_{n-1} q_{n-1} = x_0 q_{n-1}^2 - \theta_{n-1}$$

einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_0} &= \frac{q_n}{q_{n-1}} + \frac{1}{q_{n-1}^2} \cdot \frac{1}{y_0 - x_0 + \frac{\theta_{n-1}}{q_{n-1}^2}} \\ &= k_n + \varepsilon_{n-1}. \end{aligned}$$

Nun wissen wir, dass $k_n = \frac{1}{y_0} - \varepsilon_{n-1}$ für jeden Wert von n ins Innere des Kreisgebiets a_n fällt und dass ε_{n-1} mit wachsendem n dem absoluten Betrage nach unter alle Grenzen sinkt. (I. Abschn. § 6.)

Da nun $\frac{1}{y_0}$ periodisch immer wieder in dem Ansatz (16) auftritt, wenn wir in (14) mehr und mehr Perioden von x_0 einsetzen, so kann $\frac{1}{y}$ nicht

ausserhalb des Kreisgebiets a_n liegen, sondern nur im Innern oder auf den Begrenzungsbogen dieses Gebiets. Das Analoge gilt für die Grössen $\frac{1}{y_n}, \frac{1}{y_{n-1}}, \ldots, \frac{1}{y_1}$, denn wir können unsere ganze Betrachtung ja von jedem der auf $(x_0\, y_0)$ folgenden Wurzelpaare ausgehen lassen.

Wir zeigen nun weiter, dass es unmöglich ist, dass $\frac{1}{y_0}$ auf dem Teile der Begrenzung des Kreisgebiets a_n liegt, welcher (nach § 6, Abschnitt I) nicht zu dem Kreisgebiet zu rechnen ist.

Würden wir annehmen, dass $\frac{1}{y_0}$ auf dem nicht zum Kreisgebiet a_n zu rechnenden Teil der Begrenzung fiele, so würde zunächst folgen, dass y_0 im Innern oder auf der Begrenzung des durch die Bogen $P'_{1+i}, P'_{1-i}, P'_{-1+i}, P'_{-1-i}$ gebildeten Kreisbogenvierecks V_0 liegt, und daher $a_0 - y_0 = \frac{1}{y_1}$ in jedem Falle dem Kreisgebiete a_0 angehört.[1]

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1) Ist $a_0 \neq 1 \pm i, -1 \pm i$, so folgt, dass y_1 ins Innere oder auf die Begrenzung des Vierecks V_0 fällt, folglich $a_1 - y_1 = \frac{1}{y_2}$ dem Kreisgebiete a_1 angehört.

2) Ist $a_0 = 1 + i$, so kann a_1 keine Zahl der Typen $(1-i), (2), (-2i)$ und a_n nicht $1 - i$ sein, denn sowohl die Folge $(a_0 a_1 \ldots)$, als auch die Folge $(\ldots a_n a_0 \ldots)$ muss das Gesetz (B) erfüllen.

Da $a_n \neq 1 - i$ ist, kann y_0 nicht auf P'_{1+i}, daher $a_0 - y_0 = \frac{1}{y_1}$ nicht auf den Rand, sondern nur ins Innere des Kreisgebiets $a_0 = 1 + i$, und folglich y_1 nicht auf die Begrenzung des Zweiecks Z_{1-i} fallen.

Da nun a_1 nicht den Typen $(1-i)$, (2), $(-2i)$ angehört, so ergiebt sich, dass $a_1 - y_1 = \frac{1}{y_0}$ dem Kreisgebiet a_1 angehört.

Analog ist die Betrachtung zu führen, falls $a_0 = 1 - i, -1 + i, -1 - i$ angenommen wird.

Schliessen wir jetzt in gleicher Weise auf die Lagen von $\frac{1}{y_3}, \frac{1}{y_4}, \ldots,$ so kommen wir schliesslich zu dem Resultat, dass $\frac{1}{y_0}$ dem Kreisgebiete a_n

[1] Unter »dem Kreisgebiete angehören« verstehe ich, dass die betreffende Zahl entweder ins Innere oder auf die zum Kreisgebiete zu rechnenden Begrenzungsbogen fällt.

angehören muss, entgegen unsrer Annahme. Wir erkennen also, dass $\frac{1}{y_0}$ und ebenso die Grössen $\frac{1}{y_n}$, $\frac{1}{y_{n-1}}$, ... nicht auf *die* Begrenzungsbogen der Kreisgebiete a_n bezügl. a_{n-1}, a_{n-2}, ... fallen, welche nicht zu diesen Gebieten zu rechnen sind, dass diese Grössen demnach den betreffenden Kreisgebieten angehören, und dass folglich die Gleichungskette (16) die Kettenbruch-Entwicklung 2ter Art der Grösse $\frac{1}{y_0}$ liefert, nämlich:

$$\frac{1}{y_0} = \left(a_n\,,\, a_{n-1}\,,\, \ldots\,,\, a_0\,,\, \frac{1}{y_0}\right).$$

Unsere Betrachtung hat uns somit den Satz ergeben:

Ist $(x_0\, y_0)$ *ein reducirtes Wurzelpaar und lautet die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von* x_0*:*

$$x_0 = (a_0\,,\, a_1\,,\, \ldots\,,\, a_{n-1}\,,\, a_n\,,\, x_0),$$

so lautet die Kettenbruch-Entwicklung zweiter Art des reciproken Wertes von y_0*:*

$$\frac{1}{y_0} = \left(a_n\,,\, a_{n-1}\,,\, \ldots\,,\, a_1\,,\, a_0\,,\, \frac{1}{y_0}\right).$$

Wir erkennen ferner, dass $\frac{1}{y_0}$, der Periodicität wegen, nur dann auf den Rand eines Kreisgebiets fallen kann, wenn a_n einen der Werte:

$$2\,,\, -2\,,\, 2i\,,\, -2i\,,\, 2+2i\,,\, 2-2i\,,\, -2+2i\,,\, -2-2i\,,$$

(also 2, $2+2i$ und deren associirte Werte) besitzt und die Periode $(a_0\,,\, a_1\,,\, \ldots\,,\, a_n)$ nur aus Zahlen dieser Reihe zusammengesetzt ist. Ferner folgt, dass y_0 selbst stets ins Innere des Einheitskreises fällt.

§ 3. *Reduction der Formen.*

Die im vorigen Paragraphen aufgestellten Begriffe übertragen wir jetzt auf die quadratischen Formen.

Wir nennen zwei Formen von gleicher Determinante:

$$f = (a\,,\, b\,,\, c) \quad \text{und} \quad f' = (a'\,,\, b'\,,\, c')$$

benachbart, wenn ihre Wurzeln:

$$(x_0\, y_0) \quad \text{und} \quad (x_0'\, y_0')$$

benachbarte Paare sind, und bezeichnen eine Form f_n als *reducirt*, wenn ihre Wurzeln $(x_n\, y_n)$ ein reducirtes Paar bilden.

Eine reducirte Form ist hiernach dadurch charakterisirt, dass die Entwicklung erster Art ihrer ersten Wurzel einen rein periodischen Kettenbruch liefert.

Die erste Wurzel einer reducirten Form gehört dem Raume R, die zweite Wurzel dem Innern des Einheitskreises an.

Ist x_0 die erste Wurzel einer reducirten Form, y_0 deren zweite Wurzel, so ist die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von x_0 und diejenige zweiter Art von $\frac{1}{y_0}$ rein periodisch; die eine Periode erhält man aus der andern durch Umkehrung der Aufeinanderfolge der Teilnenner.

Da die ersten Wurzeln x_0 und x_0' von benachbarten Formen durch die Relation verbunden sind:

$$x_0 = a - \frac{1}{x_0'} = \frac{a x_0' - 1}{x_0'},$$

so sind x_0 und x_0' vollständig äquivalente Zahlen, und daher gilt der Satz:

Benachbarte Formen sind (vollständig) äquivalent.

Bilden wir, von dem Wurzelpaar $(x_0\, y_0)$ einer gegebenen Form f ausgehend, die Reihe der benachbarten Paare:

$$(x_0\, y_0)\,,\ (x_1\, y_1)\,,\ \ldots\,,\ (x_n\, y_n)\,,\ (x_{n+1}\, y_{n+1})\,,\ \ldots\,,$$

so kommen wir stets auf ein reducirtes Paar, von welchem ab nur noch reducirte Paare folgen; wir haben also den Satz:

Jede quadratische Form f ist einer reducirten Form f_{n+1} (vollständig) äquivalent.

Entwickelt man die erste Wurzel x_0 der Form f in einen Kettenbruch erster Art:

$$x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}),$$

so ist von einem bestimmten Werte von n ab, x_{n+1} stets erste Wurzel einer reducirten Form f_{n+1}, und die Form f geht durch die der ersten oder zweiten Classe angehörige Substitution:

$$x = p_n x' - p_{n-1} y',$$

$$y = q_n x' - q_{n-1} y'$$

in die reducirte Form f_{n+1} über.

Wir beweisen weiter, dass es nur eine endliche Anzahl von reducirten Formen einer bestimmten Determinante D giebt.

Sind x_0, y_0 die Wurzeln einer reducirten Form (a, b, c) der Determinante D, so ist, nach I. Abschnitt, § 8, S. 256:

$$(17)\quad \begin{aligned} |x_0 - y_0| &\geqq \left|\frac{1}{\theta_n}\right| - |\varepsilon_n|, \\ \left|\frac{1}{x_0} - \frac{1}{y_0}\right| &> \left|\frac{1}{\theta_{n-1}}\right| - |\varepsilon'_{n-1}|, \end{aligned}$$

und $|\varepsilon_n|$ und $|\varepsilon'_{n-1}|$ sinken mit wachsendem n unter alle Grenzen.

Nun ist (siehe Gleichung (8), S. 254) allgemein:

$$\left|\frac{1}{\theta_n}\right| = \left|x_{n+1} - \frac{q_{n-1}}{q_n}\right|,$$

daher:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\theta_n}\right| &\geqq |x_{n+1}| - \left|\frac{q_{n-1}}{q_n}\right| \\ &> |x_{n+1}| - 1. \end{aligned}$$

Nehmen wir für x_{n+1} den Rest aus der Periode von x_0, welcher den kleinsten absoluten Betrag besitzt und bezeichnen diesen absoluten Betrag mit k, wo $k > 1$, so sehen wir, dass für jeden Wert von n:

$$\left|\frac{1}{\theta_n}\right| > k', \qquad (k' = k - 1)$$

ist, wo k' eine von null verschiedene feste positive Zahl bedeutet. Be-

zeichnen wir nun mit k'' eine positive Zahl, die um beliebig wenig kleiner ist als k', so können wir die Ungleichungen (17) ersetzen durch

$$(18) \qquad \begin{aligned} &|x_0 - y_0| > k'', \\ &\left|\frac{1}{x_0} - \frac{1}{y_0}\right| > k''. \end{aligned}$$

Da

$$|x_0 - y_0| = \frac{2|\sqrt{D}|}{|a|}, \qquad \left|\frac{1}{x_0} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{2|\sqrt{D}|}{|c|}$$

ist, so sind $|a|$ und $|c|$ demnach kleiner als $\frac{2|\sqrt{D}|}{k''}$, folglich können a und c und daher auch $b = \sqrt{D + ac}$ nur eine endliche Zahl von verschiedenen Werten besitzen. Hieraus folgt der Satz:

Es giebt nur endlich viele reducirte Formen der Determinante D.

Bilden wir von dem Wurzelpaar $(x_0\ y_0)$ einer reducirten Form f_0 ausgehend, die Reihe der benachbarten Paare:

$$(x_0\ y_0),\ (x_1\ y_1),\ \ldots,\ (x_n\ y_n),\ (x_0\ y_0),\ (x_1\ y_1),\ \ldots,\ (x_n\ y_n),\ \ldots,$$

so ist jedes Glied dieser rein periodischen Reihe Wurzelpaar einer reducirten zu f_0 äquivalenten Form. Da die Anzahl der reducirten Formen endlich ist, ergiebt sich hieraus der Satz:

Die reducirten Formen einer bestimmten Determinante D gruppiren sich in Perioden von unter einander äquivalenten Formen.

§ 4. *Äquivalenz von reducirten Formen gleicher Determinante.*

Es bleibt nun noch die Frage zu beantworten: Wann sind zwei reducirte Formen von gleicher Determinante, welche verschiedenen Perioden angehören, äquivalent?

Da das Charakteristikum für die vollständige Äquivalenz zweier Formen die vollständige Äquivalenz ihrer ersten Wurzeln ist, so können wir obige Frage auch so formuliren:

In welchem Zusammenhange steht die vollständige Äquivalenz zweier von einander verschiedener quadratischer Irrationalitäten x_0 und x_0', welche, nach erster Art entwickelt, rein periodische Kettenbrüche liefern, mit diesen Kettenbruch-Entwicklungen?

Zur Beantwortung dieser Frage beweisen wir die folgenden zwei Sätze:

I. *Entwickelt man zwei beliebige quadratische Irrationalitäten x_0 und x_0' in Kettenbrüche erster Art, und ist einer der in der einen Entwicklung auftretenden Reste x_i gleich oder entgegengesetzt gleich einem der in der andern Entwicklung auftretenden Reste x_k', so sind x_0 und x_0' vollständig äquivalente Grössen.*

II. *Es seien x_0 und x_0' zwei vollständig äquivalente quadratische Irrationalitäten, deren Kettenbruch-Entwicklungen erster Art als rein periodisch vorausgesetzt werden:*

$$(19) \qquad x_0 = \left(\overline{a_0\,, a_1\,, \ldots, a_n}\,, x_0\right),$$

$$(20) \qquad x_0' = \left(\overline{a_0'\,, a_1'\,, \ldots, a_m'}\,, x_0'\right) = \left(a_0'\,, a_1'\,, \ldots, a_r'\,, x_{r+1}'\right),$$

so kann man den Index r stets so wählen, dass

$$\text{entweder} \quad x_{r+1}' = x_0$$

$$\text{oder} \quad x_{r+1}' = -x_0$$

wird und dass durch Elimination von x_0 zwischen den Gleichungen (19) *und* (20) *die Äquivalenzbeziehung zwischen x_0 und x_0' resultirt.*

Aus diesen beiden Sätzen ergiebt sich als Folgerung der Satz:

III. *Für die vollständige Äquivalenz zweier quadratischer Irrationalitäten x_0 und x_0', welche nach erster Art entwickelt rein periodische Kettenbrüche liefern, ist notwendig und hinreichend, dass die eine der Irrationalitäten, selbst oder mit entgegengesetztem Vorzeichen, als Rest in der Kettenbruch-Entwicklung der andern auftritt.*

Aus diesem Satze folgt endlich:

IV. *Die ersten Wurzeln von reducirten Formen, und daher auch reducirte Formen selbst, sind dann und nur dann vollständig äquivalent, wenn die Perioden der Kettenbruch-Entwicklung erster Art der ersten Wurzeln ent-*

weder die gleichen oder die entgegengesetzt gleichen Teilnenner, in der gleichen oder in cyklisch vertauschter Reihenfolge enthalten.

Beweis des Satzes I:

Es sei, nach 1ter Art entwickelt:

$$x_0' = (a_0', a_1', \ldots, a_{k-1}', x_k'); \qquad x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i)$$

dann ergiebt sich durch Einrichtung:

$$x_k' = \frac{q_{k-2}' x_0' - p_{k-2}'}{q_{k-1}' x_0' - p_{k-1}'}; \qquad x_i = \frac{q_{i-2} x_0 - p_{i-2}}{q_{i-1} x_0 - p_{i-1}}.$$

Nach Voraussetzung haben wir daher:

$$\frac{q_{k-2}' x_0' - p_{k-2}'}{q_{k-1}' x_0' - p_{k-1}'} = \pm \frac{q_{i-2} x_0 - p_{i-2}}{q_{i-1} x_0 - p_{i-1}}.$$

Gilt das obere Vorzeichen, so ergiebt sich:

$$x_0' = \frac{\alpha x_0 - \beta}{\gamma x_0 - \delta},$$

wo

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{k-2}' & p_{k-1}' \\ q_{k-2}' & q_{k-1}' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{i-1} & p_{i-1} \\ q_{i-2} & p_{i-2} \end{pmatrix};$$

gilt das untere Vorzeichen, so erhalten wir:

$$x_0' = \frac{\alpha'(-x_0) - \beta'}{\gamma'(-x_0) - \delta'} = \frac{i\alpha' x_0 - (-i\beta')}{i\gamma' x_0 - (-i\delta')},$$

wo

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{k-2}', & p_{k-1}' \\ q_{k-2}', & q_{k-1}' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -q_{i-1} & p_{i-1} \\ q_{i-2} & -p_{i-2} \end{pmatrix}.$$

Da aufeinanderfolgende Näherungsbrüche unsrer Kettenbruch-Entwicklung Substitutionen $\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$ der ersten oder zweiten Classe liefern, so sieht man, dass $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ bezgl. $\begin{pmatrix} i\alpha' & -i\beta' \\ i\gamma' & -i\delta' \end{pmatrix}$ der ersten oder zweiten

Classe angehören [1] und demnach x_0' und x_0 vollständig äquivalente Zahlen sind.

Beweis des Satzes II:

Die Äquivalenz-Beziehung zwischen x_0 und x_0' laute:

$$x_0' = \frac{\alpha x_0 - \beta}{\gamma x_0 - \delta}. \tag{21}$$

Wir richten den Kettenbruch (19) ein:

$$x_0 = \frac{p_n x_0 - p_{n-1}}{q_n x_0 - q_{n-1}} \tag{22}$$

und setzen diesen Wert von x_0 in (21) ein. Dadurch erhalten wir:

$$x_0' = \frac{p x_0 - p'}{q x_0 - q'}, \tag{23}$$

wo wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \alpha p_n - \beta q_n &= p, \qquad & \alpha p_{n-1} - \beta q_{n-1} &= p', \\ \gamma p_n - \delta q_n &= q, \qquad & \gamma p_{n-1} - \delta q_{n-1} &= q' \end{aligned} \tag{24}$$

geschrieben haben.

Die Gleichung (23) werden wir auch in der Form benutzen:

$$x_0' = \frac{ip(-x_0) - (-ip')}{iq(-x_0) - (-iq')}. \tag{23a}$$

Wir entwickeln nun $\frac{p}{q}$ in einen Kettenbruch 1^ter^ Art:

$$\frac{p}{q} = (b_0, b_1, \ldots, b_{r-1}, b_r). \tag{25}$$

Wenn wir diesen Kettenbruch wieder einrichten, erhalten wir einen der vier Brüche $\frac{+p}{+q}, \frac{+ip}{+iq}, \frac{-p}{-q}, \frac{-ip}{-iq}$. Von diesen vier Möglichkeiten können wir die letzten beiden unberücksichtigt lassen, indem wir festsetzen, dass in

---

[1] Vergleiche S. 265.

diesen Fällen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta$ ersetzt werden sollen, wodurch $-p$ und $-q$ an die Stelle von $+p$ und $+q$ treten.

Ferner wollen wir den Kettenbruch (25) in den nachfolgenden Fällen durch einen in den letzten zwei Teilnennern abgeänderten gleichwertigen Kettenbruch ersetzt denken:

I. Wenn die Einrichtung $\frac{p}{q}$ ergiebt, soll (b_{r-1}, b_r) ersetzt werden durch:

1) $(b_{r-1} - (1-i), \; -1-i)$, falls $b_r = 1+i$ und zugleich a_n entweder $= -1-i$ oder eine der Zahlen: $-2, \; -2-2i, \; -2i$

2) $(b_{r-1} + (1-i), \; 1+i)$, falls $b_r = -1-i$ und zugleich a_n entweder $= 1+i$ oder eine der Zahlen: $2, \; 2+2i, \; 2i$

3) $(b_{r-1} - (1+i), \; -1+i)$, falls $b_r = 1-i$ und zugleich a_n entweder $= -1+i$ oder eine der Zahlen: $-2, \; -2+2i, \; 2i$

4) $(b_{r-1} + (1+i), \; 1-i)$, falls $b_r = -1+i$ und zugleich a_n entweder $= 1-i$ oder eine der Zahlen: $2, \; 2-2i, \; -2i$

II. Wenn die Einrichtung $\frac{ip}{iq}$ ergiebt, soll (b_{r-1}, b_r) ersetzt werden durch:

1) $(b_{r-1} - (1-i), \; -1-i)$, falls $b_r = 1+i$ und zugleich a_n entweder $= 1+i$ oder eine der Zahlen: $2, \; 2+2i, \; 2i$

2) $(b_{r-1} + (1-i), \; 1+i)$, falls $b_r = -1-i$ und zugleich a_n entweder $= -1-i$ oder eine der Zahlen: $-2, \; -2-2i, \; -2i$

3) $(b_{r-1} - (1+i), \; -1+i)$, falls $b_r = 1-i$ und zugleich a_n entweder $= 1-i$ oder eine der Zahlen: $2, \; 2-2i, \; -2i$

4) $(b_{r-1} + (1+i), \; 1-i)$, falls $b_r = -1+i$ und zugleich a_n entweder $= -1+i$ oder eine der Zahlen: $-2, \; -2+2i, \; 2i$

Die Veränderung der zwei letzten Teilnenner von (25), wenn a_n einen der Werte $2, \; 2+2i$ oder einen zu diesen associirten hat, ist in der oben

angegebenen Weise nur dann erforderlich, wenn die Periode $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ nur aus den Zahlen $2, 2+2i$ resp. den associirten besteht.

Die Abänderung der letzten zwei Teilnenner ändert den Wert von (25) nicht, nur die Einrichtung des abgeänderten Bruches liefert im Falle I: $\frac{-p}{-q}$, im Falle II: $\frac{-ip}{-iq}$, was durch unsere Festsetzung über $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ wieder auf die gleichen Fälle zurückführt.

Ferner wollen wir zeigen, dass die abgeänderten Kettenbrüche in der Aufeinanderfolge ihrer Teilnenner das Gesetz (B) erfüllen.

In der That verstossen die letzten drei Teilnenner nicht gegen dieses Gesetz. Ist z. B. $b_r = 1 + i$, so ist:

1) $b_{r-1} - (1 - i) \neq 0$, weil $b_{r-1} \neq 1 - i$ ist,

2) $b_{r-1} - (1 - i) \neq -1 + i$, weil $b_{r-1} \neq 0$ ist,

3) $b_{r-2}, b_{r-1} - (1 - i)$ eine richtige Folge, denn nehmen wir etwa $b_{r-2} = 1 + i$ an, so gehört b_{r-1} nicht zu den Typen $(2), (1 - i), (-2i)$ und das Nämliche gilt auch von $b_{r-1} - (1 - i)$.

Analog sieht man in den übrigen Fällen, dass das Gesetz (B) erfüllt bleibt.

Nach diesen Vorbemerkungen betrachten wir nun weiter die zwei bei der Einrichtung von (25) zu unterscheidenden Fälle:

I) Die Einrichtung ergiebt $\frac{+p}{+q}$. Der vorletzte Näherungsbruch sei $\frac{p''}{q''}$. Dann haben wir:

$$p''q - pq'' = 1,$$

und ferner aus (24):

$$p'q - pq' = (\beta\gamma - \alpha\delta)[p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}] = 1,$$

daher:

$$(p'' - p')q = (q'' - q')p,$$

woraus folgt:

$$\frac{p}{q} = \frac{p'' - p'}{q'' - q'}$$

und daher:

$$p' = p'' - tp, \tag{28}$$

$$q' = q'' - tq, \tag{29}$$

wo t eine complexe ganze Zahl bedeutet.

Setzen wir diese Werte von p' und q' in (23) ein, so erhalten wir:

$$x_0' = \frac{p(x_0 + t) - p''}{q(x_0 + t) - q''},$$

woraus sich der Kettenbruch ergiebt:

$$x_0' = (b_0\,, b_1\,, \ldots, b_r\,, x_0 + t). \tag{30}$$

II) Die Einrichtung ergiebt $\dfrac{+ip}{+iq}$. Der vorletzte Näherungsbruch sei $\dfrac{p'''}{q'''}$. Dann haben wir:

$$p'''iq - q'''ip = 1,$$

ferner, wie oben:

$$p'q - q'p = 1$$

daher:

$$(ip''' - p')q = (iq''' - q')p$$

und folglich:

$$p' = ip''' - t_1 p, \quad \text{daher} \quad -ip' = p''' + t_1 ip, \tag{28a}$$

$$q' = iq''' - t_1 q, \quad \text{»} \quad -iq' = q''' + t_1 iq, \tag{29a}$$

wo t_1 eine complexe ganze Zahl bedeutet.

Diese Werte in (23_a) eingesetzt, giebt:

$$x_0' = \frac{ip(-x_0 - t_1) - p'''}{iq(-x_0 - t_1) - q'''}$$

woraus folgt:

$$x_0' = (b_0\,, b_1\,, \ldots, b_r\,, (-x_0 - t_1)). \tag{30a}$$

Wir haben nun zu untersuchen, ob im Falle I Gleichung (30), im Falle II Gleichung (30_a) die Kettenbruch-Entwicklung 1ter Art der Grösse x_0' darstellen.

Zunächst untersuchen wir die Zahlen b_r und t (bezgl. t_1):

Da die Coefficienten der Substitution $\begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix}$ durch Composition von $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$ entstehen und die beiden letzteren Substitutionen der ersten oder zweiten Classe angehören, so folgt, dass für aufeinanderfolgende Werte von n: $\begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix}$ abwechselnd der ersten und zweiten Classe angehört und daher $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ abwechselnd von der Form $\frac{k(1+i)}{k_1(1+i)-1}$ und $\frac{k'(1+i)-1}{k'_1(1+i)}$ sind. Hieraus schliessen wir nach dem letzten Satze § 5, I. Abschnitt, dass $b_r \equiv 0 \pmod{1+i}$ sein muss.

Ferner ergiebt sich, wie folgt, dass auch die complexe ganze Zahl t nur $\equiv 0 \pmod{1+i}$ sein kann.

Es ist $p'' \equiv p' \pmod{1+i}$ und $q'' \equiv q' \pmod{1+i}$. Ist nun

$$p'' \equiv p' \equiv 0 \pmod{1+i},$$

so ist $p \equiv 1 \pmod{1+i}$ und daher, wegen (28), $t \equiv 0 \pmod{1+i}$; ist aber $p'' \equiv 1 \pmod{1+i}$, so ist $q'' \equiv q' \equiv 0 \pmod{1+i}$ und $q \equiv 1 \pmod{1+i}$, daher, wegen (29), $t \equiv 0 \pmod{1+i}$.

Die analogen Überlegungen liefern im Falle II: $t_1 \equiv 0 \pmod{1+i}$.

Nun zeigen wir, dass von einem gewissen Index n ab, die Zahl t nur noch die Werte 0, $1 \pm i$, $-1 \pm i$, ± 2, $\pm 2i$ annehmen kann.

Aus (29) folgt: $t = \frac{q'' - q'}{q}$, demnach ist:

$$|t| = \left|\frac{q'' - q'}{q}\right| \leqq \left|\frac{q''}{q}\right| + \left|\frac{q'}{q}\right|.$$

Nun ist $\left|\frac{q''}{q}\right| < 1$, für jedes n, und:

$$\frac{q'}{q} = \frac{\gamma p_{n-1} - \delta q_{n-1}}{\gamma p_n - \delta q_n} = \frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{\gamma}{q_n(\gamma p_n - \delta q_n)}$$

oder wenn wir

$$x_0 - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\theta_n}{q_n^2},$$

also:

$$p_n q_n = x_0 q_n^2 - \theta_n$$

einführen:

$$\frac{q'}{q} = \frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{\gamma}{q_n^2(\gamma x_0 - \delta) - \gamma\theta_n} = \frac{q_{n-1}}{q_n} + \varepsilon_n,$$

wo ε_n mit wachsendem n, dem absoluten Betrage nach, unter alle Grenzen sinkt. Da $\left|\frac{q_{n-1}}{q_n}\right| < 1$ ist, so folgt:

$$|t| < 2 + |\varepsilon_n|$$

und daher für genügend grosses n:

$$|t| \leqq 2.$$

Analog ergiebt sich, dass für genügend grosses n: $|t_1| \leqq 2$ sein muss.

Um den Wert von t weiter zu untersuchen, müssen wir die Grössen $\frac{q}{q}$ und $\frac{q'}{q}$ näher betrachten.

Zur Abkürzung der Ausdrucksweise wollen wir das Kreisgebiet a_n mit K_{a_n} und dasjenige Gebiet, welches wir erhalten, wenn wir zu jedem Punkte x von K_{a_n} den reciproken Wert $\frac{1}{x}$ bestimmen, als das Gebiet K'_{a_n} bezeichnen.

Ferner wollen wir $q = \gamma p_n - \delta q_n$ in seiner Abhängigkeit von n mit $q^{(n)}$ und $q' = \gamma p_{n-1} - \delta q_{n-1}$ mit $q^{(n-1)}$ bezeichnen.

a) Im I. Abschnitt, § 6, haben wir bewiesen, dass $\frac{q_n}{q_{n-1}}$ stets ins Innere des Gebietes K_{a_n} fällt. Hieraus folgt, dass $\frac{q''}{q}$ ins Innere des Gebietes K'_{b_r} fällt.

b) Da $p_n = a_n p_{n-1} - p_{n-2}$ und $q_n = a_n q_{n-1} - q_{n-2}$ ist, so haben wir:

$$q^{(n)} = a_n q^{(n-1)} - q^{(n-2)}$$

und daher, wenn wir $\frac{q^{(n)}}{q^{(n-1)}}$ mit $k^{(n)}$ bezeichnen:

$$k^{(1)} = a_1 - \frac{1}{k^{(0)}}, \qquad k^{(2)} = a_2 - \frac{1}{k^{(1)}}, \quad \ldots, \quad k^{(n)} = a_n - \frac{1}{k^{(n-1)}}, \quad \ldots,$$

wo

$$k^{(0)} = \frac{\gamma p_0 - \delta q_0}{\gamma p_{-1} - \delta q_{-1}} = \frac{\gamma a_0 - \delta}{\gamma}$$

zu setzen ist.

Von den Grössen $k^{(n)}$ zeigen wir, dass wenn eine der Grössen $k^{(i)}$ ins Innere des Kreisgebiets a_i fällt, auch alle folgenden Grössen $k^{(i+1)}, k^{(i+2)}, \ldots$ ins Innere der Kreisgebiete a_{i+1}, resp. $a_{i+2} \ldots$ fallen.

In der That, wenn $k^{(n-1)}$ ins Innere von $K_{a_{n-1}}$ fällt, so fällt $-\frac{1}{k^{(n-1)}}$ ins Innere des Kreisbogenvierecks V_0,[1] falls $a_{n-1} \neq 1 \pm i, -1 \pm i$ ist, und dann fällt $k^{(n)} = a_n - \frac{1}{k^{(n-1)}}$ ins Innere von K_{a_n}.

Ist aber $a_{n-1} = 1 + i$, so gehört a_n nicht den Typen $(1 - i), (2), (-2i)$ an; $-\frac{1}{k^{(n-1)}}$ fällt ins Innere des Zweiecks Z_{-1+i} und daher $k^{(n)}$ ins Innere von K_{a_n}.

Nun ist:

$$\frac{q^{(n)}}{q^{(n-1)}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} - \varepsilon'_{n-1}$$

(was sich analog ergiebt, wie oben: $\frac{q'}{q} = \frac{q_{n-1}}{q_n} + \varepsilon_n$); ferner ist nach § 2, S. 269:

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{1}{y_0} - \varepsilon_{n-1},$$

wo y_0 die zweite Wurzel der quadratischen Gleichung bedeutet, welcher x_0 genügt. Es folgt hieraus:

$$k^{(n)} = \frac{q^{(n)}}{q^{(n-1)}} = \frac{1}{y_0} - \varepsilon, \quad \text{wo} \quad \varepsilon = \frac{1}{q_{n-1}^2}\left[\frac{1}{(y_0 - x_0) + \frac{\theta_{n-1}}{q_{n-1}^2}} + \frac{\gamma}{\gamma x_0 - \delta - \gamma\frac{\theta_{n-1}}{q_{n-1}^2}}\right],$$

dem absoluten Betrage nach, mit wachsendem n beliebig klein wird. Wir schliessen aus dieser Gleichung, dass der Punkt $k^{(n)}$ immer näher an den

[1] V_0 ist das Kreisbogenviereck, welches durch Vervollständigung der Peripherien der Kreisgebiete $1 \pm i, -1 \pm i$ im Einheitskreise entsteht.

Punkt $\frac{1}{y_0}$ heranrückt, wenn wir mehr und mehr Perioden $a_0, a_1, \ldots, a_n$ von x_0 in (19) einsetzen.

Liegt nun $\frac{1}{y_0}$ im Innern des Kreisgebiets a_n, so können wir es durch genügend grosse Wahl von n erreichen, dass $k^{(n)} = \frac{q}{q'}$ ebenfalls ins Innere von K_{a_n}, $\frac{q'}{q}$ daher ins Innere von K'_{a_n} fällt.

Liegt aber $\frac{1}{y_0}$ auf der zu K_{a_n} gehörigen Begrenzung, was involvirt, dass die Periode $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nur aus den Zahlen 2, $2 + 2i$ und den associirten zusammengesetzt ist, so kann $k^{(n)} = \frac{q}{q'}$ auch für genügend grosses n auf die Begrenzung von K_{a_n} oder in die Nachbar-Kreisgebiete, also in $K_{1 \pm i}$, $K_{-1 \pm i}$ fallen. $\frac{q'}{q}$ würde dann entweder in die Zweiecke $Z_{1 \mp i}$, $Z_{-1 \mp i}$ oder auf deren gegen den Nullpunkt zu liegenden Begrenzungsbogen fallen.

Aus den unter a) und b) angestellten Betrachtungen ergiebt sich, dass für genügend grosses n aus $\frac{q''}{q} - \frac{q'}{q}$ nur dann eine von null verschiedene complexe ganze Zahl t resultiren kann, wenn sowohl $\frac{q''}{q}$, als auch $\frac{-q'}{q}$ ins Innere des nämlichen Zweiecks Z fallen.

Wenn wir noch die analogen Betrachtungen im Falle II. für $-t_1$ anstellen, so erhalten wir folgendes Ergebniss:

Im Falle I. kann $t = 1 - i$, $-1 + i$, $1 + i$, $-1 - i$ resultiren, wenn b_r und a_n die auf Seite 278 unter I. 1), 2), 3), 4) angegebenen Werte haben; im Falle II. kann $-t_1 = 1 - i$, $-1 + i$, $1 + i$, $-1 - i$ resultiren, wenn b_r und a_n die unter II. 1), 2), 3), 4) angegebenen Werte besitzen. Durch die nach unsern Festsetzungen dann eintretende Veränderung der letzten zwei Teilnenner des Kettenbruchs (25) wird aber erreicht, dass auch in diesen Fällen t, resp. $-t_1$ den Wert Null erhält.

Wir sehen hiernach, dass wir immer, bei genügend grosser Wahl von n, annehmen können, dass t, bezgl. $-t_1$ nur noch den Wert null erhalten.

Nun folgt aus $t = \frac{q''}{q} - \frac{q'}{q} = 0$, dass $\frac{q''}{q} = \frac{q'}{q}$ und demnach $b_r = a_n$ sein muss; ebenso folgt im Falle II. aus $-t_1 = 0$, dass $b_r = -a_n$ sein muss.

Hiernach lauten jetzt für genügend grosses n unsere Kettenbrüche (30), bezgl. (30_a):

Fall I: (30) $\qquad x_0' = (b_0\,, b_1\,, \ldots, b_{r-1}\,, a_n\,, x_0)$,

Fall II: (30_a) $\qquad x_0' = (b_0\,, b_1\,, \ldots, b_{r-1}\,, -a_n\,, -x_0)$.

Wenn nun x_0 weder auf einem der Bogen $B_{1\pm i}\,, B_{-1\pm i}$, noch auf einer der Geraden $x \pm y = \pm 1$ liegt, so stellt (30) bezgl. (30_a) die Entwicklung erster Art von x_0' dar, nach Satz III., I. Abschnitt, § 4, dessen Voraussetzungen sämmtlich erfüllt werden.

Da wir durch Elimination von x_0 zwischen der von den beiden Gleichungen (30) und (30_a) vorliegenden und der Gleichung (19) auf die Äquivalenzbeziehung zwischen x_0 und x_0' (Gleichung 21) zurückgeführt werden müssen, so ist Satz II. für diesen Fall vollständig bewiesen.

Hieraus schliessen wir für die weitere Betrachtung, dass wenn x_0' und x_0 äquivalent sind, diese Grössen entweder beide B- oder G-Entwicklungen sein müssen, oder beide nicht. In der That, wäre eine der Grössen, etwa x_0, keine B- oder G-Entwicklung, so würde aus dem bisher Bewiesenen folgen, dass $\pm x_0$ ein Rest der Entwicklung erster Art von x_0' sein müsste, was nicht möglich ist, wenn x_0' eine B- oder G-Entwicklung ist.

Wir haben hiernach die Gleichungen (30) bezgl. (30_a) nur noch für den Fall zu untersuchen, wo x_0' und x_0 B- bezgl. G-Entwicklungen sind. Wir können ferner annehmen, dass beide Grössen auf den Bogen $B_{1\pm i}\,, B_{-1\pm i}$ liegen, da wir andernfalls die Betrachtung an die nächstfolgenden Reste x_1' bezgl. x_1 anknüpfen können.

Wir wollen nun den restlichen Nachweis für unsern Satz II. auf die Gleichung (30) beschränken, da im Falle II. (30_a) die ganz analogen Überlegungen zum Ziele führen.

Da x_0' auf einem der Bogen $B_{1\pm i}, B_{-1\pm i}$ liegt, so können wir durch genügend grosse Wahl von n erreichen, dass der erste Teilnenner der Entwicklung von $\frac{p}{q} = (b_0\,, b_1\,, \ldots, b_r)$ mit dem ersten Teilnenner a_0' der Entwicklung von x_0' übereinstimmt.

Um dies zu zeigen, bilden wir:

$$x_0' - \frac{p}{q} = \frac{p(x_0+t) - p''}{q(x_0+t) - q''} - \frac{p}{q} = \frac{-1}{q^2\left(x_0 + t - \frac{q''}{q}\right)}.$$

Da $q = \gamma p_n - \delta q_n$ und $p_n = x_0 q_n - \frac{\theta_n}{q_n}$ ist, so folgt:

$$q = q_n(\gamma x_0 - \delta) - \gamma \frac{\theta_n}{q_n}$$

und hieraus, da $\left|\frac{\theta_n}{q_n}\right| < 1$ ist (Siehe S. 249):

$$|q| > |q_n| |\gamma x_0 - \delta| - |\gamma|.$$

Diese Ungleichung zeigt, dass $|q|$ mit n über alle Grenzen wächst. Da nun $\left|\frac{q''}{q}\right|$ stets < 1 ist und $|x_0 + t|$ für genügend grosses n unterhalb einer festen Zahl bleibt, so sehen wir, dass der Punkt $\frac{p}{q}$ mit wachsendem n, so nahe an den Punkt x_0' heranrückt, wie wir wollen. Wir können es also erreichen, dass $b_0 = a_0'$ wird.

Nehmen wir n entsprechend gross gewählt an, so lautet die Gleichung (30) in unserm Falle:

$$x_0' = (a_0', b_1, b_2, \ldots, b_{r-1}, a_n, x_0),$$

wo x_0 auf einem der Bogen B_{1+i}, B_{-1+i} liegt; oder wenn wir noch $x_n = (a_n, x_0)$ einführen:

$$x_0' = (a_0', b_1, b_2, \ldots, b_{r-1}, x_n),$$

wo x_n nun auf einer der Geraden $x \pm y = \pm 1$ liegt.

Zum Beweise, dass diese Gleichung die Entwicklung erster Art von x_0' darstellt, zerlegen wir sie in die Kette von Gleichungen:

$$x_0' = a_0' - \frac{1}{y_1}, \qquad y_1 = b_1 - \frac{1}{y_2}, \quad \ldots, \quad y_{r-1} = b_{r-1} - \frac{1}{x_n}.$$

Da x_n auf eine der Geraden $x \pm y = \pm 1$ fällt, so fällt $-\frac{1}{x_n}$ ins Innere des Quadrates 0, folglich gehört y_{r-1} zweifellos dem Raume R an, wenn $b_{r-1} \neq 1 \pm i$, $-1 \pm i$ ist. Ist aber b_{r-1} etwa $= 1 + i$, so gehört $b_r = a_n$ nicht den Typen (2), $(1 - i)$, $(-2i)$ an, folglich liegt $-\frac{1}{x_n}$ nicht in dem von B^0_{-1-i} und Seite $\overline{-1, -i}$ begrenzten Teile des Quadrats 0 und daher gehört y_{r-1} auch in diesem Falle dem Raume R an.

Da x_n und y_{r-1} dem Raume R angehören, so folgt nach Satz II. a), I. Abschnitt § 4, dass auch $y_{r-2}, \ldots, y_2, y_1$ dem Raume R angehören. Hieraus folgt, dass $-\frac{1}{y_1}, -\frac{1}{y_2}, \ldots, -\frac{1}{y_{r-2}}$ ins Innere oder auf die Seiten des Quadrates o fallen.

Da $x'_0 = a'_0 - \frac{1}{y_1} = a'_0 - \frac{1}{x'_1}$, so haben wir:

$$y_1 = x'_1,$$

daher:

$$b_1 - \frac{1}{y_2} = a'_1 - \frac{1}{x'_2}$$

und folglich:

$$\frac{1}{x'_2} - \frac{1}{y_2} = a'_1 - b_1 = g,$$

wo g eine complexe durch $1+i$ teilbare ganze Zahl bedeutet. Diese Zahl g kann nur null sein. In der That, da $\frac{1}{x'_2}$ und $\frac{1}{y_2}$ dem Quadrate o angehören, so kann g nur entweder o oder eine der Zahlen $1 \pm i$, $-1 \pm i$ sein. Da aber $\frac{1}{x'_2}$ auf einer Seite des Quadrates o liegt, so kann g nur dann einen der letzten vier Werthe erhalten, wenn $\frac{1}{x'_2}$ und $-\frac{1}{y_2}$ auf derselben Seite des Quadrats o liegen. Angenommen $\frac{1}{x'_2}$ und $-\frac{1}{y_2}$ lägen auf Seite $\overline{1, +i}$, so wäre g null oder $1+i$; wenn nun $g = 1+i$ wäre, so hätte man x'_2 auf B_{1-i}, x'_1 auf $x + y = -1$, also $a'_2 = 1 - i$ und $a'_1 = k(1-i)$, $a'_0 = -1 + i$. Ferner $a'_1 - b_1 = k(1-i) - b_1 = 1 + i$, daher $b_1 = k(1-i) - (1+i)$ zu den Typen (-2), $(-1-i)$, $(-2i)$ gehörig, was nicht möglich ist, weil $(a'_0, b_1) = (-1+i, b_1)$ das Folgegesetz (B) erfüllen. Es kann demnach g nur null sein. Hieraus folgt $b_1 = a'_1$, $y_2 = x'_2$. Das gleiche Resultat ergiebt sich, wenn $\frac{1}{x'_2}$ und $-\frac{1}{y_2}$ auf einer andern Seite des Quadrats o angenommen werden.

In analoger Weise weiter schliessend, ergiebt sich:

$$b_2 = a'_2, \qquad b_3 = a'_3, \ \ldots, \ b_{r-1} = a'_{r-1}, \qquad x_n = x'_r$$

und daher ist die Entwicklung $(b_0, b_1, \ldots, b_{r-1} x_n)$ identisch mit $(a'_0, a'_1, \ldots, a'_{r-1} x'_r)$. Hiermit ist nun unser Satz II. vollständig bewiesen.

Um die im Anfang dieses Paragraphen aus den Sätzen I. und II. gezogene Folgerung IV. noch prägnanter aussprechen zu können, wollen wir noch eine Bezeichnung einführen.

Wenn $(x_0 y_0)$, $(x_1 y_1)$, ..., $(x_n y_n)$ die Wurzelpaare sind, welche eine Periode reducirter Formen der Determinante D constituiren, so wollen wir die den Paaren $(-x_0, -y_0)$, $(-x_1, -y_1)$, ..., $(-x_n, -y_n)$ entsprechende Formenperiode als die zu der ersteren *äquivalente* Periode bezeichnen. Dann können wir sagen:

Reducirte Formen gleicher Determinante sind dann und nur dann vollständig äquivalent, wenn sie derselben Formenperiode oder äquivalenten Formenperioden angehören.

Mit diesem Satze ist das in der Einleitung des II^ten^ Abschnittes bezeichnete erste Problem gelöst.

Sind irgend zwei Formen, gleicher Determinante, f und f' gegeben, so haben wir die ersten Wurzeln der Formen:

$$\begin{array}{lcccc} & f & f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} & f', \\ \text{welche mit:} & \overline{} & \overline{} & \overline{} & \overline{} \\ & x_0 & x^{(1)} & x^{(2)} & x' \end{array}$$

bezeichnet werden mögen, in Kettenbrüche erster Art zu entwickeln. Führt eine der Entwicklungen von x_0, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ auf die gleiche oder äquivalente Formenperiode, wie die Entwicklung von x', so sind die Formen f und f' im gewöhnlichen Sinne äquivalent.

§ 5. *Erledigung des zweiten Problems.*

Es seien f und f' zwei im gewöhnlichen Sinne äquivalente Formen, so dass also eine der Formen f, $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, die wir mit f_i bezeichnen wollen, der Form f' vollständig äquivalent ist. Durch das Re-

ductions-Verfahren wurden wir auf zwei entweder gleiche oder äquivalente Perioden von reducirten Formen geführt. Ist f_0 eine Form der einen Periode, so giebt es in der andern Periode jedenfalls eine Form f'_0 derart, dass eine der beiden Gleichungen:

$$f_0 = f'_0$$

$$f_0 = f'_0\begin{pmatrix} +i & 0 \\ 0 & +i \end{pmatrix}$$

zutrifft. Sind nun S und S' die Substitutionen, welche f_i bezgl. f' in die ihnen äquivalenten reducirten Formen f_0 bezgl. f'_0 überführen, so ist entweder:

$$f_i S = f' S', \quad \text{und folglich:} \quad f_i S S'^{-1} = f'$$

oder:

$$f_i S = f' S'\begin{pmatrix} \pm i & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix}, \quad \text{und folglich:} \quad f_i S\begin{pmatrix} \mp i & 0 \\ 0 & \mp i \end{pmatrix} S'^{-1} = f'.$$

Das Reductionsverfahren liefert uns also eine bestimmte Substitution, durch welche die Form f in die Form f' übergeht. Durch Zusammensetzung dieser Substitution mit allen denjenigen Substitutionen, welche f in sich selbst transformiren, erhält man dann alle Substitutionen, welche f in f' überführen. Die Substitutionen, welche f in sich transformiren, kann man bekanntlich aufstellen, wenn man alle Substitutionen ermittelt hat, welche eine zu f äquivalente reducirte Form f_0 in sich überführen. Es bleibt also die Aufgabe zu lösen, alle Substitutionen zu finden, die eine gegebene reducirte Form f_0 in sich transformiren, und diese Aufgabe ist gleichbedeutend mit der andern, alle vollständigen Äquivalenzbeziehungen

(31) $$x_0 = \frac{\alpha x_0 - \beta}{\gamma x_0 - \delta}$$

zu ermitteln, wenn x_0 die erste Wurzel der Form f_0 bezeichnet. Diese Beziehungen liefert uns die Kettenbruch-Entwicklung 1[ter] Art von x_0, denn richten wir die unendlich vielen aus ihr gebildeten Kettenbrüche:

(32) $$x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_0) = (a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0, a_1, \ldots, a_n, x_0) = \ldots$$

$$= \frac{p_i x_0 - p_{i-1}}{q_i x_0 - q_{i-1}} \qquad (i = n, 2n, 3n, \ldots)$$

ein, so erhalten wir unendlich viele Gleichungen der verlangten Art. Nehmen wir zu den so gefundenen Substitutionen: $\begin{pmatrix} p_i & p_{i-1} \\ q_i & q_{i-1} \end{pmatrix}$ noch alle Substitutionen $\begin{pmatrix} -p_i & -p_{i-1} \\ -q_i & -q_{i-1} \end{pmatrix}$ hinzu, so haben wir alle Substitutionen, welche f_0 in sich überführen, da nach Satz II. im vorigen Paragraphen, sich jede vollständige Äquivalenzbeziehung (31) durch Einrichtung des Kettenbruches (32) ergeben muss.

Ganz analog, wie im reellen Gebiete, correspondiren den Substitutionen, welche f_0 in sich überführen, die Lösungen t, u der Pellschen Gleichung $t^2 - Du^2 = \sigma^2$, wo $D = b^2 - ac$ die Determinante der Form, und σ den Teiler der Form, d. h. eine der vier associirten Zahlen bedeutet,[1] welche den grössten gemeinsamen Divisor der complexen ganzen Zahlen a, $2b$, c charakterisiren.

Basel im Juli 1899.

ON THE FOUR ROTATIONS WHICH DISPLACE ONE ORTHOGONAL SYSTEM OF AXES INTO ANOTHER

BY

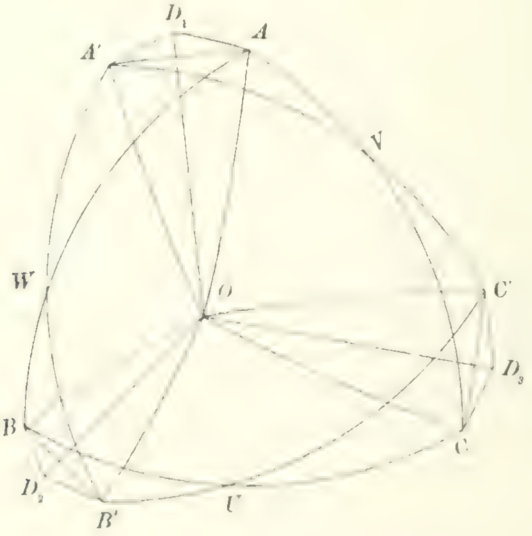
W. BURNSIDE
of GREENWICH.

This question has been treated by Herr LIPSCHITZ in a very elegant analytical manner in the first three sections of a memoir in the Acta mathematica (Vol. 24, p. 123). It is the object of the following short note to shew that the question is susceptible of a simple kinematical treatment which brings out, even more clearly perhaps than an algebraical process, the essential space-relations of the configuration involved.

The one kinematical theorem of which repeated use is made, — namely that successive rotations about three radii of a sphere through twice the angles of the corresponding spherical triangle produce no displacement at all — is due originally, I believe, to HAMILTON (*Lectures on Quaternions*, p. 267). It is equivalent to a construction for the resultant of any two rotations about intersecting axes. Moreover from the theorem itself the converse — if successive rotations about two radii OP, OQ of a sphere have OR for the axis of their resultant, then the amplitudes of the two rotations are $2RPQ$ and $2PQR$ (mod 2π) — immediately follows. It may be noted that HAMILTON's theorem is established almost intuitively by drawing Op, Oq, Or perpendicular to the planes QOR, ROP, POQ. For successive rotations through two right angles about Oq and Or is the same as a rotation round OP through $2RPQ$. Hence successive rotations through $2RPQ$, $2PQR$, $2QRP$ about OP, OQ, OR are equivalent to successive rotations through two right angles about Oq, Or, Or, Op, Op, Oq, which clearly give no displacement.

I denote the two systems of orthogonal lines by $AO\bar{A}$, $BO\bar{B}$, $CO\bar{C}$ and $A'O\bar{A}'$, $B'O\bar{B}'$, $C'O\bar{C}'$, and I suppose that a rotation through an angle α in an assigned sense round an axis OD brings the first set to coincidence with the second. Then the resultants of rotations (i) α round OD and π round OA'; (ii) α round OD and π round OB'; (iii) α round OD and π round OC', each bring the first system to coincide with the second. Moreover if R is any rotation that has this effect; then the resultant of R reversed and α round OD brings the second system to coincide with itself. Hence the four rotations specified are the only ones which produce the required displacement.

If the rotation α round OD brings OA, OB, OC to coincidence with OA', OB', OC', then the remaining three rotations in order bring OA, OB, OC to coincidence with (i) OA', $O\bar{B}'$, $O\bar{C}'$, (ii) $O\bar{A}'$, OB', $O\bar{C}'$, and (iii) $O\bar{A}'$, $O\bar{B}'$, OC'.



Let $OA, \ldots, OA', \ldots$, meet a unit sphere centre O in A, B, C, A', B', C'. Join AA', BB' and CC', and bisect the first two arcs at right angles by D_1D and D_2D. The spherical triangles ADB, $A'DB'$ are equal in all respects, and therefore the angles AOA' and BOB' are equal. Hence a rotation round OD through ADA' [1] brings OA and OB to coincidence

[1] The sense of the rotation will be thus denoted; ADA' and $A'DA$ representing equal and opposite rotations.

with OA' and OB'; and therefore necessarily OC to coincidence with OC'. Hence D_3D bisecting CC' at rigth angles passes through D.

Draw AD_1, $A'D_1$ perpendicular respectively to DA and DA'; and similarly BD_2, $B'D_2$, CD_3, $C'D_3$ perpendicular to DB, DB', DC, DC'. Then by Hamilton's theorem a rotation ADA' round OD followed by a rotation π round OA' has for resultant AD_1A' round D_1. Hence OD, OD_1, OD_2, OD_3 are the axes of the four required rotations and ADA', AD_1A', BD_2B', CD_3C' are the corresponding amplitudes.

Let U be the point of intersection of BC and $B'C'$. Then a rotation BUB' round OU followed by a rotation round A' through the difference of BU and $B'U$ brings OA, OB, OC to coincidence with OA', OB', OC'; and is therefore equivalent to a rotation ADA' round D. Hence by the converse of Hamilton's theorem the angle $A'UD$ is one half of BUB', and the angle $A'DU$ is the supplement of one half of ADA'. It follows that D_1D passes through U. Again it is evident from the figure that a rotation BUC' round OU followed by a rotation $BU + UB'$ round OA' brings OA, OB, OC to coincidence with OA', OB', $\overline{OC}'$; and is therefore equivalent to a rotation BD_2B' round D_2. Hence by the converse of Hamilton's theorem the angle D_2UA' is one half of BUC'. Therefore D_2U bisects BUB'; and similary D_3U bisects CUC', so that D_2D_3 passes through U. Moreover since $A'UD$ is half BUB', while $A'UB'$ is a right angle, it follows that DU and D_2U are at right angles. Hence DD_1 and D_2D_3 meet at right angles in U: and similarly DD_2, D_1D_3 meet at right angles in V, and DD_3, D_1D_2 in W. The axes of the four rotations must therefore be such that the planes through any two pairs, into which they may be divided, are at right angles. The well known trigonometrical conditions for this, which may be derived directly from the figure, are

$$\cos DD_1 \cos D_2D_3 = \cos DD_2 \cos D_3D_1 = \cos DD_3 \cos D_1D_2.$$

Further it follows at once from the figure that when D, D_1, D_2, D_3 are given in position on the sphere, subject to these conditions, the corresponding angles of rotation are uniquely determinate. Thus since the two triangles D_2DD_3, BDC have the same angle at D, while BC is a quadrant,

$$\cos D_2D_3 = \cos DD_2 \cos DD_3 - \sin DD_2 \sin DD_3 \cot DB \cot DC.$$

But if α is the angle of rotation round OD, so that

$$BDD_2 = CDD_3 = \frac{\alpha}{2},$$

then

$$\cot DB = \cot DD_2 \sec\frac{\alpha}{2},$$

and

$$\cot DC = \cot DD_3 \sec\frac{\alpha}{2}.$$

Hence

$$\cos D_2D_3 = -\tan^2\frac{\alpha}{2}\cos DD_2 \cos DD_3;$$

or

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = -\frac{\cos D_2D_3}{\cos DD_2 \cos DD_3},$$

which in virtue of the relations connecting the arcs is unaltered by any permutation of the suffixes 1, 2, 3. Similarly if $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ are the angles of rotation about the other three axes,

$$\tan^2\frac{\alpha_1}{2} = -\frac{\cos D_2D_3}{\cos D_1D_2 \cos D_1D_3},$$

$$\tan^2\frac{\alpha_2}{2} = -\frac{\cos DD_1}{\cos D_2D . \cos D_2D_1},$$

$$\tan^2\frac{\alpha_3}{2} = -\frac{\cos DD_1}{\cos D_3D . \cos D_3D_1}.$$

The angles $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ are therefore either all real or all imaginary. When the four points D, D_1, D_2, D_3 are given on the sphere, subject to the two conditions,

$$\cos DD_1 \cos D_2D_3 = \cos DD_2 \cos D_3D_1 = \cos DD_3 \cos D_1D_2,$$

the necessary and sufficient conditions that the α's should be real is clearly that either just three or all six of the arcs $DD_1, \ldots,$ should lie between $\frac{\pi}{2}$ and $\frac{3\pi}{2}$. When this condition is satisfied the angle α is (mod 2π)

uniquely determined, and the positions of A, B, C, A', B', C' are obtained by drawing $DA, DA', \ldots$, making angles $\frac{\alpha}{2}$ with $DD_1, \ldots$, and drawing perpendiculars to them from $D_1, \ldots$.

Lastly from the previous equations, the further system

$$\cos^2 DD_1 = \cot^2 \frac{\alpha}{2} \cot^2 \frac{\alpha_1}{2}, \ldots,$$

$$\cos^2 D_2 D_3 = \cot^2 \frac{\alpha_2}{2} \cot^2 \frac{\alpha_3}{2}, \ldots,$$

may be immediately deduced. Hence when the amplitudes of the rotations are given (subject for real displacements to certain obvious inequalities) the relative position of the four axes is determinate.

SUR LE DEGRÉ DE GÉNÉRALITÉ D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL QUELCONQUE

PAR

CH. RIQUIER

à CAEN.

Introduction.

Etant donné un système différentiel complètement intégrable, on peut, comme j'ai eu occasion de l'établir,[1] fixer, par la seule considération de ses premiers membres, l'économie des conditions initiales qui déterminent entièrement un groupe d'intégrales ordinaires du système, et mettre en évidence les fonctions (ou constantes) arbitraires, en nombre fini, dont dépend la solution générale. Cela étant, nommons *genre* d'une fonction arbitraire le nombre de ses variables, désignons par λ le genre maximum des arbitraires ci-dessus spécifiées, et appelons μ le nombre des arbitraires qui, parmi elles, sont de genre λ. On voit immédiatement que le nombre des arbitraires restantes peut être augmenté au delà de toute limite: si l'on désigne en effet par n un entier positif aussi grand qu'on le voudra, et par x_0 une valeur initiale de x choisie comme on voudra, toute fonction arbitraire, $\Phi(x, y, z, \ldots, t)$, des p variables $x, y, z, \ldots, t$ peut être mise sous la forme

$$\psi_0(y, z, \ldots, t) + (x - x_0)\psi_1(y, z, \ldots, t) + (x - x_0)^2\psi_2(y, z, \ldots, t) + \ldots \\ + (x - x_0)^{n-1}\psi_{n-1}(y, z, \ldots, t) + (x - x_0)^n \Psi(x, y, z, \ldots, t),$$

[1] Voir les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (31 mai 1898), et les Acta mathematica (t. 23, p. 215 et suiv.).

où figurent, avec une arbitraire de genre p,

$$(1) \qquad \Psi(x, y, z, \ldots, t)$$

n arbitraires de genre $p-1$,

$$(2) \qquad \psi_0(y, z, \ldots, t), \ \psi_1(y, z, \ldots, t), \ \psi_2(y, z, \ldots, t), \ \ldots, \ \psi_{n-1}(y, z, \ldots, t);$$

en conséquence, la donnée de la fonction arbitraire $\Phi(x, y, z, \ldots, t)$ équivaut visiblement à celle des fonctions arbitraires (1) et (2).

Considérons maintenant un système différentiel quelconque, supposons-le réduit, de diverses manières, à une forme complètement intégrable, et comparons, dans ces diverses formes, le nombre et la nature des éléments arbitraires que l'économie des conditions initiales met en évidence: il est clair, d'après ce qui précède, que les résultats intéressants d'une semblable comparaison ne peuvent se rapporter qu'aux valeurs prises, dans les formes considérées, par les entiers λ et μ. Cela étant, je me suis proposé de rechercher s'il y avait effectivement sur ce point quelque loi générale, et cette étude m'a conduit à diverses propositions qui m'ont semblé utiles à connaître. L'une d'elles, notablement supérieure aux autres en importance, a été, il y a quelques mois, communiquée à l'Académie des Sciences;[1] elle peut se formuler à peu près comme il suit:

Considérons d'abord deux systèmes complètement intégrables, S', S'', désignons par λ', μ' et λ'', μ'' les valeurs de λ, μ qui s'y rapportent respectivement, et convenons de dire que les formes complètement intégrables S', S'' ont un *degré de généralité égal*, si les deux différences $\lambda'-\lambda''$, $\mu'-\mu''$ s'annulent à la fois; convenons de dire, dans le cas contraire, que la forme S' a un *degré de généralité supérieur* ou *inférieur* à celui de S'', suivant que, parmi ces deux différences, la première qui ne s'annule pas est positive ou négative. Cela posé, et un système différentiel (compatible) étant donné, si l'on envisage dans leur ensemble toutes les formes complètement intégrables que ce système est susceptible de prendre, certaines d'entre elles, dites *monoïques*,[2] qui semblent en constituer l'immense majorité, pré-

[1] Comptes-Rendus du 22 janvier 1900.

[2] Dans la communication que j'ai faite à ce sujet à l'Académie des Sciences, j'avais employé, pour désigner les formes en question, le mot *isonome*, auquel j'ai cru devoir renoncer pour adopter le mot *monoïque*.

sentent un degré de généralité constant, qui se trouve être, de plus, supérieur ou égal à celui de toute autre.

Cette propriété, qui pourrait fournir une définition du degré de généralité de tout système différentiel compatible, se trouve, ainsi que les divers résultats de nature analogue auxquels j'ai pu parvenir, exposée en détail dans le présent Mémoire: le lecteur pourra constater que la considération des *cotes*, à laquelle je suis redevable de tous mes résultats antérieurs, m'a été, ici encore, d'une utilité capitale.[1]

PREMIÈRE PARTIE.

Systèmes différentiels explicites, arithmoïques, monoïques.

1. Je dirai qu'un système différentiel est *limité* ou *illimité*, suivant qu'il se compose d'un nombre limité ou illimité d'équations, et je supposerai expressément, comme je l'ai fait dans mes travaux antérieurs, que tout système différentiel directement donné est limité: c'est toujours, en effet, à de pareils systèmes que conduit la mise en équations des problèmes de mathématiques appliquées.

Etant donné un système différentiel (limité) impliquant les fonctions inconnues $u, v, \ldots$ des variables indépendantes $x, y, \ldots$, nous nommerons *groupe d'intégrales* du système un groupe de fonctions,

$$U(x, y, \ldots), \ V(x, y, \ldots), \ \ldots,$$

développables dans quelque domaine par la série de Taylor, et qui, substituées à $u, v, \ldots$, transforment en identités les diverses équations proposées; souvent aussi, nous nommerons *solution analytique* du système un pareil groupe de fonctions. Les intégrales seront dites *ordinaires*, s'il existe quelque domaine tel, que non seulement les intégrales dont il s'agit y soient développables par la série de Taylor, mais que de plus leurs va-

[1] Voir le n° 10 du présent Mémoire.

leurs, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes, restent toujours intérieures à quelque domaine où les premiers et les seconds membres du système donné soient à la fois développables.

Nous nous bornerons ici à la considération exclusive des solutions analytiques ordinaires, et nous dirons qu'un système différentiel (limité) est *analytiquement possible* ou *impossible*, suivant qu'il admet ou non quelque solution de cette espèce.

Etant donnés deux systèmes différentiels (limités), si toute solution analytique ordinaire du premier est en même temps une solution analytique ordinaire du second, nous dirons que le second est une *conséquence analytique* du premier; si chacun d'eux est une conséquence analytique de l'autre, les systèmes seront dits *analytiquement équivalents.*

2. La substitution d'intégrales ordinaires connues dans les équations d'un système (limité) donné en transforme les premiers et les seconds membres en des fonctions composées des variables, des intégrales et de quelques-unes de leurs dérivées. D'après la définition même des intégrales ordinaires, et entre les limites assignées par cette définition, les règles établies pour les fonctions composées sont applicables aux premiers et aux seconds membres dont il s'agit; d'ailleurs, les deux membres de chaque équation étant identiquement égaux après cette substitution, leurs dérivées semblables le sont aussi, et l'on peut, en conséquence, différentier indéfiniment les relations du système. Les relations ainsi obtenues peuvent ensuite être combinées de mille manières entre elles et avec les proposées, puis les résultats de ces combinaisons être différentiés à leur tour, et fournir les éléments de nouvelles combinaisons qui seront elles-mêmes différentiées; et ainsi de suite indéfiniment. On peut, en un mot, déduire du système donné une foule de relations dont chacune est identiquement satisfaite par la substitution aux inconnues $u, v, \dots$ d'un groupe quelconque d'intégrales ordinaires.

3. Si aux équations qui composent un système (limité) donné Σ on adjoint toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations, le groupe illimité résultant de cette adjonction s'appellera le *système Σ prolongé.*

D'après ce qui vient d'être dit (2), un groupe quelconque d'intégrales ordinaires du système Σ satisfait identiquement à toutes les relations du système Σ prolongé: dès lors, si l'on convient de considérer pour un instant les variables $x, y, \ldots$, les fonctions inconnues $u, v, \ldots$ et leurs dérivées de tous ordres comme autant de variables indépendantes distinctes, le système Σ prolongé ne peut manquer d'être *numériquement* vérifié par des valeurs particulières quelconques, $x_0, y_0, \ldots$, de $x, y, \ldots$, prises conjointement avec les valeurs correspondantes des intégrales considérées et de leurs dérivées de tous ordres (cela, bien entendu, dans les limites assignées par la définition même des intégrales ordinaires).

Inversement, supposons que, dans un domaine où les premiers et les seconds membres de Σ soient à la fois développables, le système Σ prolongé admette quelque solution *numérique;* supposons en outre que, en désignant par $x_0, y_0, \ldots$ les valeurs numériques de $x, y, \ldots$, les développements, entiers en $x - x_0, y - y_0, \ldots$, qui ont pour coefficients, aux facteurs numériques connus près, les valeurs numériques de $u, v, \ldots$ et de leurs dérivées de tous ordres, soient *convergents.* Cela étant, *les sommes des développements dont il s'agit constituent un groupe d'intégrales ordinaires du système* Σ.

Désignons en effet par $U, V, \ldots$ les sommes de ces développements, et considérons un domaine $\mathfrak{D}$ des valeurs $x_0, y_0, \ldots$, dont les rayons soient suffisamment petits pour que les fonctions de $x, y, \ldots$ en lesquelles se transforment, par la substitution de $U, V, \ldots$ à $u, v, \ldots$, les deux membres des diverses équations Σ, soient toutes développables dans le domaine dont il s'agit. Par la manière même dont les développements $U, V, \ldots$ ont été construits, les valeurs initiales de $x, y, \ldots$, de $U, V, \ldots$ et de leurs dérivées de tous ordres constituent la solution numérique dont l'existence a été supposée dans le système Σ prolongé. Donc les fonctions de $x, y, \ldots$ qui, après la substitution, figurent dans les deux membres d'une équation quelconque du système Σ, sont égales, ainsi que leurs dérivées semblables de tous ordres, pour

$$x - x_0 = y - y_0 = \ldots = 0,$$

et par suite sont identiquement égales entre elles dans toute l'étendue du domaine $\mathfrak{D}$.

4. Le théorème précédent montre quel intérêt il peut y avoir, étant donné un système différentiel limité, à considérer, au point de vue des solutions numériques, tel ou tel des systèmes illimités qui s'en déduisent. Il convient de poser à cet égard quelques définitions.

Considérons d'abord un système différentiel, limité ou illimité, composé de relations ayant toutes la forme entière par rapport aux dérivées d'ordre suffisamment grand des inconnues;[1] assimilons-y pour un instant les variables $x, y, \ldots$, les inconnues $u, v, \ldots$ et leurs dérivées de tous ordres à autant de variables indépendantes distinctes, et convenons expressément de ne considérer, parmi les solutions numériques d'un pareil système, que celles qui tombent dans quelque domaine où les premiers et les seconds membres soient à la fois développables: cela étant, nous dirons que le système est *numériquement possible* ou *impossible*, suivant qu'il admet ou non quelque solution de cette espèce.

Considérons maintenant, sous le bénéfice des mêmes restrictions, non plus un, mais deux systèmes différentiels, limités ou illimités: si toute solution numérique du premier est en même temps une solution numérique du second, nous dirons que le second est une *conséquence numérique* du premier; et si chacun d'eux est une conséquence numérique de l'autre, les systèmes seront dits *numériquement équivalents.*[2]

5. Etant donné un système limité S, résolu par rapport à certaines des fonctions inconnues ou de leurs dérivées, nous dirons qu'une quantité quelconque, prise dans l'ensemble illimité que forment les inconnues et leurs dérivées de tous ordres, est, par rapport au système considéré S, *principale* ou *paramétrique*, suivant qu'elle coïncide ou non, soit avec quelqu'un des premiers membres, soit avec quelqu'une de leurs dérivées: il est clair, d'après cela, que toute quantité principale figure au moins une fois (souvent même plusieurs) dans les premiers membres du système S prolongé, tandis que les quantités paramétriques n'y figurent jamais.

[1] Cette condition se trouve remplie d'elle même dans un système limité.

[2] La substitution des expressions *conséquence numérique, équivalence numérique*, etc., aux expressions généralement usitées, *conséquence algébrique, équivalence algébrique*, etc., me semble présenter, entre autres avantages, celui d'éviter toute équivoque sur la signification du mot *algèbre*.

Cela étant, supposons que les seconds membres du système considéré S, tous développables à l'intérieur d'un même domaine, ne contiennent *effectivement* aucune quantité principale; supposons en outre (circonstance qui est loin de se réaliser toujours) que du système S prolongé on puisse déduire un autre système, numériquement équivalent, fournissant, pour chacune des quantités principales du système S, une ou plusieurs expressions indépendantes de toute quantité principale:[1] nous dirons, en pareil cas, que le système différentiel donné S est *explicite*; les relations du système S prolongé et celles du système numériquement équivalent qu'on en peut déduire se nommeront respectivement *relations primitives* et *relations ultimes* du système S; enfin les expressions respectivement fournies par ces deux sortes de relations pour les diverses quantités principales seront affectées des deux mêmes qualifications.

6. *Quand un système explicite possède quelque groupe d'intégrales ordinaires, les développements de ces intégrales par la série de Taylor, à partir des valeurs particulières* $x_0, y_0, \ldots$ *des variables indépendantes* $x, y, \ldots$, *peuvent être reconstruits, dès que l'on connaît seulement les valeurs initiales de toutes les quantités paramétriques.* (On suppose, bien entendu, que les valeurs $x_0, y_0, \ldots$ n'excèdent pas les limites indiquées par la définition même des intégrales ordinaires.)

Effectivement, si l'on donne aux variables $x, y, \ldots$ leurs valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$, les intégrales dont il s'agit et leurs dérivées de tous ordres prennent, elles aussi, leurs valeurs initiales; comme celles des diverses quantités paramétriques sont supposées connues, l'hypothèse numérique

$$x - x_0 = y - y_0 = \ldots = 0$$

transforme les seconds membres des relations ultimes en des quantités connues, et fait connaître, par suite, les valeurs initiales de leurs premiers membres, c'est à dire de toutes les quantités principales.

On connaît donc ainsi les valeurs initiales des intégrales considérées et de toutes leurs dérivées sans distinction: or, ces valeurs initiales ne sont autres, aux facteurs numériques connus près, que les coefficients des développements cherchés.

[1] Il va sans dire que ce système équivalent est supposé ne fournir, pour chacune des quantités principales, qu'un nombre limité de semblables expressions.

7. Des intégrales ordinaires quelconques d'un système explicite étant supposées développées par la série de TAYLOR à partir de valeurs initiales quelconques, $x_0, y_0, \ldots$, des variables indépendantes $x, y, \ldots$, les portions de ces développements formées par l'ensemble des termes qui, aux facteurs numériques connus près, ont pour coefficients les valeurs initiales des quantités paramétriques, se nommeront les *déterminations initiales*, relatives à $x_0, y_0, \ldots$, des intégrales dont il s'agit.

Cela posé, le théorème du numéro précédent peut encore s'exprimer comme il suit:

Quand un système explicite possède quelque groupe d'intégrales ordinaires, les développements de ces intégrales par la série de Taylor peuvent être reconstruits, dès que l'on connaît seulement leurs déterminations initiales.

On peut d'ailleurs, comme je l'ai établi, [1] fixer à l'aide des considérations les plus élémentaires l'économie des fonctions (ou constantes), en nombre fini, dont la connaissance équivaut à celle des déterminations initiales.

8. *Inversement, cherchons si, dans un système explicite, il existe quelque groupe d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données.* (On suppose, bien entendu, que les valeurs initiales des variables, prises conjointement avec celles des quantités paramétriques figurant dans les seconds membres du système donné, sont intérieures à un domaine où ces derniers soient développables.)

I. *Pour qu'un pareil groupe existe, il est tout d'abord nécessaire que les relations ultimes s'accordent à fournir, pour chacune des quantités principales, une seule et même valeur initiale.*

II. *Cette concordance numérique étant supposée avoir lieu, la convergence des développements des intégrales hypothétiques correspondant aux données initiales choisies est encore une condition nécessaire à l'existence effective de ces intégrales.*

Il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter à la définition même des intégrales analytiques (1).

[1] Voir les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (31 mai 1898), et les Acta mathematica (t. 23, p. 215 et suiv.).

III. *Si, pour un choix déterminé des conditions initiales, les relations ultimes s'accordent numériquement, et qu'en outre les développements des intégrales hypothétiques soient convergents, leurs sommes constituent des intégrales ordinaires du système explicite donné.*

Car les valeurs initiales (données) de $x, y, \ldots$ et des quantités paramétriques, et les valeurs initiales (calculées à l'aide des relations ultimes) des quantités principales, constituent pour les relations ultimes, et par suite pour les relations primitives, dont l'ensemble n'est autre chose que le système explicite prolongé, une solution numérique donnant lieu à des développements convergents (3).

IV. *Il ne peut y avoir enfin plus d'un groupe d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données.*

Car chaque relation ultime, étant du premier degré par rapport à la quantité principale qui figure dans son premier membre, ne fournit pour cette dernière qu'une seule valeur initiale.

9. Nous dirons qu'un système explicite est *passif*, si la concordance numérique des relations ultimes a lieu pour tout système de valeurs attribuées à $x, y, \ldots$ et aux quantités paramétriques, ou, ce qui revient au même, si, en considérant pour un instant $x, y, \ldots$ et les quantités paramétriques comme autant de variables indépendantes distinctes, les diverses expressions ultimes d'une même quantité principale quelconque sont toutes identiquement égales entre elles.

Dans un système explicite, nous nommerons *conditions brutes de passivité* l'ensemble de toutes les relations obtenues en égalant entre elles les diverses expressions ultimes d'une même quantité principale quelconque: pour que le système soit passif, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que toutes les relations dont il s'agit se réduisent à des identités. Il arrive fréquemment d'ailleurs, comme nous le verrons plus loin, que la réalisation de cette circonstance pour un groupe limité et nettement défini, extrait de l'ensemble des conditions brutes, entraîne, à titre de conséquence nécessaire, sa réalisation pour toutes les conditions brutes sans exception: nous nommerons, en pareil cas, *conditions sélectives de passivité* les relations contenues dans ce groupe limité.

Nous dirons qu'un système explicite est *complètement intégrable*, s'il admet un groupe (nécessairement unique) d'intégrales ordinaires répondant à des données initiales arbitrairement choisies (il va sans dire que les déterminations initiales choisies pour les diverses inconnues doivent être supposées toutes convergentes).

Lorsqu'un système explicite est complètement intégrable, les diverses expressions ultimes d'une même quantité principale quelconque ne peuvent manquer d'être toutes identiquement égales entre elles: si l'on désigne en effet par N l'ordre maximum des expressions ultimes de la quantité principale considérée, le système donné, qui, par hypothèse, admet un groupe d'intégrales ordinaires répondant à des déterminations initiales convergentes arbitrairement choisies, admet, notamment, un groupe d'intégrales tel, que, pour des valeurs arbitrairement choisies des variables, les quantités paramétriques d'ordres $0, 1, , \ldots, N$ prennent des valeurs arbitrairement choisies, tandis que les quantités paramétriques d'ordre supérieur à N prennent toutes la valeur zéro. Les expressions ultimes dont il s'agit sont donc numériquement égales pour toutes valeurs des quantités qu'elles renferment, c'est à dire qu'elles sont identiquement égales entre elles.

D'après cela, pour qu'un système explicite soit complètement intégrable, il faut et il suffit: 1° qu'il soit passif; 2° que la convergence des déterminations initiales arbitrairement choisies pour ses intégrales hypothétiques entraîne la convergence des portions restantes de leurs développements.

10. Soient $u, v, \ldots$ les fonctions inconnues engagées dans un système explicite; $x, y, \ldots$ les variables indépendantes; et

$$(3)\qquad \begin{cases} c_u\,, & c_{u,x}\,, & c_{u,y}\,, & \ldots, \\ c_v\,, & c_{v,x}\,, & c_{v,y}\,, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{cases}$$

des entiers arbitrairement choisis sous la seule condition que ceux d'entre eux qui ne se trouvent pas contenus dans la colonne verticale de gauche du tableau (3), savoir

$$(4)\qquad \begin{cases} c_{u,x}\,, & c_{u,y}\,, & \ldots, \\ c_{v,x}\,, & c_{v,y}\,, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{cases}$$

soient tous positifs, chacun des entiers restants $c_u, c_v, \ldots$ pouvant être à volonté positif, nul ou négatif. Désignant alors par w l'une quelconque des inconnues $u, v, \ldots$, et considérant une dérivée quelconque, d'ordre positif ou nul, de cette inconnue, par exemple

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots} w}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \ldots},$$

nous nommerons *arithme* de la dérivée en question l'entier

$$c_w + \alpha c_{w,x} + \beta c_{w,y} + \ldots.$$

Il est clair qu'en désignant par φ le plus petit (au point de vue algébrique) des entiers $c_u, c_v, \ldots$, toute dérivée d'ordre n ($n \geqq 0$) de $u, v, \ldots$ a un arithme au moins égal à $n + \varphi$, puisque chacun des entiers (4) est positif et au moins égal à 1. Il résulte de là: 1° que l'arithme d'une dérivée quelconque (d'ordre positif ou nul) de $u, v, \ldots$ ne tombe jamais au dessous de φ; 2° qu'en désignant par C un entier déterminé quelconque (au moins égal à φ), le nombre des dérivées (d'ordre positif ou nul) de $u, v, \ldots$ possédant un arithme égal à C est essentiellement limité.

Du système donné on peut, comme nous l'avons expliqué, déduire par des différentiations et combinaisons variées, une foule de relations dont chacune est identiquement satisfaite par la substitution aux inconnues $u, v, \ldots$ d'un groupe quelconque d'intégrales ordinaires. Parmi les relations auxquelles peuvent conduire des calculs de cette nature, nous distinguerons spécialement celles qui, ayant pour premier membre quelque inconnue ou dérivée d'inconnue, ne contiennent dans leur second membre aucune quantité (inconnue ou dérivée) dont l'arithme surpasse celui du premier membre; et nous dirons, pour abréger, qu'une semblable relation est *arithmoïque*, comme aussi l'expression fournie par elle pour la quantité qui figure dans son premier membre. Si, moyennant un choix convenable des entiers (3), les relations ultimes du système explicite donné sont, sauf un nombre limité d'entre elles, toutes arithmoïques, nous dirons que le système lui-même est *arithmoïque*.

Enfin, dans le cas, particulièrement remarquable, où les diverses définitions qui précèdent peuvent être satisfaites moyennant l'attribution d'une valeur commune (positive) aux entiers (4) et de valeurs convenables

aux entiers restants $c_u, c_v, \ldots$, les relations, expressions et systèmes arithmoïques seront dits *monoïques*.

Les systèmes que j'ai nommés *orthoïques* sont des systèmes explicites arithmoïques; ils comprennent comme cas particulier les systèmes *orthonomes*, qui sont monoïques.[1]

Du type orthoïque et du type orthonome on peut, comme nous allons le voir, déduire respectivement un type arithmoïque et un type monoïque d'une généralité plus grande.

11. Imaginons un système S, formé des groupes successifs d'équations

$$S_1, S_2, \ldots, S_q,$$

auxquels correspondent les groupes successifs d'inconnues

$$s_1, s_2, \ldots, s_q,$$

de la façon suivante:

1° La réunion de ces derniers reproduit une fois et une seule chacune des inconnues du système proposé S.

2° Dans le groupe des équations S_k $(k = 1, 2, \ldots, q)$ se trouvent engagées les seules inconnues

$$s_k, s_{k+1}, \ldots, s_q;$$

ce même groupe S_k, si l'on y considère pour un instant comme des fonctions données les inconnues

$$s_{k+1}, \ldots, s_q,$$

est orthoïque par rapport aux inconnues s_k, sauf exception possible pour le groupe des équations S_1, qui peut, ou bien être orthoïque par rapport aux inconnues s_1, ou bien les exprimer directement à l'aide des variables indépendantes, des inconnues suivantes $s_2, \ldots, s_q$, et de quelques-unes de leurs dérivées.

3° Les seconds membres du système S ne contiennent aucune dérivée principale des inconnues.

[1] Pour les propriétés des systèmes *orthoïques* et *orthonomes*, voir le Mémoire intitulé: *Sur une question fondamentale du Calcul intégral* (Acta mathematica, t. 23).

Nous nommerons *polyorthoïques* les systèmes, évidemment explicites, qui remplissent à la fois toutes ces conditions.

On peut, relativement à leur passivité, formuler l'énoncé suivant:

Pour qu'un système polyorthoïque soit passif, il faut et il suffit que les diverses expressions ultimes d'une même dérivée cardinale quelconque des fonctions inconnues soient égales identiquement (c'est à dire pour toutes valeurs attribuées, et aux variables $x, y, \ldots,$ et aux quantités paramétriques qui y figurent).

Cette propriété, déjà établie dans l'hypothèse $q = 1$,[1] s'étend de proche en proche, par des raisonnements tout semblables, à une valeur quelconque de q.

En conséquence, un système orthoïque ou polyorthoïque étant donné, nous nommerons *conditions sélectives de passivité* (9) le groupe limité et bien défini des relations obtenues en égalant entre elles les diverses expressions ultimes d'une même dérivée *cardinale* quelconque.

En remplaçant, dans la définition des systèmes polyorthoïques, le mot *orthoïque* par le mot *orthonome*, on tombera sur le cas, particulièrement remarquable, des systèmes *polyorthonomes*.

Un système orthonome, s'il est passif, ne peut manquer d'être complètement intégrable: il est aisé d'en conclure qu'un système polyorthonome jouit de la même propriété.

12. *Tout système polyorthoïque*

$$S_1, S_2, \ldots, S_q$$

est arithmoïque.

I. Rappelons tout d'abord que, dans un système orthoïque, les *cotes premières* des variables indépendantes sont des entiers tous positifs, celles des fonctions inconnues des entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs, et que la *cote première* d'une dérivée quelconque de telle ou telle inconnue s'obtient en ajoutant à la cote première de l'inconnue intéressée les cotes premières de toutes les variables de différentiation, distinctes ou non.

Cela posé, et un système polyorthoïque

$$S_1, S_2, \ldots, S_q$$

[1] Voir le Mémoire cité plus haut.

étant donné, *nous choisirons comme arithmes des inconnues s_k et de leurs dérivées* ($k = 1, 2, \ldots, q$) *les cotes premières que ces diverses quantités possèdent dans le groupe orthoïque S_k.*

II. Il résulte évidemment de la nature orthoïque du groupe S_k par rapport aux inconnues s_k que si une quantité quelconque, appartenant à l'ensemble illimité que forment ces inconnues et leurs dérivées de tous ordres, figure *effectivement* dans un second membre de S_k, elle possède un arithme inférieur ou au plus égal à celui du premier membre correspondant. Mais il y a plus, et *l'on peut toujours, en modifiant au besoin telles ou telles cotes premières, supposer que le système polyorthoïque donné vérifie la double condition suivante:* 1° *la cote première minima des variables indépendantes $x, y, \ldots$ dans le groupe S_k n'est pas inférieure à leur cote première maxima dans l'un quelconque des groupes suivants $S_{k+1}, \ldots, S_q$;* 2° *chacune des équations dont se compose le système polyorthoïque donné est arithmoïque.*

Effectivement, le groupe S_k ne cesse pas de vérifier, par rapport aux inconnues s_k, la définition de l'orthoïcité, soit lorsqu'on ajoute un même entier arbitraire aux cotes premières des inconnues s_k, soit lorsqu'on multiplie par un même entier positif arbitraire les cotes premières des inconnues s_k et celles qui ont été attribuées, dans S_k, à $x, y, \ldots$. Cela étant, je considère le groupe S_{q-1}, et j'y multiplie les cotes premières des inconnues s_{q-1} et de $x, y, \ldots$ par un même entier positif de grandeur telle, que la cote première minima des variables $x, y, \ldots$ dans le groupe S_{q-1} ne soit pas inférieure à leur cote première maxima dans le groupe S_q; puis j'ajoute aux cotes premières des inconnues s_{q-1} un même entier de grandeur telle, que chaque premier membre de S_{q-1} possède un arithme au moins égal à ceux des quantités paramétriques du système S_q qui figurent dans le second membre correspondant. Cela fait, je considère le groupe S_{q-2}, et j'y multiplie les cotes premières des inconnues s_{q-2} et de $x, y, \ldots$ par un même entier positif de grandeur telle, que la cote première minima des variables $x, y, \ldots$ dans le groupe S_{q-2} ne soit pas inférieure à leur cote première maxima dans le groupe S_{q-1}; puis j'ajoute aux cotes premières des inconnues s_{q-2} un même entier de grandeur telle, que chaque premier membre de S_{q-2} possède un arithme au moins égal à ceux des quantités paramétriques du système (S_{q-1}, S_q) qui figurent dans le second membre correspondant. Et ainsi de suite jusqu'au groupe S_1.

III. Nous dirons, pour abréger, qu'une relation déduite d'un système

polyorthoïque est *régulière*, si d'une part elle est arithmoïque, et si d'autre part, ayant pour premier membre une dérivée (d'ordre positif ou nul) de quelqu'une des inconnues s_k, elle ne contient *effectivement* dans son second membre aucune des inconnues $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}$ ni aucune de leurs dérivées. L'expression fournie par une semblable relation pour la quantité qui figure dans son premier membre, sera, elle aussi, qualifiée de *régulière*.

En se reportant à la définition des systèmes polyorthoïques (11), et en supposant, comme il est permis de le faire, les cotes premières fixées conformément aux indications de l'alinea précédent II, on voit immédiatement que chacune des équations qui composent un système polyorthoïque est régulière.

On peut d'ailleurs, comme nous allons l'établir, exécuter sur toute relation régulière déduite du système certaines opérations, de nature déterminée, qui laissent subsister cette propriété.

Si sur une relation régulière déduite du système on exécute des différentiations quelconques, en remplaçant, avant ou après quelques-unes de ces différentiations, telles ou telles des inconnues ou dérivées qui figurent dans le second membre par des expressions régulières des quantités en question, on tombe encore sur une relation régulière.

A. *Si sur une relation régulière on exécute des différentiations quelconques, on tombe sur une relation de même nature.*

Soit en effet

$$\delta_k = f(x, y, \ldots, \delta', \ldots) \tag{5}$$

une relation régulière dans laquelle δ_k désigne une dérivée (d'ordre positif ou nul) des inconnues s_k, et $\delta', \ldots$ des quantités satisfaisant à la double condition: 1° d'appartenir à l'ensemble illimité que forment les inconnues

$$s_k, s_{k+1}, \ldots, s_q \tag{6}$$

et leurs dérivées de tous ordres; 2° d'avoir un arithme inférieur ou au plus égal à celui de δ_k. La relation déduite de (5) par une différentiation relative à x a pour premier membre $\frac{\partial \delta_k}{\partial x}$, et son second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que $\delta', \ldots$ et leurs dérivées premières

relatives à x, quantités qui toutes appartiennent à l'ensemble formé par les inconnues (6) et leurs dérivées de tous ordres. D'un autre côté, si l'on désigne par $c_k, c', \ldots$ les arithmes respectifs de $\delta_k, \delta', \ldots$, et par $c_{k,x}$ la cote première attribuée à x dans le groupe orthoïque S_k, les relations

$$c_k - c' > 0, \ldots,$$

vérifiées par hypothèse, entraînent évidemment

$$(7) \qquad (c_k + c_{k,x}) - (c' + c_{k,x}) \geq 0, \ldots,$$

et aussi, à cause de $c_{k,x} > 0$,

$$(8) \qquad (c_k + c_{k,x}) - c' > 0, \ldots.$$

Or, il résulte des relations (8) que les arithmes respectifs des quantités $\delta', \ldots$ sont inférieurs à celui de $\frac{\partial \delta_k}{\partial x}$; d'ailleurs, comme la cote première minima des variables $x, y, \ldots$ dans le groupe S_k n'est pas inférieure à leur cote première maxima dans les divers groupes suivants $S_{k+1}, \ldots, S_q$, les entiers

$$c' + c_{k,x}, \ldots$$

sont au moins égaux aux arithmes respectifs des quantités

$$\frac{\partial \delta'}{\partial x}, \ldots,$$

et il résulte alors des relations (7) que les arithmes dont il s'agit ne surpassent pas celui de $\frac{\partial \delta_k}{\partial x}$.

Ainsi, les conditions formulées dans la définition d'une relation régulière ne cessent pas d'être satisfaites après une première différentiation exécutée sur la relation donnée. En vertu du même raisonnement, appliqué à la relation résultante, elles ne cessent pas de l'être après une deuxième, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des différentiations.

B. *Si dans le second membre d'une relation régulière on remplace telles ou telles quantités (inconnues ou dérivées) par des expressions régulières des quantités en question, on tombe encore sur une relation régulière.*

Considérons une relation régulière dont le premier membre ∂_k appartienne à l'ensemble formé par les inconnues s_k et leurs dérivées de tous ordres, et désignons par ∂' l'une des quantités (inconnues ou dérivées) figurant au second membre; puis, considérant une expression régulière de ∂', nommons ∂'' l'une des inconnues ou dérivées qui y figurent. Comme ∂' appartient, par hypothèse, à l'ensemble formé par les inconnues (6) et leurs dérivées de tous ordres, il en sera de même, à plus forte raison, de ∂''; d'un autre côté, l'arithme de ∂'' étant au plus égal à celui de ∂', et ce dernier au plus égal à celui de ∂, il est clair que l'arithme de ∂'' est au plus égal à celui de ∂. En conséquence, les substitutions opérées dans le second membre de la relation donnée ne peuvent altérer la nature régulière de celle-ci.

C. Le simple rapprochement de ***A*** et ***B*** prouve dans toute sa généralité l'exactitude de l'énoncé formulé au début de l'alinéa III.

IV. *Tout système polyorthoïque est arithmoïque.*

Les diverses équations qui composent le système donné étant, comme nous l'avons fait remarquer, toutes régulières, il résulte de la propriété ci-dessus établie (III) que les relations primitives et ultimes le sont toutes. En particulier, les relations ultimes sont toutes arithmoïques, ce qui prouve la nature arithmoïque du système.

13. *Tout système polyorthonome*

$$S_1\,,\ S_2\,,\ \ldots\,,\ S_q$$

est monoïque.

I. Un système orthonome n'est, comme nous l'avons dit ailleurs,[1] qu'un système orthoïque où les cotes premières des variables indépendantes sont toutes égales à un même entier (positif).

Cela étant, et *un système orthonome étant donné, il est toujours permis de supposer que la valeur commune (positive) des cotes premières attribuées aux variables indépendantes est égale à* 1.

Effectivement, soient

$x, y, \ldots$ les variables indépendantes;

[1] *Sur une question fondamental du Calcul intégral.*

$u, v, \ldots$ les fonctions inconnues;

c' la cote première (positive) commune à toutes les variables $x, y, \ldots$, et $c'_u, c'_v, \ldots$ les cotes premières respectives des inconnues $u, v, \ldots$;

$c''_x, c''_y, \ldots, c''_u, c''_v, \ldots$ les cotes secondes respectives de $x, y, \ldots, u, v, \ldots$;

etc.;

$c^{(p)}_x, c^{(p)}_y, \ldots, c^{(p)}_u, c^{(p)}_v, \ldots$ les cotes $p^{\text{ièmes}}$ respectives des mêmes quantités.

Cela posé, nous attribuerons, comme il suit, à chacune des quantités $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ une cote supplémentaire que nous considérerons comme *antérieure* à celles que possède déjà cette quantité: nous affecterons d'abord $x, y, \ldots$ des cotes respectives $1, 1, \ldots$; désignant ensuite par c_u le plus grand entier algébrique qui ne surpasse pas $\frac{c'_u}{c'}$, par c_v le plus grand entier algébrique qui ne surpasse pas $\frac{c'_v}{c'}$, etc., nous affecterons les inconnues $u, v, \ldots$ des cotes respectives $c_u, c_v, \ldots$. Les entiers $c', c'_u, c'_v, \ldots, c_u, c_v, \ldots$ sont évidemment liés par les relations

$$0 < \frac{c'_u}{c'} - c_u < 1,$$

$$0 < \frac{c'_v}{c'} - c_v < 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Pour plus de netteté, nous réunirons dans le Tableau suivant les $p+1$ cotes successives qui se trouvent actuellement attribuées à chacune des quantités $x, y, \ldots, u, v, \ldots$

$$\begin{array}{cccccc}
1, & 1, & \ldots, & c_u, & c_v, & \ldots, \\
c', & c', & \ldots, & c'_u, & c'_v, & \ldots, \\
c''_x, & c''_y, & \ldots, & c''_u, & c''_v, & \ldots, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c^{(p)}_x, & c^{(p)}_y, & \ldots, & c^{(p)}_u, & c^{(p)}_v, & \ldots.
\end{array}$$

En supprimant de ce Tableau la première ligne,

$$1, 1, \ldots, c_u, c_v, \ldots,$$

on retombe, naturellement, sur l'ancien système de cotes.

Cela étant, il suffit, pour établir le point que nous avons en vue, de considérer deux quantités quelconques appartenant l'une et l'autre à l'ensemble que forment les fonctions $u, v, \ldots$ et leurs dérivées de tous ordres, et de faire voir que si la seconde est, dans l'ancien système de cotes, *normale* vis à vis de la première,[1] elle jouit de la même propriété dans le nouveau.

Désignons à cet effet par w_1 et w_2 deux quantités (distinctes ou non) prises dans le groupe $u, v, \ldots$, et soient

$$(9) \qquad \frac{\partial^{\alpha_1+\beta_1+\cdots} w_1}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\beta_1} \cdots},$$

$$(10) \qquad \frac{\partial^{\alpha_2+\beta_2+\cdots} w_2}{\partial x^{\alpha_2} \partial y^{\beta_2} \cdots}$$

deux dérivées (d'ordre positif ou nul) de ces quantités respectives. Je dis tout d'abord qu'en supposant vérifiée la relation

$$(11) \qquad [c'_{w_1} + (\alpha_1 + \beta_1 + \ldots)c'] - [c'_{w_2} + (\alpha_2 + \beta_2 + \ldots)c'] \geq 0,$$

on a nécessairement aussi

$$(12) \qquad (c_{w_1} + \alpha_1 + \beta_1 + \ldots) - (c_{w_2} + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots) \geqq 0.$$

Effectivement, la relation (11) peut s'écrire

$$\left(\frac{c'_{w_1}}{c'} + \alpha_1 + \beta_1 + \ldots\right) - \left(\frac{c'_{w_2}}{c'} + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots\right) \geq 0,$$

ou

$$(c_{w_1} + \alpha_1 + \beta_1 + \ldots) - (c_{w_2} + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots) \geqq \left(\frac{c'_{w_2}}{c'} - c_{w_2}\right) - \left(\frac{c'_{w_1}}{c'} - c_{w_1}\right).$$

Or, chacune des parenthèses figurant au second membre de cette dernière relation est une quantité non négative et moindre que 1; leur différence est donc algébriquement supérieure à -1, et à plus forte raison le premier membre; finalement, ce premier membre, étant un entier, ne peut être que supérieur ou égal à zéro, ce qu'exprime justement la relation (12).

Cela étant, supposons que, dans l'ancien système de cotes, la quantité

[1] Ibid.

(10) soit normale vis à vis de la quantité (9), ou, en d'autres termes, que les différences

$$(13)\quad \left|\begin{array}{l} [c'_{w_1} + (\alpha_1 + \beta_1 + \ldots)c'] - [c'_{w_2} + (\alpha_2 + \beta_2 + \ldots)c'], \\ [c''_{w_1} + \alpha_1 c''_x + \beta_1 c''_y + \ldots] - [c''_{w_2} + \alpha_2 c''_x + \beta_2 c''_y + \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [c^{(p)}_{w_1} + \alpha_1 c^{(p)}_x + \beta_1 c^{(p)}_y + \ldots] - [c^{(p)}_{w_2} + \alpha_2 c^{(p)}_x + \beta_2 c^{(p)}_y + \ldots] \end{array}\right.$$

ne soient pas toutes nulles, et que la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas soit positive. La relation (11) se trouve alors nécessairement vérifiée, et par suite aussi la relation (12); il est aisé d'en conclure que si, en tête des différences (13), on écrit la différence

$$(c_{w_1} + \alpha_1 + \beta_1 + \ldots) - (c_{w_2} + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots),$$

la suite ainsi obtenue jouira, elle aussi, de la propriété que nous avons, par hypothèse, attribuée à la suite (13). En d'autres termes, la quantité (10) sera, dans le nouveau système de cotes, normale vis à vis de la quantité (9), ce qu'il s'agissait d'établir.

II. *Un système polyorthonome étant donné, prenons comme arithmes des inconnues s_k $(k = 1, 2, \ldots, q)$ et de leurs dérivées les cotes premières que ces diverses quantités possèdent dans le groupe orthonome S_k: cela étant, on peut, dans chacun des groupes orthonomes $S_1, S_2, \ldots, S_q$, choisir pour les variables et les inconnues des cotes premières telles, que chacune des équations dont se compose le système polyorthonome donné soit monoïque.*

Il résulte en effet de l'alinéa précédent I que l'on peut supposer toutes égales à 1 les cotes premières attribuées aux variables $x, y, \ldots$ dans chacun des groupes orthonomes $S_1, S_2, \ldots, S_q$. D'ailleurs le groupe S_k ne cesse pas de vérifier, par rapport aux inconnues s_k, la définition de l'orthonomie, lorsqu'on ajoute aux cotes premières de ces inconnues un même entier arbitraire. Cela étant, je considère le groupe S_{q-1}, et j'ajoute aux cotes premières des inconnues s_{q-1} un même entier de grandeur telle, que chaque premier membre de S_{q-1} possède un arithme au moins égal à ceux des quantités paramétriques du système S_q qui figurent dans le second membre correspondant. Puis je considère le groupe S_{q-2}, et j'ajoute aux

cotes premières des inconnues s_{q-2} un même entier de grandeur telle, que chaque premier membre de S_{q-2} possède un arithme au moins égal à ceux des quantités paramétriques du système (S_{q-1}, S_q) qui figurent dans le second membre correspondant. Et ainsi de suite jusqu'au groupe S_1.

III. Considérons un système polyorthonome, et supposons-y *les cotes premières fixées conformément aux indications de l'alinéa précédent* II. Cela étant:

Si sur une relation monoïque déduite du système on exécute des différentiations quelconques, en remplaçant, avant ou après quelques-unes de ces différentiations, telles ou telles des inconnues ou dérivées qui figurent dans le second membre par des expressions monoïques des quantités en question, on tombe encore sur une relation monoïque.

IV. *Tout système polyorthonome est monoïque.*

Les diverses équations qui composent le système étant, comme il est permis de le supposer (II), toutes monoïques, il résulte immédiatement de l'alinéa III que les relations primitives et ultimes le sont toutes aussi, ce qui démontre la proposition.

DEUXIÈME PARTIE.

Réduction d'un système différentiel quelconque à une forme passive.

14. Etant donnés deux systèmes différentiels (limités) S et S', où se trouvent engagées les mêmes variables indépendantes $x, y, \ldots$ et les mêmes fonctions inconnues $u, v, \ldots$, si les systèmes

$$S \text{ prolongé}, \quad S' \text{ prolongé}$$

sont numériquement équivalents, il est facile de voir que les systèmes S et S' le sont analytiquement:[1] en effet, toute solution analytique de S fournit

[1] La réciproque, qui nous est pour le moment inutile, sera démontrée plus loin.

une solution numérique de S prolongé donnant lieu à des développements convergents, par suite une solution numérique de S' prolongé jouissant de la même propriété; elle est donc aussi (3) une solution analytique de S'; de même, toute solution analytique de S' est aussi une solution analytique de S.

Cela posé, nous établirons la proposition capitale suivante:

Etant donné un système différentiel (limité) dont les seconds membres sont nuls et les premiers développables dans quelque domaine, on peut, dans les circonstances générales, et sauf la rencontre de relations non identiques entre les seules variables indépendantes, en déduire, sans changement de variables ni intégration, un système explicite passif tel, que ce dernier prolongé équivaille numériquement au premier prolongé; tel, par suite, que le deuxième système équivaille analytiquement au premier.

Parmi les formes explicites passives auxquelles conduit une semblable réduction du système donné, il en est qui, de plus, sont monoïques et complètement intégrables.

I. *Quand deux systèmes différentiels (limités) S et S' sont numériquement équivalents, les systèmes*

$$S \text{ prolongé}, \quad S' \text{ prolongé} \tag{14}$$

jouissent de la même propriété.

Tout d'abord, si les systèmes S et S' sont numériquement impossibles, il est clair que ces systèmes prolongés le sont aussi, et par suite qu'ils sont numériquement équivalents.

Supposons que S et S' soient numériquement possibles et équivalents: je dis que chacun des systèmes (14) est une conséquence numérique de l'autre, que le second, par exemple, est une conséquence numérique du premier.

Effectivement, on peut partager les équations du système S en deux groupes, dont le premier,

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0\ , \quad \ldots\ , \quad F_m = 0. \tag{15}$$

forme un système réduit, tandis que le second est une conséquence nu-

mérique du premier. Toute équation de S' est alors une conséquence numérique du groupe réduit, et peut, d'après cela, se mettre sous la forme

$$\Phi_1 F_1 + \Phi_2 F_2 + \ldots + \Phi_m F_m = 0,$$

où $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ désignent certaines fonctions dépendant des variables $x, y, \ldots,$ des inconnues $u, v, \ldots$ et de leurs dérivées. Cela étant, désignons par $\mathfrak{A}_{\alpha,\beta,\ldots}[F]$ un symbole indiquant qu'on a appliqué à F la règle de différentiation des fonctions composées, successivement α fois par rapport à x, puis β fois par rapport à y, etc. Il s'agit de faire voir que l'équation

$$\mathfrak{A}_{\alpha,\beta,\ldots}[\Phi_1 F_1 + \Phi_2 F_2 + \ldots + \Phi_m F_m] = 0$$

est une conséquence numérique du système S prolongé. Or, il est clair qu'en développant par la règle des fonctions composées le premier membre de la relation précédente, on tombe sur une somme de termes dont chacun est de la forme

$$\mathfrak{A}_{\gamma,\delta,\ldots}[\Phi_k] \times \mathfrak{A}_{\varepsilon,\theta,\ldots}[F_k],$$

avec les conditions

$$\gamma + \varepsilon = \alpha, \qquad \delta + \theta = \beta, \quad \ldots,$$

et il suffit alors d'observer que la relation

$$\mathfrak{A}_{\varepsilon,\theta,\ldots}[F_k] = 0$$

appartient au système (15) prolongé, par suite au système S prolongé.

II. *Lorsque à un système différentiel (limité) S on adjoint un groupe (limité) H, conséquence numérique de quelque groupe (limité) extrait du système S prolongé, les systèmes*

$$S \text{ prolongé}, \quad (S, H) \text{ prolongé}$$

sont numériquement équivalents.

Tout d'abord, si le système S prolongé est numériquement impossible, il en est de même de (S, H) prolongé, et ces deux systèmes sont numériquement équivalents.

Supposons que S prolongé soit numériquement possible: comme il est évidemment une conséquence numérique de (S, H) prolongé, il nous suffit

d'établir que, réciproquement, (S, H) prolongé est une conséquence numérique de S prolongé. Or, les équations H étant des conséquences numériques de certaines équations, en nombre fini, du système S prolongé, l'une quelconque des équations H est de la forme

$$A_1 L_1 + A_2 L_2 + \ldots + A_g L_g = 0, \tag{16}$$

où

$$L_1 = 0, \qquad L_2 = 0, \ \ldots, \ L_g = 0 \tag{17}$$

désignent des équations convenablement choisies du système S prolongé, et $A_1, A_2, \ldots, A_g$ des fonctions convenablement choisies. Si, sur l'équation (16), on effectue, conformément à la règle des fonctions composées, un nombre quelconque de différentiations consécutives, il est visible, en vertu d'un raisonnement semblable à celui de l'alinéa I, que la relation résultante est une conséquence numérique du système (17) prolongé, par suite une conséquence numérique du système S prolongé. Ainsi, H prolongé est une conséquence numérique de S prolongé; donc (S, H) prolongé jouit de la même propriété ce qu'il s'agissait d'établir.

III. *Considérons un système différentiel (limité) composé des deux groupes S, T, et soient Σ un groupe (limité) extrait de S prolongé, T' le groupe déduit de T en y remplaçant certaines des quantités (inconnues ou dérivées) qui y figurent par des expressions respectivement tirées d'équations qui soient des conséquences numériques de Σ. Cela étant, les systèmes*

$$(S, T) \text{ prolongé}, \ (S, T') \text{ prolongé}$$

sont numériquement équivalents.

Il est clair que lorsqu'une équation est conséquence numérique d'un système, elle l'est de tout système comprenant les diverses relations du premier: il est donc toujours permis de supposer que le groupe Σ contient toutes les équations S, et qu'il est de la forme

$$\Sigma = (S, \sigma).$$

Cela étant, il résulte évidemment de nos hypothèses que les systèmes

$$(\Sigma, T), \ (\Sigma, T'),$$

c'est à dire

$$(S, \sigma, T), \ (S, \sigma, T')$$

sont numériquement équivalents; donc, en vertu de I, les systèmes

$$(S, \sigma, T) \text{ prolongé}, \ (S, \sigma, T') \text{ prolongé}$$

jouissent de la même propriété. D'ailleurs, puisque σ fait partie de S prolongé, il est clair que le système (S, σ) prolongé n'est autre que le système S prolongé; donc on peut dire que les systèmes

$$(S, T) \text{ prolongé}, \ (S, T') \text{ prolongé}$$

sont numériquement équivalents, ce qu'il s'agissait d'établir.

IV. *Si, dans un système différentiel (limité) S, résolu par rapport à certaines dérivées (d'ordre positif ou nul) des inconnues, on attribue, conformément aux indications données dans un Mémoire antérieur,*[1] *p cotes à chacune des variables et des inconnues, et si chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités normales par rapport au premier membre correspondant,*[2] *on peut, sans changer les cotes, en déduire un système S', possédant à la fois les propriétés suivantes:*

1°. *Les systèmes S et S' se composent d'un même nombre d'équations, et ont respectivement les mêmes premiers membres.*

2°. *Dans le système S', chaque second membre n'est pas seulement, comme dans S, indépendant de toute quantité anormale, il l'est aussi de toute quantité principale.*

3°. *Les systèmes*

$$S \text{ prolongé}, \ S' \text{ prolongé}$$

sont numériquement équivalents.

Dans le Mémoire cité (n$^{\text{os}}$ 7 et 8), nous avons désigné par $u, v, \ldots$ diverses fonctions inconnues des variables indépendantes $x, y, \ldots$; puis, considérant certains ensembles formés avec des dérivées de $u, v, \ldots$, nous avons supposé que ces dernières étaient toutes d'ordre supérieur à zéro: mais les conclusions formulées dans le passage en question, auquel nous

[1] *Sur une question fondamentale du Calcul intégral*, n° 6.

[2] Ibid.

prions le lecteur de vouloir bien se reporter, restent applicables, alors même que les ensembles considérés contiendraient quelque dérivée d'ordre nul.

Cela étant, si le système proposé S a ses seconds membres indépendants de toute quantité principale, la proposition est vraie d'elle-même.

En nous plaçant maintenant dans l'hypothèse contraire, considérons l'ensemble illimité que forment les quantités principales du système S, et soit ω la classe maxima des premiers membres de S. De l'ensemble des relations déduites de S par différentiations, j'extrais un groupe Q choisi de telle sorte, que, dans le système

$$(S\,,\ Q),$$

chacune des quantités principales de classes $1, 2, \ldots, \omega - 1$ figure comme premier membre une fois et une seule. Le système (S, Q) a donc pour premiers membres (tous distincts entre eux) les diverses quantités principales de classes $1, 2, \ldots, \omega - 1$ du système S, et en outre certaines quantités principales de classe ω du même système. Dans le système (S, Q), le groupe formé par les équations qui ont pour premiers membres les quantités principales de classe 1 du système S, appartient tout entier à S: car autrement, quelqu'une des équations de ce groupe se déduirait par différentiation de quelqu'une des équations de S, et par suite aurait son premier membre de classe supérieure à la classe minima, qui est 1. Mais le groupe formé dans (S, Q) par les équations qui ont pour premiers membres les quantités principales de classe $k = 2, 3, \ldots, \omega - 1$, *peut* contenir des équations extraites de S et d'autres extraites de Q. Cela étant, je désignerai par

$$S_1\,,\ S_2\,,\ \ldots\,,\ S_{\omega-1}\,,\ S_\omega$$

les groupes, extraits de S, dont les premiers membres sont de classes respectives

$$1\,,\ 2\,,\ \ldots\,,\ \omega-1\,,\ \omega;$$

et, semblablement, je désignerai par

$$Q_2\,,\ \ldots\,,\ Q_{\omega-1}$$

les groupes, extraits de Q, dont les premiers membres sont de classes respectives

$$2\,,\ \ldots\,,\ \omega-1$$

Puis, je partagerai le système (S, Q) en groupes successifs de la façon suivante:

$$S_1, S_2, Q_2, S_3, Q_3, \ldots, S_{\omega-1}, Q_{\omega-1}, S_\omega.$$

Rien n'est plus facile que d'éliminer des seconds membres de ce système toutes les quantités principales: effectivement, dans (S_2, Q_2), on remplacera les quantités principales de première classe par leurs valeurs tirées de S_1, ce qui donnera (S_2', Q_2'); puis, dans (S_3, Q_3), les quantités principales des deux premières classes par leurs valeurs tirées de (S_1, S_2', Q_2'), ce qui donnera (S_3', Q_3'); et ainsi de suite jusqu'à S_ω, qui sera remplacé par un groupe S_ω'. On tombera finalement sur le système

$$S_1, S_2', Q_2', S_3', Q_3', \ldots, S_{\omega-1}', Q_{\omega-1}', S_\omega'.$$

Il est clair que le système S', formé par la réunion des groupes

$$S_1, S_2', S_3', \ldots, S_{\omega-1}', S_\omega',$$

satisfait aux conditions 1° et 2° de notre énoncé, et il s'agit d'établir qu'il satisfait aussi à la condition 3°, c'est-à-dire que le système S' prolongé équivaut numériquement au système S prolongé.

Observons tout d'abord que les relations Q_2 proviennent nécessairement du prolongement de S_1, les relations Q_3 du prolongement de (S_1, S_2), les relations Q_4 du prolongement de (S_1, S_2, S_3), etc., enfin les relations $Q_{\omega-1}$ du prolongement de $(S_1, S_2, \ldots, S_{\omega-2})$.

Cela étant, et d'après le calcul ci-dessus décrit, le système (S_1, S_2) équivaut numériquement au système (S_1, S_2'): donc (S_1, S_2) prolongé équivaut numériquement à (S_1, S_2') prolongé (I).

Considérons le système (S_1, S_2, S_3). Si, dans les relations S_3, on remplace les quantités principales des deux premières classes par leurs valeurs tirées de (S_1, S_2', Q_2'), qui équivaut numériquement à (S_1, S_2, Q_2), et qui par suite est une conséquence numérique de certaines équations du système (S_1, S_2) prolongé, il résulte de III que le système

$$(S_1, S_2, S_3) \text{ prolongé}$$

équivaut numériquement au système

$$(S_1, S_2, S_3') \text{ prolongé}.$$

D'ailleurs, puisque nous venons de démontrer que (S_1, S_2) prolongé équivaut numériquement à (S_1, S_2'') prolongé, il est clair que

$$(S_1, S_2, S_3'') \text{ prolongé}$$

équivaut numériquement à

$$(S_1, S_2'', S_3'') \text{ prolongé}.$$

On en déduit, par comparaison, que (S_1, S_2, S_3) prolongé équivaut numériquement à (S_1, S_2'', S_3'') prolongé.

Considérons maintenant le système (S_1, S_2, S_3, S_4). Si, dans les relations S_4, on remplace les quantités principales des trois premières classes par leurs valeurs tirées de

$$(S_1, S_2', Q_2', S_3', Q_3'),$$

qui équivaut numériquement à

$$(S_1, S_2, Q_2, S_3, Q_3),$$

et qui par suite est une conséquence numérique de certaines équations du système (S_1, S_2, S_3) prolongé, il résulte de III que

$$(S_1, S_2, S_3, S_4) \text{ prolongé}$$

équivaut numériquement à

$$(S_1, S_2, S_3, S_4'') \text{ prolongé}.$$

Nous venons de démontrer d'ailleurs que

$$(S_1, S_2, S_3) \text{ prolongé}$$

équivaut numériquement à

$$(S_1, S_2'', S_3'') \text{ prolongé},$$

et il en résulte que

$$(S_1, S_2, S_3, S_4'') \text{ prolongé}$$

équivaut numériquement à

$$(S_1, S_2'', S_3'', S_4'') \text{ prolongé}.$$

Donc, en définitive,

$$(S_1, S_2, S_3, S_4) \text{ prolongé}$$

équivaut numériquement à

$$(S_1\,,\ S_2'\,,\ S_3'\,,\ S_4')\ \text{prolongé}.$$

Et ainsi de suite.

V. *Si l'on considère diverses fonctions*

$$u\,,\ v\,,\ \ldots\,,\ w$$

des variables indépendantes

$$x\,,\ y\,,\ \ldots\,,\ z\,,$$

et que l'on forme successivement, avec des dérivées de $u, v, \ldots, w$, divers ensembles (limités) dont chacun ne contienne que des dérivées paramétriques relativement à tous les précédents, le nombre de ces ensembles est forcément limité.

J'ai déjà eu l'occasion, dans mes travaux antérieurs, d'établir cette proposition.[1]

VI. *En désignant par K un entier positif donné, et par $u, v, w, \ldots$ diverses fonctions des variables indépendantes $x, y, z, \ldots$, on peut attribuer à*

$$u\,,\ v\,,\ w\,,\ \ldots\,,\ x\,,\ y\,,\ z\,,\ \ldots$$

des cotes

$$c_u\,,\ c_v\,,\ c_w\,,\ \ldots\,,\ c_x\,,\ c_y\,,\ c_z\,,\ \ldots$$

choisies de telle façon, que, dans l'ensemble des ordres $0, 1, 2, \ldots, K$, les dérivées de $u, v, w, \ldots$ aient des cotes toutes distinctes entre elles.

Il suffit pour cela que, la dernière des quantités $c_x, c_y, c_z, \ldots$ étant supposée positive, on ait les relations

$$c_x > Kc_y\,,\ c_y > Kc_z\,,\ \ldots\,,$$

$$c_u > c_v + Kc_x\,,\ c_v > c_w + Kc_x\,,\ \ldots.$$

Considérons en effet deux dérivées pour chacune desquelles l'ordre total, positif ou nul, soit au plus égal à K, et supposons d'abord qu'elles

[1] Voir à ce sujet les Annales de l'Ecole Normale, juin 1893, p. 171 et suivantes; ou les Acta mathematica, t. 23, p. 289 et suivantes.

appartiennent à la même fonction. En pareil cas, la différence de leurs cotes est visiblement

$$(18) \qquad (\alpha - \alpha')c_x + (\beta - \beta')c_y + (\gamma - \gamma')c_z + \ldots,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha', \beta', \gamma', \ldots$ désignent les ordres partiels respectifs en $x, y, z, \ldots$ des deux dérivées considérées; d'ailleurs les quantités $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$, ... ne sont pas toutes nulles, et l'on peut toujours supposer, en renversant, s'il le faut, le sens de la différence (18), que la première d'entre elles qui ne s'annule pas est positive. Si l'on a $\alpha - \alpha' > 0$, la quantité (18) est au moins égale à

$$c_x - (\beta' c_y + \gamma' c_z + \ldots),$$

à plus forte raison à

$$c_x - (\beta' + \gamma' + \ldots)c_y,$$

différence nécessairement positive, puisque son terme additif est supérieur à Kc_y, et son terme soustractif au plus égal à cette quantité. Si l'on a $\alpha - \alpha' = 0$, $\beta - \beta' > 0$, la quantité (18) est au moins égale à

$$c_y - (\gamma' c_z + \ldots),$$

à plus forte raison à

$$c_y - (\gamma' + \ldots)c_z,$$

différence encore positive, puisque son terme additif est supérieur à Kc_z, et son terme soustractif au plus égal à cette quantité. Et ainsi de suite.

Supposons maintenant que les deux dérivées considérées appartiennent à deux fonctions distinctes. En nommant c et c' les cotes respectives, nécessairement inégales, de ces deux fonctions, et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha', \beta', \gamma', \ldots$ les ordres partiels respectifs des deux dérivées par rapport à $x, y, z, \ldots$, les cotes de ces dernières auront pour différence

$$c - c' + (\alpha - \alpha')c_x + (\beta - \beta')c_y + (\gamma - \gamma')c_z + \ldots.$$

Or, si l'on suppose $c - c' > 0$, ce qui est évidemment permis, l'expression précédente est au moins égale à

$$(c - c') - (\alpha' c_x + \beta' c_y + \gamma' c_z + \ldots),$$

à plus forte raison à

$$(c - c') - (\alpha' + \beta' + \gamma' + \ldots)c_x,$$

différence nécessairement positive, puisque son terme additif est supérieur à Kc_x, et son terme soustractif au plus égal à cette quantité.

VII. Supposons actuellement que les variables $x, y, z, \ldots$ et les fonctions $u, v, w, \ldots$ aient été affectées chacune de p cotes, conformément aux indications données dans un Mémoire antérieur; considérons alors certaines dérivées, d'ordre positif ou nul, et en nombre limité, de ces fonctions; partageons-les en groupes successifs d'après les valeurs décroissantes de leur cotes premières, puis les dérivées de chaque groupe en sous-groupes successifs d'après les valeurs décroissantes de leurs cotes secondes, puis à leur tour les dérivées de chaque sous-groupe en sous-groupes partiels successifs d'après les valeurs décroissantes de leurs cotes troisièmes, et ainsi jusqu'à épuisement des p cotes. De cette opération résultera finalement une suite de groupes.

Cela étant, si quelqu'un des groupes définitifs ainsi obtenus contient plus d'un terme, on peut toujours, puisque l'ordre maximum des dérivées considérées est, d'après notre hypothèse même, essentiellement fini, attribuer à chacune des variables et des inconnues une cote $(p+1)^{\text{ième}}$ telle, que toutes les dérivées considérées, et à plus forte raison celles d'entre elles qui appartiennent à un même groupe, aient des cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$ toutes distinctes entre elles (IV); on pourra alors, *sans modifier l'ordre relatif des groupes*, fractionner chacun d'eux d'après les valeurs décroissantes des cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$ de ses termes. Les dérivées considérées (d'ordre positif ou nul) se trouveront donc, en définitive, rangées dans un ordre tel, *que chacune d'elles soit normale par rapport à toutes les quantités situées à sa gauche:* nous exprimerons cette dernière propriété en disant qu'elles sont *normalement solées.*

VIII. Ces préliminaires posés, désignons par A le système différentiel donné, que nous nous proposons de réduire à une forme explicite passive.

Nous commencerons par attribuer aux variables et aux inconnues qui s'y trouvent engagées des *cotes premières* assujetties à la seule restriction que celles des variables indépendantes soient toutes positives. Puis, désignant par γ la plus petite des cotes premières attribuées aux inconnues,

et considérant l'ensemble formé par les dérivées, d'ordres positifs ou nuls, de ces inconnues, nous supposerons écrit, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, d'abord l'ensemble de toutes les dérivées (d'ordre évidemment égal à zéro) dont la cote première est γ, puis à gauche de celui-ci l'ensemble de toutes les dérivées de cote première $\gamma + 1$, puis à gauche de ce dernier l'ensemble de toutes les dérivées de cote première $\gamma + 2$, et ainsi de suite indéfiniment. Cela posé, soit I' la cote première maxima des dérivées (d'ordre positif ou nul) qui figurent *effectivement* dans A, et $[I']$ la portion de la suite précédente formée par les diverses dérivées dont la cote première ne surpasse pas I': en attribuant, s'il le faut, aux variables et aux inconnues des cotes secondes convenablement choisies, nous isolerons normalement, sans modifier l'ordre relatif des groupes composants (VII), les termes de la suite limitée $[I']$; nous chercherons alors quel est, dans cette suite, le terme le plus éloigné (vers la gauche) qui figure *effectivement* dans les équations du système, puis, résolvant par rapport au terme dont il s'agit l'une des équations où il figure, nous en porterons la valeur dans les équations restantes: nous aurons ainsi, outre la formule de résolution, un nouveau système, B, contenant une équation de moins que le proposé, et où ne figure plus la quantité éliminée, ni aucune des quantités situées à sa gauche dans la suite $[I']$. Nous considérerons, parmi les quantités restantes de cette suite, la plus éloignée (vers la gauche) de celles qui figurent *effectivement* dans B, nous résoudrons par rapport à elle l'une des équations de B où elle figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes, ce qui nous donnera, outre les deux formules successives de résolution, un troisième système contenant deux équations de moins que le proposé. Et ainsi de suite. Si ce calcul de résolutions successives ne nous conduit pas à une relation non identique entre les seules variables indépendantes, auquel cas le système proposé serait analytiquement impossible, il nous conduira à un système $\mathfrak{U}$, composé de relations toutes normales.

Cela étant, le système $\mathfrak{U}$ sera, conformément à l'alinéa IV, remplacé par un système composé de relations en même nombre et ayant respectivement les mêmes premiers membres, mais dont les seconds membres, indépendants de toute quantité anormale, le soient aussi de toute quantité principale. Dans ce dernier système, les inconnues pourront se partager en deux groupes, σ, τ, et les équations en trois groupes, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, satisfaisant

aux conditions suivantes: le groupe $\mathfrak{s}$ aura pour premiers membres les inconnues σ, le groupe $\mathfrak{S}$ certaines dérivées, d'ordre positif, des mêmes inconnues σ, et le groupe (orthoïque) $\mathfrak{T}$ certaines dérivées, d'ordre positif, des inconnues τ; quant aux seconds membres de toutes ces équations, ils ne contiendront, avec les variables indépendantes, que des dérivées paramétriques, d'ordre positif ou nul, des inconnues τ. On éliminera alors du groupe $\mathfrak{S}$, à l'aide des équations $\mathfrak{s}$ différentiées, les dérivées des inconnues σ, puis du groupe résultant, à l'aide des équations $\mathfrak{T}$, les premiers membres de ces équations mêmes; le groupe $\mathfrak{S}$ se trouvera ainsi transformé en un groupe A_1, indépendant des inconnues σ et de leurs dérivées, et ne contenant, parmi les inconnues τ et leurs dérivées, aucune quantité dont la cote première surpasse Γ, ni aucun des premiers membres de $\mathfrak{T}$. Sur le système A_1 on opérera des résolutions successives, comme on l'a fait sur le système A, et, sauf constatation éventuelle d'incompatibilité, les formules de résolution successive seront adjointes à $\mathfrak{T}$; de cette adjonction résultera un système $\mathfrak{U}_1$, composé de relations toutes normales, et où ne se trouvent engagées que les inconnues τ.

Sur le système $\mathfrak{U}_1$ on opérera comme on vient de le faire sur le système $\mathfrak{U}$, et ainsi de suite. Finalement, et sauf la rencontre d'une relation non identique entre les seules variables indépendantes, le système proposé se trouvera remplacé par une suite de groupes, dont le dernier sera orthoïque, tandis que tous les précédents auront leurs premiers membres finis. Cet ensemble de formules, toutes normales, fournira, moyennant application de l'alinéa IV, un système composé de deux groupes, savoir: 1° un groupe orthoïque $\mathfrak{O}$, où se trouvent engagées certaines des inconnues du système proposé; 2° un groupe $\mathfrak{f}$, exprimant les inconnues restantes à l'aide des variables indépendantes, des inconnues du groupe $\mathfrak{O}$, et des dérivées paramétriques de celles-ci.

Si le groupe orthoïque $\mathfrak{O}$ est passif, il est clair que le système $(\mathfrak{f}, \mathfrak{O})$, auquel on a réduit le proposé, a une forme explicite passive. Si le groupe $\mathfrak{O}$ n'est point passif, on observera que ses conditions sélectives de passivité, P, constituent autant de relations auxquelles les intégrales du proposé doivent nécessairement satisfaire (9). Deux cas peuvent alors se présenter, suivant que la cote première maxima des quantités (inconnues ou dérivées) figurant *effectivement* dans les relations P ne surpasse pas l'entier Γ, ou qu'elle le surpasse. Dans le premier cas, les quantités (inconnues ou dé-

rivées) figurant *effectivement* dans le système $(\mathfrak{f}, \mathfrak{O}, P)$ sont toutes contenues dans la suite $[I']$, dont les termes se trouvent déjà normalement isolés à l'aide des cotes antérieurement attribuées aux variables et aux inconnues. Dans le second cas, en désignant par I'' un certain entier supérieur à I', ces mêmes quantités sont toutes contenues, non plus dans la suite $[I']$, mais dans la suite analogue et plus étendue $[I'']$, et *il peut arriver* que, dans la portion de cette suite située à gauche de $[I']$, la considération des cotes antérieures ne suffise pas à isoler normalement les dérivées: mais alors, en adjoignant aux cotes antérieures de chaque variable ou inconnue une cote nouvelle convenablement choisie, on pourra faire en sorte que l'isolement, déjà réalisé dans la portion $[I']$ de la suite $[I'']$, le soit en outre dans la portion restante. Quelle que soit donc l'occurrence qui se présente, en désignant par I'' un certain entier supérieur ou égal à I', et adjoignant au besoin des cotes supplémentaires à celles qui existent déjà, on pourra, sans déranger l'ordre déjà adopté pour les termes de $[I']$, écrire les termes de la suite $[I'']$, qui comprend $[I']$, dans un ordre tel, que chacune des quantités qu'elle contient soit normale par rapport à toutes celles qui se trouvent à sa gauche. Cela posé, on considérera le système $(\mathfrak{f}, \mathfrak{O}, P)$, et on recommencera sur lui la suite des opérations précédemment exécutées sur le système donné A, avec cette seule différence que les résolutions successives du début se trouveront simplifiées, et que, par suite de la nature normale des relations $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{O}$, elles devront être exécutées seulement sur le groupe P. Cette suite d'opérations conduira, sauf la rencontre d'une relation non identique entre les seules variables indépendantes, à remplacer le système $(\mathfrak{f}, \mathfrak{O}, P)$ par un autre composé de deux groupes, savoir: 1° un groupe orthoïque $\mathfrak{O}'$, où se trouvent engagées certaines des inconnues du système $\mathfrak{O}$; 2° un groupe $\mathfrak{f}'$, exprimant les inconnues restantes du système $\mathfrak{O}$ et les premiers membres de $\mathfrak{f}$ à l'aide des variables indépendantes, des inconnues du groupe $\mathfrak{O}'$, et des dérivées paramétriques de celles-ci. Si le groupe orthoïque $\mathfrak{O}'$ est passif, le système $(\mathfrak{f}', \mathfrak{O}')$, auquel se trouve ramené le proposé, a une forme explicite passive. Dans le cas contraire, on opérera sur lui comme on l'a fait précédemment sur $(\mathfrak{f}, \mathfrak{O})$. Et ainsi de suite.

Or, il est facile de voir que l'application d'un pareil mécanisme conduit forcément: soit à une relation non identique entre les seules variables indépendantes, indiquant l'impossibilité analytique; soit à une forme ex-

plicite passive contenant, avec un groupe orthoïque, des formules où figurent, comme premiers membres, les inconnues non engagées dans le groupe orthoïque. Effectivement, dans l'hypothèse contraire, la suite

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{O}), (\mathfrak{f}', \mathfrak{O}'), \ldots$$

serait *illimitée*, et les groupes orthoïques $\mathfrak{O}, \mathfrak{O}', \ldots$ rempliraient, *à partir d'un rang suffisamment éloigné*, la double condition suivante: 1° ils impliqueraient tous les mêmes fonctions inconnues; 2° en considérant deux groupes orthoïques consécutifs, $\mathfrak{O}^{(k)}$, $\mathfrak{O}^{(k+1)}$, les équations du second, $\mathfrak{O}^{(k+1)}$, seraient en nombre supérieur à celles du premier, $\mathfrak{O}^{(k)}$, et auraient pour premiers membres: d'une part les premiers membres de $\mathfrak{O}^{(k)}$, d'autre part certaines dérivées paramétriques de $\mathfrak{O}^{(k)}$. En vertu de V, toutes les dérivées d'ordre positif des inconnues impliquées dans les groupes orthoïques finiraient donc par devenir principales, et les conditions sélectives de passivité ne fourniraient plus alors que des relations d'ordre zéro; on serait donc conduit, contrairement à ce qui précède, soit à une relation non identique entre les seules variables indépendantes, soit à une diminution du nombre des inconnues engagées dans les groupes orthoïques.

Finalement donc, et sauf le cas d'impossibilité, le système proposé se trouve remplacé par un système explicite passif composé de deux groupes, savoir: 1° un groupe *orthoïque* passif où se trouvent engagées certaines des inconnues du système proposé; 2° un groupe de relations exprimant les inconnues restantes à l'aide des variables indépendantes, des inconnues du premier groupe, et des dérivées paramétriques de celles-ci. D'ailleurs, ainsi qu'il résulte des alinéas I, II, III et IV, toutes les opérations successivement effectuées sur le système primitif sont de nature telle, que *le système final prolongé équivaut numériquement au système primitif prolongé;* et cette équivalence numérique entre les systèmes prolongés entraîne, comme nous l'avons fait observer, l'équivalence analytique entre les systèmes eux-mêmes.

Dans la réduction précédente, les cotes premières des variables indépendantes ont été assujetties à la seule condition d'être toutes positives: si on les assujettit en outre à la condition d'être toutes égales, le groupe orthoïque qui entre dans la composition du système final sera *orthonome*, et le système proposé se trouvera réduit à une forme monoïque complètement intégrable.

15. Nous venons d'exposer, dans le numéro précédent, un mode très-général de réduction à la forme explicite passive: on peut aisément, comme nous allons le voir, en imaginer un plus général encore.

I. *Etant donné un système (limité) Σ tel, que Σ prolongé soit numériquement possible, l'application au système Σ de la méthode exposée au numéro précédent ne peut conduire à une relation non identique entre les seules variables $x, y, \ldots$, et, par suite, si l'on attribue à celles-ci des cotes premières toutes égales entre elles, conduit forcément à quelque système complètement intégrable.*

Effectivement, une semblable relation,

$$F(x, y, \ldots) = 0, \tag{19}$$

où le premier membre n'est pas identiquement nul, ferait partie d'un système Ψ jouissant de cette propriété, que Ψ prolongé équivaudrait numériquement à Σ prolongé, et, par suite, que Ψ prolongé serait numériquement possible. Or, si l'équation (19) et toutes celles qui s'en déduisent par différentiations étaient numériquement vérifiées par quelque système de valeurs particulières de $x, y, \ldots$, la fonction $F(x, y, \ldots)$ serait identiquement nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse.

II. *Si, par rapport à un système explicite passif S, on considère un ensemble limité, Δ, de quantités paramétriques, le système S admet certainement quelque solution analytique telle, que, pour des valeurs numériques données des variables $x, y, \ldots$, les quantités dont il s'agit prennent des valeurs numériques données.*

Effectivement, puisque le système S est passif, le système S prolongé admet quelque solution numérique où $x, y, \ldots$ et les quantités de l'ensemble Δ possèdent les valeurs choisies. Si cette solution numérique donne lieu à des développements tous convergents, la proposition est démontrée (3). Il reste à examiner le cas où la solution dont il s'agit donne lieu à des développements qui ne le sont pas tous.

Observons à cet effet qu'en vertu de la possibilité numérique du système S prolongé, l'application au système S de la méthode exposée au numéro précédent conduit forcément, si l'on attribue aux diverses variables

indépendantes des cotes premières toutes égales entre elles, à un système S' complètement intégrable, tel d'ailleurs, que S' prolongé équivaille numériquement à S prolongé (I). Pour simplifier, nous supposerons que, dans la formation du système S', les cotes premières de toutes les fonctions inconnues ont été choisies aussi égales entre elles, circonstance d'où résulte, notamment, que chaque relation ultime de S' est, à cause de sa nature normale, d'ordre exactement égal à celui de son premier membre.

Cela posé, désignons par K l'ordre maximum des quantités paramétriques figurant dans l'ensemble Δ, et par $\mathfrak{U}'_K$ l'ensemble, essentiellement limité, des relations ultimes d'ordre inférieur ou égal à K du système S'. La solution numérique, ci-dessus considérée, du système S prolongé vérifie aussi le système S' prolongé, qui lui équivaut numériquement; elle vérifie, par suite, les relations $\mathfrak{U}'_K$. Considérons maintenant, dans S' prolongé, une solution numérique auxiliaire déterminée par les conditions suivantes: 1° que $x, y, \ldots$ et toutes les quantités paramétriques de S' d'ordre inférieur ou égal à K y aient respectivement les mêmes valeurs que dans la solution précédente; 2° que les quantités paramétriques de S' d'ordre supérieur à K, s'il en existe, aient des valeurs toutes nulles. En vertu des formules $\mathfrak{U}'_K$, les quantités principales de S' d'ordre inférieur ou égal à K auront aussi, dans la solution numérique auxiliaire, les mêmes valeurs que dans la première. Cela étant, puisque les quantités paramétriques d'ordre inférieur ou égal à K sont en nombre essentiellement limité, la solution numérique auxiliaire donnera lieu, dans le système S', à des déterminations initiales convergentes, et par suite, puisque le système S' est complètement intégrable, à des développements tous convergents; elle vérifie d'ailleurs, en vertu de l'équivalence numérique, le système S prolongé, et, par suite, fournit une solution analytique du système S. Le système S admet donc une solution analytique telle, que, pour les valeurs de $x, y, \ldots$ figurant dans la première solution numérique, les fonctions inconnues et toutes leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à K prennent les valeurs respectives figurant dans cette même solution; telle, par conséquent, que, pour les valeurs données de $x, y, \ldots$, les quantités de l'ensemble Δ prennent respectivement les valeurs données.

III. Considérons un système différentiel (S_1, S_2), et supposons: d'une part, que le groupe S_2, où se trouvent engagées une partie seulement des inconnues, ait une forme explicite; d'autre part, que le groupe S_1, si l'on

y considère comme données les inconnues dont il s'agit, ait lui-même, par rapport aux inconnues restantes, une forme explicite. Soit s_2 le groupe des inconnues engagées dans S_2; s_1 le groupe des inconnues restantes. Des seconds membres de S_1 éliminons, à l'aide des relations ultimes de S_2, toutes les quantités qui sont principales par rapport à S_2, et désignons par R_1 le groupe résultant.

Cela étant, *pour que le système* (R_1, S_2), *évidemment explicite par rapport à l'ensemble de toutes les inconnues* s_1, s_2, *soit passif, il faut et il suffit:* 1° *que le groupe* S_2 (*aux seules inconnues* s_2) *soit passif;* 2° *que la substitution aux inconnues* s_2 *d'intégrales quelconques de* S_2 *transforme le groupe* S_1 *en un système passif* $\mathfrak{S}_1$ (*aux seules inconnues* s_1).

A. En se reportant à la définition de la passivité, on peut dire d'une manière générale que, pour qu'un système explicite soit passif, il faut et il suffit que le système prolongé soit numériquement possible, quelques valeurs que l'on attribue, d'une part aux variables indépendantes $x, y, \ldots$, d'autre part aux quantités paramétriques du système.

D'après cela, pour que (R_1, S_2) soit passif, il faut et il suffit que (R_1, S_2) prolongé, ou, ce qui revient au même, que (S_1, S_2) prolongé soit numériquement possible dans les conditions ci-dessus indiquées.

Pour cette possibilité numérique, il est d'ailleurs nécessaire et suffisant: 1° que le système S_2 soit passif; 2° que les conditions brutes de passivité (9) du système S_1, considéré isolément, soient conséquences numériques des relations ultimes de S_2. On le voit immédiatement en substituant au système (S_1, S_2) prolongé le système, numériquement équivalent, qui comprend, d'une part les relations ultimes de S_2, d'autre part celles de S_1 considéré isolément.

B. Pour former les conditions brutes de passivité du système $\mathfrak{S}_1$, déduit, comme on sait, du système S_1 par la substitution aux inconnues s_2 d'un groupe d'intégrales du système S_2, on peut, comme nous allons le voir, former d'abord celles du système S_1, en éliminer, à l'aide des relations ultimes de S_2, toutes les quantités qui sont principales par rapport au système S_2, et, finalement, substituer aux inconnues s_2 les intégrales dont il s'agit.

On peut en effet, pour former les conditions brutes de passivité du système $\mathfrak{S}_1$, former d'abord celles de S_1, et y substituer ensuite aux inconnues s_2 les intégrales considérées de S_2; d'ailleurs, puisque ces dernières vérifient, quels que soient $x, y, \ldots$, toutes les relations ultimes de S_2, on

ne changera rien au résultat, si, préalablement à cette substitution, on remplace, dans les conditions brutes de passivité de S_1, toutes les quantités principales de S_2 par des expressions tirées de relations ultimes de S_2.

C. Revenons maintenant à la proposition dont l'énoncé figure en tête du présent alinéa III.

Si le système (R_1, S_2) est passif, il résulte de ***A***: 1° que le système S_2 possède lui-même cette propriété; 2° que si, dans les conditions brutes de passivité du système S_1, considéré isolément, on remplace par leurs expressions tirées des relations ultimes de S_2 toutes les quantités qui sont principales par rapport à S_2, on tombe sur des relations identiquement vérifiées. Donc les conditions brutes de passivité du système $\mathbf{S}_1$, qui, en vertu de ***B***, se déduisent des relations précédentes par la substitution aux inconnues s_2 d'un groupe d'intégrales de S_2, seront elles-mêmes identiquement vérifiées.

Il en résulte que les conditions posées sont nécessaires.

Je dis qu'elles sont suffisantes, c'est à dire (***A***) que, si on les suppose satisfaites, le système (S_1, S_2) prolongé est numériquement possible, quelques valeurs que l'on attribue, d'une part aux variables $x, y, \ldots$, d'autre part aux quantités paramétriques du système. Au système (S_1, S_2) prolongé substituons en effet, comme l'équivalence numérique nous en donne le droit, le système illimité comprenant: 1° les relations ultimes de S_2; 2° celles du système S_1, considéré isolément. Les relations ultimes du système passif S_2 sont numériquement possibles pour les valeurs données de $x, y, \ldots$ et des quantités paramétriques de ce même système, et elles fournissent alors, pour les quantités principales, un système déterminé et unique de valeurs. Tout revient donc à prouver que les relations ultimes du système S_1 isolé sont numériquement possibles, lorsqu'on y attribue: 1° aux variables $x, y, \ldots$ et aux quantités paramétriques du système S_2 les valeurs données; 2° aux quantités principales du système S_2 les valeurs déduites des précédentes; 3° aux quantités paramétriques du système S_1, considéré par rapport aux seules inconnues s_1, les valeurs données. Et pour cela, il suffit évidemment d'établir que le groupe limité Ω_1, formé par les diverses relations ultimes de S_1 qui ont pour premier membre une même dérivée principale quelconque, est numériquement possible dans les conditions que nous venons d'indiquer.

A cet effet, désignons par K_1 l'ordre maximum des relations Ω_1 relativement à l'ensemble des inconnues s_1, s_2, par Ψ_2 le groupe limité que

forment, dans le système S_2, les relations ultimes ayant pour premiers membres les quantités principales d'ordres $0, 1, 2, \ldots, K_1$, et enfin par K_2 l'ordre maximum des relations Ψ_2 $(K_2 > K_1)$. En vertu de l'alinéa II, le système passif S_2 admet quelque solution analytique, $\mathfrak{J}_2$, telle, que pour les valeurs données de $x, y, \ldots$, les quantités paramétriques d'ordres $0, 1, 2, \ldots, K_2$ de ce même système prennent les valeurs données. Cela étant, si, dans la système S_1, on substitue aux inconnues s_2 les intégrales $\mathfrak{J}_2$, on tombe, en vertu même de nos hypothèses, sur un système passif $\mathfrak{S}_1$; et, pour la raison déjà invoquée, ce dernier système admet quelque solution analytique, $\mathfrak{J}_1$, telle, que pour les valeurs données de $x, y, \ldots$, les quantités paramétriques d'ordres $0, 1, 2, \ldots, K_1$ de ce même système prennent les valeurs données. En conséquence, les formules ultimes du système S_2, et en particulier les relations du groupe limité Ψ_2, se trouvent numériquement vérifiées, lorsque, attribuant à $x, y, \ldots$ les valeurs données, on remplace les inconnues s_2 et leurs dérivées de tous ordres par les valeurs correspondantes des intégrales $\mathfrak{J}_2$ et de leurs dérivées semblables. De même, les formules ultimes du système $\mathfrak{S}_1$ se trouvent numériquement vérifiées, lorsque, attribuant à $x, y, \ldots$ les valeurs données, on remplace les inconnues s_1 et leurs dérivées de tous ordres par les valeurs correspondantes des intégrales $\mathfrak{J}_1$ et de leurs dérivées semblables; et il en résulte évidemment que les formules ultimes du système S_1, en particulier les relations du groupe limité Ω_1, se trouvent numériquement vérifiées, lorsque, attribuant à $x, y, \ldots$ les valeurs données, on remplace les inconnues s_1, les inconnues s_2, et leurs dérivées de tous ordres, par les valeurs correspondantes des fonctions $\mathfrak{J}_1$, des fonctions $\mathfrak{J}_2$, et de leurs dérivées semblables. Si l'on observe maintenant que les relations Ψ_2 sont d'ordre au plus égal à K_2, qu'elles ont pour premiers membres les diverses quantités principales d'ordres $0, 1, 2, \ldots, K_1$ $(K_1 \leqq K_2)$ du système S_2, et que les relations Ω_1 sont elles-mêmes d'ordre au plus égal à K_1; si d'un autre côté on a égard aux conditions initiales successivement choisies pour les intégrales $\mathfrak{J}_2$ et $\mathfrak{J}_1$: on se convaincra sans peine que les relations Ω_1 sont numériquement possibles dans les conditions indiquées plus haut.

IV. Nous pouvons aborder maintenant le mode de réduction plus général auquel il a été fait allusion au début du présent numéro.

Considérons un système différentiel (limité) quelconque $\Sigma^{(1)}$, et partageons-y arbitrairement les inconnues en ensembles successifs

$$s_1, s_2, \ldots, s_g.$$

Dans le système $\Sigma^{(1)}$, ne prenons actuellement que les équations où figurent *effectivement* les inconnues de l'ensemble s_1 ou leurs dérivées, et traitons ce système partiel, Φ_1, comme si les seules inconnues y étaient s_1, *en considérant pour un instant les inconnues des ensembles* $s_2, \ldots, s_g$ *comme des fonctions données.* En lui appliquant la méthode exposée au numéro 14, on lui substituera (sauf la rencontre éventuelle d'une relation non identique ne contenant aucune des inconnues $s_1, s_2, \ldots, s_g$ ni aucune de leurs dérivées, et subsistant entre les seules variables indépendantes $x, y, \ldots$) un système explicite, S_1, composé de deux groupes, savoir: 1° un groupe orthoïque, S_1'', où se trouvent engagées certaines inconnues, s_1'', de l'ensemble s_1, et dont les conditions sélectives de passivité (11) ne contiennent aucune des inconnues s_1 ni aucune de leurs dérivées; 2° un groupe S_1' de relations exprimant les inconnues restantes s_1' de l'ensemble s_1 à l'aide des variables $x, y, \ldots,$ des inconnues s_1'' et de leurs dérivées paramétriques (il va sans dire que dans les seconds membres de S_1' et S_1'' figurent en outre les inconnues $s_2, \ldots, s_g$ et leurs dérivées).

Outre les équations Φ_1, le système $\Sigma^{(1)}$ en contenait d'autres où ne se trouvaient pas engagées les inconnues s_1; à ces équations on adjoindra les conditions sélectives de passivité du groupe orthoïque S_1'', ainsi que toutes les relations indépendantes des inconnues s_1 que l'on a pu être conduit à écrire dans la phase précédente du calcul. De cette adjonction résulte un système $\Sigma^{(2)}$, où se trouvent engagées les seules inconnues

$$s_2, \ldots, s_g.$$

Dans le système $\Sigma^{(2)}$, ne prenons actuellement que les équations où figurent *effectivement* les inconnues s_2 ou leurs dérivées, et traitons ce système partiel, Φ_2, comme si les seules inconnues y étaient s_2, *en considérant pour un instant les inconnues des ensembles* $s_3, \ldots, s_g$ *comme des fonctions données.* En lui appliquant la méthode exposée au n° 14, on lui substituera (sauf la rencontre éventuelle d'une relation non identique ne contenant aucune des inconnues $s_2, s_3, \ldots, s_g$ ni aucune de leurs dérivées, et subsistant entre les seules variables indépendantes $x, y, \ldots$) un système explicite, S_2, composé de deux groupes, savoir: 1° un groupe orthoïque, S_2'', où se trouvent engagées certaines inconnues, s_2'', de l'ensemble s_2, et dont les conditions sélectives de passivité ne contiennent aucune des inconnues s_2 ni aucune de leurs dérivées; 2° un groupe S_2' de relations exprimant les

inconnues restantes, s_2', de l'ensemble s_2, à l'aide des variables $x, y, \ldots$, des inconnues s_2'' et de leurs dérivées paramétriques (il va sans dire que dans les seconds membres de S_2' et S_2'' figurent en outre les inconnues $s_3, \ldots, s_g$ et leurs dérivées).

Outre les équations Φ_2, le système $\Sigma^{(2)}$ en contenait d'autres où ne se trouvaient pas engagées les inconnues s_2; à ces équations on adjoindra les conditions sélectives de passivité du groupe orthoïque S_2'', ainsi que toutes les relations indépendantes des inconnues s_2 qu'on a pu être conduit à écrire dans la phase précédente du calcul. De cette adjonction résulte un système $\Sigma^{(3)}$, où se trouvent engagées les seules inconnues

$$s_3, \ldots, s_g.$$

Sur le système $\Sigma^{(3)}$ on opérera comme on l'a déjà fait sur $\Sigma^{(1)}$ et $\Sigma^{(2)}$, et ainsi de suite.

Finalement, et sauf la rencontre éventuelle d'une relation non identique entre les seules variables $x, y, \ldots$, le système proposé se trouvera remplacé par

$$\overbrace{S_1', \; S_1''}^{S_1}, \quad \overbrace{S_2', \; S_2''}^{S_2}, \quad \ldots, \quad \overbrace{S_g', \; S_g''}^{S_g}.$$

Dans ce dernier système, le groupe S_k ou (S_k', S_k'')

$$(k = 1, 2, \ldots, g),$$

où se trouvent engagées les seules inconnues

$$s_k, s_{k+1}, \ldots, s_g,$$

est explicite lorsqu'on l'envisage par rapport aux seules inconnues s_k, et il est tel, en outre, que la simple substitution aux inconnues

$$s_{k+1}, \ldots, s_g$$

d'intégrales quelconques du système

$$S_{k+1}, \ldots, S_g$$

le transforme en un système passif. En particulier, le dernier groupe S_g, où se trouvent engagées les seules inconnues s_g, est explicite et passif.

D'après cela, si l'on élimine successivement des seconds membres de S_{g-1} toutes les quantités qui sont principales par rapport au groupe S_g,

puis des seconds membres de S_{g-2} toutes celles qui sont principales par rapport au groupe (S_{g-1}, S_g), etc., et finalement des seconds membres de S_1 toutes celles qui sont principales par rapport au groupe $(S_2, \ldots, S_g)$, il résulte de l'alinéa précédent III que l'on tombe sur un système explicite passif

$$\overbrace{T'_1, T''_1}^{T_1}, \quad \overbrace{T'_2, T''_2}^{T_2}, \quad \ldots, \quad \overbrace{T'_g, T''_g}^{T_g}.$$

Dans ce système, les équations $T'_1, T'_2, \ldots, T'_g$ ont pour premiers membres les inconnues des ensembles respectifs $s'_1, s'_2, \ldots, s'_g$, et les équations T''_1, $T''_2, \ldots, T''_g$ sont entièrement indépendantes des inconnues dont il s'agit et de leurs dérivées: si donc des équations $T'_1, T'_2, \ldots, T'_g$ on forme un groupe unique T', le système

$$T', T''_1, T''_2, \ldots, T''_g,$$

formé de $g + 1$ groupes successifs, sera polyorthoïque et passif.

16. Nous terminerons cette deuxième Partie par l'exposé des deux propriétés générales suivantes:

I. *Pour qu'un système différentiel (limité) Σ soit analytiquement possible, il faut et il suffit que le système Σ prolongé soit numériquement possible.*

De ce que nous avons dit au n° 3, il résulte déjà que la condition est nécessaire.

Elle est d'ailleurs suffisante: car, en la supposant remplie, l'application au système Σ de la méthode exposée au n° 14 conduit forcément, si l'on attribue aux variables indépendantes des cotes premières toutes égales entre elles, à un système complètement intégrable (15, I) et analytiquement équivalent à Σ (14).

II. *Pour que deux systèmes différentiels (limités), Σ, Σ', soient analytiquement équivalents, il faut et il suffit que les deux systèmes*

$$\Sigma \text{ prolongé}, \quad \Sigma' \text{ prolongé}$$

soient numériquement équivalents.

Nous avons déjà vu, au début du n° 14, que la condition est suffisante.

Elle est d'ailleurs nécessaire.

Effectivement, si Σ et Σ' sont analytiquement impossibles, Σ prolongé et Σ' prolongé sont numériquement impossibles (I), et par suite numériquement équivalents.

Supposons Σ et Σ' analytiquement possibles et équivalents: je dis que toute solution numérique de Σ prolongé est aussi une solution numérique de Σ' prolongé. Appliquons en effet au système Σ la méthode exposée au n° 14, en attribuant aux diverses variables indépendantes des cotes premières toutes égales entre elles, et en même temps, pour simplifier, aux diverses fonctions inconnues des cotes premières toutes égales entre elles: nous tomberons ainsi sur un système complètement intégrable, S, où toute relation ultime sera, à cause de sa nature normale, d'ordre exactement égal à celui de son premier membre; les trois systèmes Σ, Σ', S seront analytiquement équivalents, les systèmes

$$\Sigma \text{ prolongé}, \quad S \text{ prolongé}$$

numériquement équivalents (14), et, en conséquence, il nous suffira d'établir que toute solution numérique de S prolongé est également une solution numérique de Σ' prolongé. Prenons donc dans Σ' prolongé une relation quelconque σ', désignons par m son ordre, puis, à la solution numérique considérée de S prolongé substituons celle où les variables $x, y, \ldots$ et les quantités paramétriques d'ordres $0, 1, 2, \ldots, m$ du système S ont respectivement les mêmes valeurs, tandis que les quantités paramétriques des ordres supérieurs à m ont pour valeur commune zéro: les quantites principales d'ordres $0, 1, 2, \ldots, m$ du système S conservent alors, elles aussi, en vertu des relations ultimes, les mêmes valeurs numériques, en sorte que la solution numérique primitivement considérée de S prolongé se trouve remplacée par une autre qui jouit des deux propriétés suivantes: 1° les variables $x, y, \ldots$ et toutes les quantités, principales et paramétriques, des ordres $0, 1, 2, \ldots, m$ ont conservé respectivement les mêmes valeurs numériques; 2° la nouvelle solution numérique de S prolongé donne certainement lieu à des développements convergents, et fournit par suite une solution analytique de S. Cela étant, puisqu'elle fournit une solution analytique de S, elle en fournit une de Σ', analytiquement équivalent à S, donc elle vérifie numériquement Σ' prolongé; il en résulte que la solution numérique primitive vérifie, parmi les relations de Σ' prolongé, celles au

moins dont l'ordre ne dépasse par m, et en particulier la relation σ', arbitrairement choisie dans Σ' prolongé.

Ainsi, nous avons prouvé que toute solution numérique de Σ prolongé est en même temps une solution numérique de Σ' prolongé; on prouverait de même la réciproque.

TROISIÈME PARTIE.

Propositions relatives au degré de généralité d'un système différentiel quelconque.

17. Nous nommerons *arbitraire de genre h* toute fonction arbitraire de h variables; les constantes arbitraires sont, d'après cette définition, des arbitraires de genre zéro.

Etant donné un système explicite S, représentons schématiquement, à l'aide des lettres $x_0, y_0, \ldots$, les valeurs initiales choisies pour les variables indépendantes $x, y, \ldots$, et, dans les déterminations initiales, relatives à $x_0, y_0, \ldots$, des intégrales hypothétiques du système, considérons tous les coefficients comme arbitraires: cela étant, la seule connaissance des premiers membres de S permet, comme je l'ai établi,[1] de représenter ces déterminations initiales schématiques par des sommes de termes, en nombre limité, dont chacun s'obtient en multipliant une fonction arbitraire de quelques-unes des variables $x, y, \ldots$ par un certain monome entier en $x - x_0$, $y - y_0, \ldots$. Pour un même système explicite S, il existe presque toujours diverses manières de représenter, à l'aide de pareilles sommes, l'ensemble des déterminations initiales: considérant l'une quelconque des représentations dont il s'agit, nous désignerons d'une manière générale par λ le genre maximum des arbitraires qui y figurent, et par μ le nombre de celles dont le genre est λ.

[1] Voir les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (31 mai 1898), et les Acta mathematica (t. 23, p. 215 et suiv.).

Cela posé, il est facile de se convaincre que, *pour un même système explicite S, les nombres λ et μ gardent des valeurs constantes, quelque choix que l'on fasse parmi les représentations diverses dont nous venons de parler.*

Effectivement, dans l'une quelconque de ces représentations, la détermination initiale d'une inconnue quelconque, w, se trouve figurée, conformément à ce qui précède, par la somme d'un nombre limité de termes dont chacun a la forme

$$(20) \qquad (x - x_0)^a (y - y_0)^b \dots F,$$

$a, b, \dots$ étant des entiers positifs ou nuls, et F une fonction arbitraire de certaines des variables. Si l'on désigne par g la somme $a + b + \dots$, par k un entier positif quelconque, et qu'on suppose l'arbitraire F développée, à partir des valeurs initiales des variables dont elle dépend, en une série entière par rapport à leurs accroissements, les seuls termes du développement en question auxquels corresponde une quantité paramétrique d'ordre inférieur ou égal à k sont évidemment ceux qui présentent, par rapport à l'ensemble des accroissements, un degré inférieur ou égal à $k - g$. D'après cela, pour obtenir le nombre P_k des dérivées paramétriques du système S dont l'ordre (positif ou nul) ne surpasse pas k, on évaluera, dans F développé, le nombre des termes dont le degré ne surpasse pas $k - g$, ce qui donne,[1] en désignant par r le genre de l'arbitraire F,

$$(21) \qquad \frac{(k - g + 1)(k - g + 2) \dots (k - g + r)}{1 \cdot 2 \dots r};$$

on répètera, pour chacun des termes dont la somme représente schématiquement la détermination initiale de w, le calcul auquel donne lieu l'expression (20), on opérera pour chacune des inconnues comme il vient d'être dit pour w, et l'on ajoutera finalement tous les résultats obtenus. Il est essentiel de remarquer ici que l'expression (21) est un polynome entier en k ayant pour terme de degré maximum $\dfrac{k^r}{1 \cdot 2 \dots r}$.

[1] On sait que le nombre des termes d'un polynome complet de degré q à h variables est donné par la formule

$$\frac{(q + 1)(q + 2) \dots (q + h)}{1 \cdot 2 \dots h}.$$

Cela posé, considérons, dans le système S, deux représentations de l'ensemble des déterminations initiales schématiques, et désignons par λ', μ' et λ'', μ'' les valeurs de λ, μ qui s'y rapportent respectivement. On a nécessairement $\lambda' = \lambda''$: car autrement le nombre P_k serait, quelque grand que soit k, indifféremment exprimé par deux polynomes entiers en k de degrés différents. Et, cela étant, on ne peut manquer d'avoir aussi $\mu' = \mu''$: car autrement le nombre P_k serait, quelque grand que soit k, indifféremment exprimé par deux polynomes entiers en k de même degré, où les termes de degré maximum auraient des coefficients différents.

18. *Si l'on réduit à une forme monoïque passive* (10) (*avec ou sans changement des variables et des inconnues*) *un système différentiel donné quelconque non impossible, les nombres* λ *et* μ, *définis au numéro précédent, ont des valeurs indépendantes du mode de réduction adopté.*

Si, plus généralement, on réduit ce même système à une forme explicite passive, et qu'on désigne par L, M *les valeurs constantes spécifiées dans la première partie de l'énoncé, on a nécessairement, ou bien*

$$L - \lambda > 0,$$

ou bien

$$L - \lambda = 0, \qquad M - \mu > 0,$$

ou bien enfin

$$L - \lambda = 0, \qquad M - \mu = 0.$$

I. *On peut, sans restreindre la généralité de la définition des systèmes monoïques, supposer que les entiers positifs* (4), *assujettis par cette définition à être tous égaux, ont pour valeur commune l'unité.*

Considérant en effet un système monoïque quelconque, désignons, comme au n° 10, par c_u, c_v, ... les entiers (positifs, nuls ou négatifs) contenus dans la colonne verticale de gauche du tableau (3), et soient

c la valeur commune (positive) des entiers restants, c'est à dire des entiers (4);

c'_u le plus grand entier algébrique qui ne surpasse pas $\frac{c_u}{c}$;

c'_v le plus grand entier algébrique qui ne surpasse pas $\frac{c_v}{c}$;

etc. . . .

Je dis qu'en substituant aux entiers

$$(22) \qquad c_u,\ c_v,\ \ldots,\ c$$

les entiers respectifs

$$(23) \qquad c'_u,\ c'_v,\ \ldots,\ 1,$$

le système proposé ne cesse pas de satisfaire à la définition des systèmes monoïques. Pour l'établir, je considérerai deux quantités quelconques appartenant l'une et l'autre à l'ensemble que forment les inconnues $u, v, \ldots$ et leurs dérivées de tous ordres, et je ferai voir que si l'arithme ancien de la deuxième quantité ne surpasse pas l'arithme ancien de la première, la même chose a lieu pour les arithmes nouveaux.

Nous avons en effet, entre les entiers (22) et (23), les relations

$$0 < \frac{c_u}{c} - c'_u < 1, \qquad 0 \leqq \frac{c_v}{c} - c'_v < 1, \quad \ldots$$

Désignons maintenant par w_1 et w_2 deux quantités (distinctes ou non) prises dans le groupe $u, v, \ldots$, et soient

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\beta_1+\cdots} w_1}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\beta_1} \cdots}, \quad \frac{\partial^{\alpha_2+\beta_2+\cdots} w_2}{\partial x^{\alpha_2} \partial y^{\beta_2} \cdots}$$

deux dérivées (d'ordre positif ou nul) de ces quantités respectives. Il s'agit de faire voir qu'en supposant vérifiée la relation

$$(24) \qquad [c_{w_1} + (\alpha_1 + \beta_1 + \ldots)c] - [c_{w_2} + (\alpha_2 + \beta_2 + \ldots)c] \geqq 0,$$

on a nécessairement aussi

$$(25) \qquad (c'_{w_1} + \alpha_1 + \beta_1 + \ldots) - (c'_{w_2} + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots) \geqq 0.$$

Or, la relation (24) peut s'écrire

$$\left(\frac{c_{w_1}}{c} + \alpha_1 + \beta_1 + \ldots\right) - \left(\frac{c_{w_2}}{c} + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots\right) \geqq 0,$$

ou

$$(c'_{w_1} + \alpha_1 + \beta_1 + \ldots) - (c'_{w_2} + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots) \geqq \left(\frac{c_{w_2}}{c} - c'_{w_2}\right) - \left(\frac{c_{w_1}}{c} - c'_{w_1}\right).$$

Chacune des parenthèses qui figurent au second membre de cette dernière

relation étant non-négative et moindre que 1, leur différence est algébriquement supérieure à -1, et à plus forte raison le premier membre; d'ailleurs ce premier membre, étant un entier, ne peut être que supérieur ou égal à zéro, ce qu'exprime justement la relation (25).

Il est donc permis, dans un système monoïque, de supposer tous égaux à 1 les entiers (4): *c'est ce que nous ferons toujours dans la démonstration ci-après.*

II. Considérons un système différentiel explicite S, où se trouvent engagées certaines fonctions inconnues $u, v, \ldots$ des variables indépendantes $x, y, \ldots$, et que nous supposerons d'ailleurs de nature quelconque (monoïque ou non, arithmoïque ou non). Désignons, comme au n° 10, par $c_u, c_v, \ldots$ les entiers (positifs, nuls ou négatifs) contenus dans la colonne verticale de gauche du tableau (3), et attribuons aux entiers restants, c'est à dire aux entiers (4), la valeur commune 1. Parmi les quantités (inconnues ou dérivées) dont l'arithme ne surpasse pas un entier donné C, les unes sont principales, les autres paramétriques, relativement au système S: cela étant, proposons-nous d'évaluer le nombre de celles qui sont paramétriques.

En désignant par w l'une quelconque des inconnues $u, v, \ldots$, la détermination initiale schématique de w dans le système S peut, comme on sait, se représenter par la somme d'un nombre limité de termes dont chacun a la forme

$$(26) \qquad (x-x_0)^a(y-y_0)^b \ldots F,$$

$a, b, \ldots$ étant des entiers positifs ou nuls, et F une fonction arbitraire de certaines des variables. Si l'on désigne par g la somme $a+b+\ldots$, et qu'on suppose l'arbitraire F développée, à partir des valeurs initiales des variables dont elle dépend, en une série entière par rapport à leurs accroissements, les seuls termes du développement en question auxquels corresponde une quantité paramétrique d'arithme inférieur ou égal à C sont évidemment ceux qui présentent, par rapport à l'ensemble des accroissements, un degré inférieur où égal à $C-c_w-g$. D'après cela, pour obtenir le nombre cherché, on évaluera, dans F développé, le nombre des termes dont le degré ne surpasse pas $C-c_w-g$, ce qui donne, en désignant par r le genre de l'arbitraire F,

$$(27) \qquad \frac{(C - c_w - g + 1)(C - c_w - g + 2)\ldots(C - c_w - g + r)}{1 \cdot 2 \ldots r};$$

on répètera, pour chacun des termes dont la somme représente schématiquement la détermination initiale de w, le calcul auquel donne lieu l'expression (26), on opérera pour chacune des inconnues comme il vient d'être dit pour w, et l'on ajoutera finalement tous les résultats obtenus.

Observons que l'expression (27) est un polynome entier en C ayant pour terme de degré maximum $\frac{C^r}{1 \cdot 2 \ldots r}$.

III. Supposons maintenant qu'un système différentiel quelconque (non impossible) ait été mis, sans changement des variables et des inconnues, d'abord sous une forme *monoïque passive* S', puis sous une forme *explicite passive* S''; et soient λ', μ' et λ'', μ'' les valeurs de λ, μ qui correspondent respectivement à ces deux formes. Je dis qu'*on a nécessairement, ou bien*

$$\lambda' - \lambda'' > 0,$$

ou bien

$$\lambda' - \lambda'' = 0, \qquad \mu' - \mu'' > 0,$$

ou bien enfin

$$\lambda' - \lambda'' = 0, \qquad \mu' - \mu'' = 0.$$

Convenons en effet, soit qu'il s'agisse de S', soit qu'il s'agisse de S'', d'évaluer l'arithme d'une quantité quelconque (inconnue ou dérivée) conformément aux mêmes conventions que dans le système monoïque S' (I). Soient en outre:

C un entier donné;

$\mathfrak{U}'$ le groupe illimité formé par les relations ultimes de S';

N'_C le nombre des quantités principales de S' dont l'arithme ne surpasse pas C, et $\mathfrak{U}'_C$ le groupe des relations ultimes de S' ayant pour premiers membres les quantités dont il s'agit;

P'_C le nombre des quantités paramétriques de S' dont l'arithme ne surpasse pas C;

$\mathfrak{U}''$, N''_C, $\mathfrak{U}''_C$, P''_C les objets analogues pour S''.

Le système S' étant monoïque, ses relations ultimes, à part un nombre limité d'entre elles, le sont toutes, et dès lors, à partir d'une valeur suffisamment grande de C, le groupe $\mathfrak{U}'_C$ ne contient *effectivement*, outre les

variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) dont l'arithme ne surpasse pas C. D'ailleurs, $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{A}''$ sont numériquement équivalents (5) (16, II); il en résulte que $\mathfrak{A}'_C$ est une conséquence numérique de $\mathfrak{A}''$, et, par suite, que les relations $\mathfrak{A}'_C$ se transforment en identités quand on y tient compte des relations $\mathfrak{A}''_C$. Les systèmes $\mathfrak{A}'_C$, $\mathfrak{A}''_C$ étant réduits, le nombre des relations $\mathfrak{A}'_C$ est donc au plus égal à celui des relations $\mathfrak{A}''_C$, et l'on a, à partir de C suffisamment grand,

$$N'_C \leqq N''_C;$$

comme on a d'ailleurs

$$N'_C + P'_C = N''_C + P''_C,$$

il en résulte évidemment

$$P'_C \geqq P''_C.$$

Cela étant, on ne peut avoir $\lambda' < \lambda''$: car, s'il en était ainsi, les nombres P'_C et P''_C, évalués conformément aux indications de l'alinéa II, seraient respectivement exprimés par deux polynomes entiers en C dont le premier serait de degré inférieur au second; à partir de C suffisamment grand, on aurait donc, contrairement à ce qui précède,

$$P'_C < P''_C.$$

Je dis de plus que, dans l'hypothèse $\lambda' = \lambda''$, on ne peut avoir $\mu' < \mu''$: car, s'il en était ainsi, les nombres P'_C et P''_C seraient respectivement exprimés par deux polynomes entiers de même degré en C, et le coefficient du terme de degré maximum serait plus petit pour le premier polynome que pour le second, ce qui entraînerait encore, à partir de C suffisamment grand,

$$P'_C < P''_C.$$

IV. *Les nombres λ et μ gardent des valeurs constantes dans toutes les formes monoïques passives auxquelles on peut, sans changement des variables et des inconnues, réduire le système différentiel donné.*

Effectivement, supposons que les systèmes S' et S'', considérés à l'alinéa précédent, soient l'un et l'autre monoïques. Comme nous venons de le voir, on a nécessairement:

ou bien $\lambda' - \lambda'' > 0$;

ou bien $\lambda' - \lambda'' = 0, \qquad \mu' - \mu'' > 0$;

ou bien $\lambda' - \lambda'' = 0, \qquad \mu' - \mu'' = 0$.

En vertu du même raisonnement, fait en sens inverse, on a nécessairement aussi:

ou bien $\lambda'' - \lambda' > 0$;

ou bien $\lambda'' - \lambda' = 0, \qquad \mu'' - \mu' > 0$;

ou bien $\lambda'' - \lambda' = 0, \qquad \mu'' - \mu' = 0$.

Or, ces deux conclusions ne sont conciliables que si l'on a

$$\lambda' - \lambda'' = 0, \qquad \mu' - \mu'' = 0.$$

V. *Les valeurs constantes que gardent les nombres λ et μ dans les circonstances spécifiées à l'alinéa précédent* IV, *sont, en outre, indépendantes du changement des variables et des inconnues*, ce qui achève notre démonstration.

Ainsi que nous l'avons déjà fait observer (16, II), il existe toujours, pour un système différentiel donné (non impossible), quelque forme monoïque complètement intégrable, impliquant les mêmes variables et inconnues, et telle, que chaque relation ultime y soit d'ordre exactement égal à celui de son premier membre. Cela posé, considérons deux systèmes différentiels déduits l'un de l'autre par un changement quelconque des variables et des inconnues, et mettons chacun d'eux, comme il vient d'être dit, sous une forme monoïque complètement intégrable qui satisfasse à ces conditions. Je dis que les valeurs de λ et μ relatives à ces deux formes sont respectivement les mêmes.

Soient en effet:

S' et S'' les deux formes dont il s'agit;

λ', μ' et λ'', μ'' les valeurs de λ, μ qui s'y rapportent respectivement;

$\mathfrak{T}$ les formules de transformation;

k un entier positif quelconque;

N'_k le nombre des quantités principales de S' dont l'ordre ne surpasse pas k, et $\mathfrak{U}'_k$ le groupe des relations ultimes de S' ayant pour premiers membres les quantités dont il s'agit;

P'_k le nombre des quantités paramétriques de S' dont l'ordre ne surpasse pas k;

N''_k, $\mathfrak{U}''_k$, P''_k les objets analogues pour S''.

Il est clair que, dans chacun des groupes $\mathfrak{U}'_k$, $\mathfrak{U}''_k$, les relations sont d'ordre au plus égal à k.

Si l'on transforme maintenant l'une quelconque des relations $\mathfrak{U}'_k$ à l'aide des formules $\mathfrak{T}$, la relation résultante, vérifiée par toutes les intégrales du système S'', est une conséquence numérique de $\mathfrak{U}''_k$, puisque les quantités paramétriques des ordres $0, 1, 2, \ldots, k$ du système complètement intégrable S'' sont susceptibles de prendre, avec $x, y, \ldots$, dans une solution analytique convenablement choisie de S'', des valeurs numériques données d'avance. Le groupe $(\mathfrak{U}'_k)$, transformé de $\mathfrak{U}'_k$, est donc une conséquence numérique de $\mathfrak{U}''_k$; et, comme ces groupes sont réduits, on a nécessairement

$$N'_k < N''_k;$$

comme on a d'ailleurs

$$N'_k + P'_k = N''_k + P''_k,$$

il en résulte évidemment

$$P'_k > P''_k.$$

En vertu du même raisonnement, fait en sens inverse, on aura d'autre part

$$P''_k > P'_k.$$

Il en résulte, quel que soit k,

$$P'_k = P''_k.$$

On a nécessairement, dès lors, $\lambda' = \lambda''$: car autrement la valeur commune des entiers P'_k, P''_k, calculée conformément aux indications du n° 17, serait, quelque grand que soit k, indifféremment exprimée par deux polynomes entiers en k de degrés différents. Et, cela étant, on ne peut manquer d'avoir aussi $\mu' = \mu''$: car autrement, cette même valeur serait, quelque grand que soit k, indifféremment exprimée par deux polynomes entiers en k de même degré, où les termes de degré maximum auraient des coefficients différents.

19. Etant donnés deux systèmes explicites *passifs*, S', S'', désignons par λ', μ' et λ'', μ'' les valeurs de λ, μ qui s'y rapportent respectivement,

et convenons de dire que les formes passives S', S'' ont un *degré de généralité égal*, si les deux différences

$$\lambda' - \lambda'' \, , \; \mu' - \mu''$$

s'annulent à la fois; convenons de dire, dans le cas contraire, que la forme S' a un *degré de généralité supérieur* ou *inférieur* à celui de S'', suivant que la première de ces deux différences qui ne s'annule pas est positive ou négative.

Il résulte immédiatement de cette convention que si l'on considère trois systèmes passifs S', S'', S''', dont le premier soit plus général que le second et le second plus général que le troisième, le premier ne peut manquer d'être plus général que le troisième. Désignons en effet par

$$\lambda' , \mu' \, ; \; \lambda'', \mu'' \, ; \; \lambda''', \mu'''$$

les valeurs de λ, μ qui se rapportent respectivement aux trois systèmes, et écrivons en un tableau rectangulaire les différences

$$\begin{array}{l} \lambda' - \lambda'' \, , \; \mu' - \mu'' \, , \\ \lambda'' - \lambda''' \, , \; \mu'' - \mu''' , \\ \lambda' - \lambda''' \, , \; \mu' - \mu''' \, ; \end{array}$$

dans ce tableau, le dernier nombre de chaque colonne verticale est la somme des deux nombres placés au dessus de lui; en conséquence, si chacune des deux premières lignes horizontales possède la double propriété:

1° que les deux différences qu'elle contient ne s'annulent pas à la fois,

2° que la première d'entre elles non égale à zéro soit positive,

la troisième ligne horizontale ne pourra manquer d'en jouir aussi.

Cela étant, la proposition du numéro précédent peut s'exprimer plus brièvement en disant que, *parmi toutes les formes explicites passives sous lesquelles on peut mettre un système différentiel donné* (*non impossible*), *les formes monoïques passives présentent un degré de généralité constant, qui se trouve être, de plus, supérieur ou égal à celui de toute autre.*

20. Tout système explicite où les déterminations initiales schématiques des intégrales hypothétiques ne contiennent qu'un nombre limité d'arbitraires de genre zéro, sans aucune arbitraire de genre supérieur, est

forcément monoïque. En effet, le nombre des quantités paramétriques y étant essentiellement limité, il est clair qu'à partir de k suffisamment grand, toute expression ultime d'une dérivée principale d'ordre k ne contient, avec les variables $x, y, \ldots,$ que des dérivées paramétriques dont l'ordre (positif ou nul) tombe au dessous de k; il suffit dès lors, pour se convaincre que la définition des systèmes monoïques est satisfaite, d'attribuer aux entiers $c_u, c_v, \ldots,$ contenus dans la colonne verticale de gauche du tableau (3), la valeur commune zéro, et aux entiers restants du même tableau la valeur commune 1.

Tout système explicite passif ne dépendant que d'un nombre limité de constantes arbitraires est complètement intégrable: car, le nombre des quantités paramétriques y étant essentiellement limité, le système admet forcément, en vertu d'une proposition antérieurement démontrée (15, II), une solution analytique telle, que, pour des valeurs numériques données des variables $x, y, \ldots,$ les quantités dont il s'agit prennent des valeurs numériques données.

21. *Si un système différentiel donné peut, de quelque manière, être réduit à une forme explicite passive ne dépendant que d'un nombre fini de constantes arbitraires, toutes les formes explicites passives du système en question sont monoïques et dépendent du même nombre de constantes.*

Soient S' et S'' deux formes explicites passives du système donné; λ' et λ'' les valeurs de λ qui s'y rapportent respectivement. Comme d'une part la nullité de λ dans une forme explicite entraîne la nature monoïque de cette forme (20), comme d'autre part toutes les formes monoïques passives d'un système donné possèdent le même degré de généralité (19), notre proposition revient à démontrer que l'hypothèse $\lambda' = 0$ entraîne, de toute nécessité, $\lambda'' = 0$.

I. Supposons en premier lieu qu'en passant de S' à S'' on conserve les mêmes variables et inconnues, et soient:

$\mathfrak{U}'$ le groupe illimité des relations ultimes de S';

k un entier positif quelconque;

N'_k le nombre des quantités principales de S' dont l'ordre ne surpasse pas k, et $\mathfrak{U}'_k$ le groupe des relations ultimes de S' ayant pour premiers membres les quantités dont il s'agit;

P'_k le nombre des quantités paramétriques de S' dont l'ordre ne surpasse pas k;

$\mathfrak{U}''$, N''_k, $\mathfrak{U}''_k$, P''_k les objets analogues pour S''.

Puisque, en vertu de l'hypothèse $\lambda' = 0$, les quantités paramétriques sont, dans S', en nombre essentiellement limité, le groupe $\mathfrak{U}'_k$ ne contient, à partir de k suffisamment grand, que les variables indépendantes et des quantités (inconnues ou dérivées) dont l'ordre ne surpasse pas k. D'ailleurs $\mathfrak{U}'$ et $\mathfrak{U}''$ sont numériquement équivalents (5) (16, II). Il en résulte que $\mathfrak{U}'_k$ est une conséquence numérique de $\mathfrak{U}''$, et, par suite, que les relations $\mathfrak{U}'_k$ se réduisent à des identités quand on y tient compte des relations $\mathfrak{U}''_k$. Comme les groupes $\mathfrak{U}'_k$, $\mathfrak{U}''_k$ sont l'un et l'autre réduits, le nombre des relations $\mathfrak{U}'_k$ est donc au plus égal à celui des relations $\mathfrak{U}''_k$, et l'on a, à partir de k suffisamment grand,

$$N'_k \leqq N''_k,$$

comme on a d'ailleurs

$$N'_k + P'_k = N''_k + P''_k,$$

il en résulte évidemment

$$P'_k \geqq P''_k.$$

Cela étant, puisque P'_k garde, à partir de k suffisamment grand, une valeur constante, il en est de même de P''_k; donc $\lambda'' = 0$.

II. Supposons en second lieu que le passage de S' à S'' nécessite le changement des variables et des inconnues. Considérons alors successivement chacun de ces systèmes, et, conservant les variables et inconnues qui s'y trouvent engagées, mettons-le sous une forme monoïque complètement intégrable, telle, en outre, que chaque relation ultime y soit d'ordre exactement égal à celui de son premier membre (voir 16, II); nommons enfin S'_1 et S''_1 les systèmes ainsi obtenus, λ'_1 et λ''_1 les valeurs de λ qui s'y rapportent respectivement. Comme nous l'avons établi plus haut (18, V), les formes S'_1, S''_1 ont le même degré de généralité, d'où résulte $\lambda'_1 = \lambda''_1$. D'ailleurs, en vertu de l'alinéa précédent I, l'hypothèse $\lambda' = 0$ entraîne $\lambda'_1 = 0$, par suite $\lambda''_1 = 0$; et, pour la même raison, la relation $\lambda''_1 = 0$ entraîne à son tour $\lambda'' = 0$, ce qu'il s'agissait d'établir.

22. *Si l'on réduit à une forme arithmoïque passive un système diffé-*

rentiel donné quelconque (non impossible), le nombre λ y a toujours la même valeur que dans le cas plus particulier d'une forme monoïque passive (18); *mais il n'en est pas nécessairement de même du nombre μ, dont la valeur est, tantôt inférieure, tantôt égale, à celle qu'il possède dans le cas dont il s'agit.*

I. Considérons la relation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_hx_h \leqq m, \tag{28}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_h$ désignent des entiers donnés, tous positifs, m un entier donné, positif ou nul, $x_1, x_2, \ldots, x_h$ des *entiers inconnus* assujettis à être tous *positifs ou nuls;* et proposons-nous de rechercher une limite supérieure et une limite inférieure du nombre des solutions qu'elle admet.

1°. Supposons d'abord que les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_h$ soient tous égaux à 1. En pareil cas, on a facilement la valeur exacte du nombre des solutions dont il s'agit. Ce nombre est égal, en effet, à celui des termes d'un polynome entier de degré m à h variables, c'est-à-dire à

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+h)}{1.2\ldots h}.$$

2°. Supposons que les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_h$ aient pour valeur commune a; la relation (28) peut alors s'écrire:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_h \leqq \frac{m}{a}. \tag{29}$$

Si l'on désigne par e la partie entière du quotient de m par a, et que l'on considère les deux relations

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_h \leqq e, \tag{30}$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_h \leqq e + 1, \tag{31}$$

il est clair que toute solution de (30) est une solution de (29), et que toute solution de (29) est une solution de (31). D'après cela, on aura évidemment pour limite inférieure

$$\frac{(e+1)(e+2)\ldots(e+h)}{1.2\ldots h},$$

et pour limite supérieure

$$\frac{(e+2)(e+3)\dots(e+h+1)}{1\,.\,2\dots h}.$$

A plus forte raison, à cause de la double relation

$$\frac{m}{a} - 1 < e \leq \frac{m}{a},$$

on aura pour limite inférieure

$$\frac{\frac{m}{a}\left(\frac{m}{a}+1\right)\dots\left(\frac{m}{a}+h-1\right)}{1\,.\,2\dots h}$$

et pour limite supérieure

$$\frac{\left(\frac{m}{a}+2\right)\left(\frac{m}{a}+3\right)\dots\left(\frac{m}{a}+h+1\right)}{1\,.\,2\dots h}.$$

3°. Examinons maintenant le cas général.

Désignons par b le plus petit des entiers $a_1, a_2, \dots, a_h$, par B le plus grand d'entre eux; puis, considérons, en même temps que la relation (28), les deux relations

$$b(x_1 + x_2 + \dots + x_h) \leq m, \tag{32}$$

$$B(x_1 + x_2 + \dots + x_h) \leq m. \tag{33}$$

Toute solution de (33) est une solution de (28), et toute solution de (28) est une solution de (32). Le nombre des solutions de (28) a donc pour limite inférieure celui des solutions de (33), et pour limite supérieure celui des solutions de (32); à plus forte raison, il a pour limite inférieure

$$\frac{\frac{m}{B}\left(\frac{m}{B}+1\right)\dots\left(\frac{m}{B}+h-1\right)}{1\,.\,2\dots h},$$

et pour limite supérieure

$$\frac{\left(\frac{m}{b}+2\right)\left(\frac{m}{b}+3\right)\dots\left(\frac{m}{b}+h+1\right)}{1\,.\,2\dots h},$$

expressions qui toutes deux sont des polynomes entiers en m de degré h.

11. Soit S un système différentiel explicite, où se trouvent engagées certaines fonctions inconnues $u, v, \ldots$ des variables indépendantes $x, y, \ldots$, et que nous supposerons d'ailleurs de nature quelconque. Les mêmes notations étant adoptées et les mêmes conventions étant posées qu'au début du n° 10, désignons par C un entier quelconque, et considérons l'ensemble de toutes les quantités (inconnues ou dérivées) dont l'arithme ne surpasse pas C; parmi ces dernières, les unes sont principales, et les autres paramétriques, relativement au système S: proposons-nous actuellement d'évaluer une limite supérieure et une limite inférieure du nombre de celles qui sont paramétriques.

En désignant par w l'une quelconque des inconnues $u, v, \ldots$, la détermination initiale schématique de w dans le système S peut, comme on sait, se représenter par la somme d'un nombre limité de termes dont chacun a la forme

$$(x - x_0)^a (y - y_0)^b \ldots F, \tag{34}$$

$a, b, \ldots$ étant des entiers positifs ou nuls, et F une fonction arbitraire de certaines des variables. Si l'on désigne par i la somme

$$c_w + a c_{w,x} + b c_{w,y} + \ldots,$$

et qu'on suppose l'arbitraire F développée, à partir des valeurs initiales des variables dont elle dépend, en une série entière par rapport à leurs accroissements, les seuls termes du développement en question auxquels corresponde une quantité paramétrique d'arithme inférieur ou égal à C sont évidemment ceux où, en multipliant les exposants de $x - x_0, y - y_0, \ldots$ par les entiers respectifs $c_{w,x}, c_{w,y}, \ldots$ et ajoutant les produits, on obtient un résultat inférieur ou égal à $C - i$. Evaluons donc, dans F développé, une limite supérieure et une limite inférieure du nombre des termes dont il s'agit: en désignant par γ le plus petit des entiers positifs $c_{w,x}, c_{w,y}, \ldots$, par Γ le plus grand, et par r le genre de l'arbitraire F, nous avons (I) comme limite supérieure

$$\frac{\left(\frac{C-i}{\gamma} + 2\right)\left(\frac{C-i}{\gamma} + 3\right) \ldots \left(\frac{C-i}{\gamma} + r + 1\right)}{1 \cdot 2 \ldots r},$$

et comme limite inférieure

$$\frac{\frac{C-i}{\Gamma}\left(\frac{C-i}{\Gamma} + 1\right) \ldots \left(\frac{C-i}{\Gamma} + r - 1\right)}{1 \cdot 2 \ldots r}.$$

Pour chacun des termes dont la somme représente schématiquement la détermination initiale de w, on répètera le calcul auquel donne lieu l'expression (34); on opérera pour chacune des inconnues $u, v, \ldots$ comme il vient d'être dit pour w; finalement, on ajoutera toutes les limites supérieures trouvées, et de même toutes les limites inférieures.

III. Supposons maintenant qu'un système différentiel (non impossible) ait été mis sous une forme arithmoïque passive S'. Considérant alors le système S', mettons-le, sans changement des variables et des inconnues, sous une forme monoïque passive S'', et soient λ', μ' et λ'', μ'' les valeurs de λ, μ qui correspondent respectivement à ces deux formes. Il s'agit de démontrer: 1° que $\lambda' = \lambda''$; 2° que μ' ne peut surpasser μ'', et peut dans certains cas lui être inférieur.

Du n° 18 il résulte déjà qu'on ne peut avoir $\lambda'' < \lambda'$.

En désignant maintenant par C un entier quelconque, par P'_C le nombre des quantités paramétriques de S' dont l'arithme ne surpasse pas C, et par P''_C le nombre analogue dans S'', un raisonnement tout semblable à celui de l'alinéa III du n° 18 prouve que l'on a, à partir de C suffisamment grand,

$$P'_C \geqq P''_C \,.$$

D'ailleurs, le nombre P'_C a pour limite supérieure un certain polynome entier en C de degré λ', et le nombre P''_C a pour limite inférieure un certain polynome entier en C de degré λ''; en désignant par $'F(C)$ et $''F(C)$ ces deux polynomes, on a donc, à plus forte raison,

$$'F(C) \geqq {}''F(C),$$

et il est impossible, dès lors, que l'on ait $\lambda' < \lambda''$, car, s'il en était ainsi, on aurait, à partir de C suffisamment grand,

$$'F(C) < {}''F(C),$$

ce qui est contradictoire.

Ainsi on a forcément $\lambda' = \lambda''$, d'où résulte, en vertu du n° 18, $\mu' \leqq \mu''$. Si S' est monoïque, μ' est, comme nous l'avons établi (18), nécessairement égal à μ''; mais, si S' est simplement arithmoïque sans être monoïque, μ' peut, comme nous allons le voir, être inférieur à μ''.

Considérons en effet l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

où u désigne une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y; écrite comme ci-dessus, elle constitue un système orthonome et passif, par suite monoïque et passif, dont une intégrale se trouve entièrement déterminée par la double condition que l'intégrale dont il s'agit et sa dérivée première relative à x se réduisent respectivement, pour une valeur donnée de x, à *deux fonctions données de* y; écrite au contraire sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

elle constitue un système orthoïque et passif, par suite arithmoïque et passif, dont une intégrale hypothétique se trouve entièrement déterminée par la condition de se réduire, pour une valeur donnée de y, à *une fonction donnée de* x.

SUR LES RACINES D'UNE ÉQUATION FONDAMENTALE[1]

PAR

IVAR BENDIXSON

à STOCKHOLM.

Dans diverses recherches d'analyse on est conduit à l'étude de l'équation suivante

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} - s\,, & a_{12}\,, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{22}\,, & a_{22} - s\,, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}\,, & a_{n2}\,, & \ldots, & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0$$

où toutes les quantités $a_{\lambda\nu}$ sont des quantités réelles.

Dans le cas où

$$(2)\qquad a_{\lambda\nu} = a_{\nu\lambda} \qquad \begin{smallmatrix} \lambda = 1, \ldots, n \\ \nu = 1, \ldots, n \end{smallmatrix}$$

on sait que toutes les racines de l'équation (1) sont réelles, mais on n'a pas jusqu'à présent donné de théorème sur la nature des racines dans le cas où les équations (2) ne sont pas satisfaites.

On obtient pourtant aussi dans le cas général des résultats dignes d'intérêt.

Désignons par $s_1, s_2, \ldots, s_n$ les racines de l'équation (1) et par $R(s_\lambda)$ et $I(s_\lambda)$ la partie réelle et la partie imaginaire de s_λ, on aura toujours les deux théorèmes suivants.

Théorème I. *Soit g la plus grande des quantités $\left|\frac{a_{\lambda\nu} - a_{\nu\lambda}}{2}\right|$, on aura toujours*

$$|I(s_\lambda)| \leqq g\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

[1] Les théorèmes I et II de la présente note ont été déjà publiés dans un mémoire portant ce même titre et communiqué à l'académie des sciences à Stockholm le 14 nov. 1900.

Théorème II. *Soient M la plus grande et m la plus petite des racines de l'équation*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-t\,, & \dfrac{a_{12}+a_{21}}{2}\,, & \ldots, & \dfrac{a_{1n}+a_{n1}}{2} \\ \dfrac{a_{12}+a_{21}}{2}\,, & a_{22}-t\,, & \ldots, & \dfrac{a_{2n}+a_{n2}}{2} \\ \dfrac{a_{1n}+a_{n1}}{2}\,, & \dfrac{a_{2n}+a_{n2}}{2}\,, & \ldots, & a_{nn}-t \end{vmatrix} = 0,$$

on aura toujours

$$m \leq R(s_\lambda) \leq M.$$

Afin d'établir nos théorèmes nous envisageons le système d'équations

$$(3)\qquad \begin{cases} (a_{11}-s_\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-s_\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-s_\lambda)x_n = 0, \end{cases}$$

s_λ désignant une racine quelconque de l'équation (1). On sait que ce système admet toujours des solutions $x_1, \ldots, x_n$ non nulles.

Mettons

$$s_\lambda = \alpha + \beta i$$

$$x_\nu = \xi_\nu + \eta_\nu i. \qquad \nu=1,\ldots,n$$

En séparant la partie réelle de la partie imaginaire, les équations (3) peuvent s'écrire

$$(4)\qquad a_{\lambda 1}\xi_1 + a_{\lambda 2}\xi_2 + \ldots + a_{\lambda n}\xi_n = (\alpha\xi_\lambda - \beta\eta_\lambda) \qquad (\lambda=1,\ldots,n)$$

$$(5)\qquad a_{\lambda 1}\eta_1 + a_{\lambda 2}\eta_2 + \ldots + a_{\lambda n}\eta_n = (\alpha\eta_\lambda + \beta\xi_\lambda). \qquad (\lambda=1,\ldots,n)$$

Multiplions la première de ces équations par $-\eta_\lambda$ et la seconde par ξ_λ, et ajoutons; nous aurons

$$a_{\lambda 1}[\xi_\lambda\eta_1 - \xi_1\eta_\lambda] + a_{\lambda 2}[\xi_\lambda\eta_2 - \xi_2\eta_\lambda] + \ldots + a_{\lambda n}[\xi_\lambda\eta_n - \xi_n\eta_\lambda]$$
$$= \beta[\xi_\lambda^2 + \eta_\lambda^2]. \qquad (\lambda=1,\ldots,n)$$

En sommant par rapport à λ on aura, en désignant par $\sum\limits_{(\lambda,\nu)}$ une sommation étendue à toutes les combinaisons différentes (λ, ν),

$$\sum_{(\lambda,\nu)} [a_{\lambda\nu} - a_{\nu\lambda}][\xi_\lambda \eta_\nu - \xi_\nu \eta_\lambda] = \beta \sum (\xi_\lambda^2 + \eta_\lambda^2),$$

ce qui nous donne

$$|\beta| \sum_\lambda (\xi_\lambda^2 + \eta_\lambda^2) \leqq 2g \sum_{(\lambda,\nu)} |\xi_\lambda \eta_\nu - \xi_\nu \eta_\lambda|$$

ou

$$\beta^2 \left[\sum_{\lambda=1}^{n} (\xi_\lambda^2 + \eta_\lambda^2)\right]^2 \leqq 4g^2 \left[\sum_{(\lambda,\nu)} |\xi_\lambda \eta_\nu - \xi_\nu \eta_\lambda|\right]^2.$$

Or on sait que

$$[k_1 + k_2 + \ldots + k_N]^2 \leqq N[k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_N^2],$$

$k_1, k_2, \ldots, k_N$ désignant des quantités réelles quelconques.

On aura par conséquent

$$\left\{\sum_{(\lambda,\nu)} |\xi_\lambda \eta_\nu - \xi_\nu \eta_\lambda|\right\}^2 \leqq \frac{n(n-1)}{2} \sum_{(\lambda,\nu)} (\xi_\lambda \eta_\nu - \xi_\nu \eta_\lambda)^2;$$

donc

$$\beta^2 \left(\sum \xi_\lambda^2 + \sum \eta_\lambda^2\right)^2 \leqq 2n(n-1) g^2 . \sum_{(\lambda,\nu)} (\xi_\lambda \eta_\nu - \xi_\nu \eta_\lambda)^2.$$

Or les identités bien connues

$$\left(\sum \xi_\lambda^2 + \sum \eta_\lambda^2\right)^2 = 4 \sum \xi_\lambda^2 . \sum \eta_\lambda^2 + \left(\sum \xi_\lambda^2 - \sum \eta_\lambda^2\right)^2$$

$$\sum \xi_\lambda^2 . \sum \eta_\lambda^2 = \left(\sum \xi_\lambda \eta_\lambda\right)^2 + \sum_{(\lambda,\nu)} (\xi_\lambda \eta_\nu - \xi_\nu \eta_\lambda)^2$$

donnent immédiatement

$$\left(\sum \xi_\lambda^2 + \sum \eta_\lambda^2\right)^2 \geqq 4 \sum_{(\lambda,\nu)} (\xi_\lambda \eta_\nu - \xi_\nu \eta_\lambda)^2,$$

de sorte qu'on obtient enfin

$$\beta^2 \leqq \frac{n(n-1)}{2} g^2$$

ou

$$|\beta| \leqq \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\, g.$$

c. q. f. d.

La démonstration du théorème II n'offre pas plus de difficulté.

En effet, on tire des équations (4) et (5) l'équation suivante

$$\xi_\lambda[a_{\lambda 1}\xi_1 + a_{\lambda 2}\xi_2 + \ldots + a_{\lambda \nu}\xi_n] + \eta_\lambda[a_{\lambda 1}\eta_1 + \ldots + a_{\lambda n}\eta_n] - \alpha[\xi_\lambda^2 + \eta_\lambda^2] = 0. \quad (\lambda = 1, \ldots, n)$$

En faisant la sommation de ces équations on aura

$$\sum_\lambda \sum_\nu a_{\lambda\nu}(\xi_\lambda\xi_\nu + \eta_\lambda\eta_\nu) - \alpha\sum_\lambda(\xi_\lambda^2 + \eta_\lambda^2) = 0. \tag{6}$$

Envisageons maintenant la forme quadratique

$$\sum_\lambda \sum_\nu a_{\lambda\nu}(x_\lambda x_\nu + y_\lambda y_\nu) - s\sum_\lambda(x_\lambda^2 + y_\lambda^2), \tag{7}$$

où s désigne une quantité réelle arbitraire.

Pour des valeurs suffisamment grandes de s on sait que cette expression est une forme définie, et un théorème bien connu sur les formes quadratiques[1] nous apprend qu'elle ne cesse d'être une forme définie que quand s est situé entre la plus grande et la plus petite des racines de l'équation

$$\begin{vmatrix}
a_{11}-s, & \frac{a_{12}+a_{21}}{2}, & \ldots, & \frac{a_{1n}+a_{n1}}{2}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\
\frac{a_{12}+a_{21}}{2}, & a_{22}-s, & \ldots, & \frac{a_{2n}+a_{n2}}{2}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{a_{1n}+a_{n1}}{2}, & \frac{a_{2n}+a_{n2}}{2}, & \ldots, & a_{nn}-s, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & a_{11}-s, & \frac{a_{12}+a_{21}}{2}, & \ldots, & \frac{a_{1n}+a_{n1}}{2} \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & \frac{a_{12}+a_{21}}{2}, & a_{22}-s, & \ldots, & \frac{a_{2n}+a_{n2}}{2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & \frac{a_{1n}+a_{n1}}{2}, & \frac{a_{2n}+a_{n2}}{2}, & \ldots, & a_{nn}-s
\end{vmatrix} = 0$$

[1] Voir Weierstrass: *Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem*, Werke Bd. I, pages 242, 243.

laquelle peut s'écrire d'une manière plus simple ainsi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s\ , & \frac{a_{12}+a_{21}}{2}\ , & \ldots, & \frac{a_{1n}+a_{n1}}{2} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2}\ , & a_{22} - s\ , & \ldots, & \frac{a_{2n}+a_{n2}}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_{1n}+a_{n1}}{2}\ , & \frac{a_{2n}+a_{n2}}{2}\ , & \ldots, & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0.$$

Or l'équation (6) met en évidence que l'expression (7) n'est pas une forme définie pour $s = \alpha$, ce qui nous donne

$$m \leqq \alpha \leqq M.$$

c. q. f. d.

Dans le cas où $a_{\lambda\nu} + a_{\nu\lambda} = 0$; $a_{\nu\nu} = 0$, l'équation (1) est de la forme

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} s\ , & a_{12}\ , & a_{13}\ , & \ldots & a_{1n} \\ -a_{12}\ , & s\ , & a_{23}\ , & \ldots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n}\ , & -a_{2n}\ , & -a_{3n}\ , & \ldots, & s \end{vmatrix} = 0$$

et on peut affirmer que toutes les racines de cette équation sont telles que

$$R(s_\nu) = 0.$$

En particulier on conclut que $s = 0$ est une racine de l'équation (8), quand n est un nombre impair, résultat bien connu.

La même méthode s'applique évidemment à une classe d'équations un peu plus générales.

Soit en effet

$$\sum_{\lambda,\nu} b_{\lambda\nu} x_\lambda x_\nu$$

une forme quadratique définie et positive où

$$b_{\lambda\nu} = b_{\nu\lambda};$$

et soit ρ la plus petite des racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\rho\,, & b_{12}\,, & \dots, & b_{1n} \\ b_{21}\,, & b_{22}-\rho\,, & \dots, & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}\,, & b_{n2}\,, & \dots, & b_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

lesquelles sont toutes des quantités positives.

Envisageons l'équation

$$(1') \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-sb_{11}\,, & a_{12}-sb_{12}\,, & \dots, & a_{1n}-sb_{1n} \\ a_{21}-sb_{21}\,, & a_{22}-sb_{22}\,, & \dots, & a_{2n}-sb_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}-sb_{n1}\,, & a_{n2}-sb_{n2}\,, & \dots, & a_{nn}-sb_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

où les quantités $a_{\lambda\nu}$ sont des quantités réelles quelconques. Désignons par $s_1, s_2, \dots, s_n$ les racines de l'équation (1') et par $R(s_k)$ et $J(s_k)$ la partie réelle et la partie imaginaire de s_k, les deux théorèmes suivants auront lieu.

Théorème I'. *Soit g la plus grande des quantités $\left|\frac{a_{\lambda\nu}-a_{\nu\lambda}}{2}\right|$, on aura toujours*

$$|J(s_k)| < \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\,\frac{g}{\rho}.$$

Théorème II'. *Soient M la plus grande et m la plus petite des racines de l'équation*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-b_{11}s\,, & \frac{a_{12}+a_{21}}{2}-b_{12}s\,, & \dots, & \frac{a_{1n}+a_{n1}}{2}-b_{1n}s \\ \frac{a_{12}+a_{12}}{2}-b_{21}s\,, & a_{22}-b_{22}s\,, & \dots, & \frac{a_{2n}+a_{n2}}{2}-b_{2n}s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{a_{n1}+a_{1n}}{2}-b_{n1}s\,, & \frac{a_{n2}+a_{2n}}{2}-b_{n2}s\,, & \dots, & a_{nn}-b_{nn}s \end{vmatrix} = 0$$

on aura toujours

$$m \leq R(s_k) \leq M.$$

La démonstration du théorème II' se fait exactement de la même manière que ci-dessus.

Quant au théorème I' notre méthode conduit à l'inégalité

$$\beta \leq \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot g \cdot \sqrt{\frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} \xi_\lambda^2 \cdot \sum\limits_{\nu=1}^{n} \eta_\lambda^2}{\sum\limits_{\lambda,\nu} b_{\lambda\nu} \xi_\lambda \xi_\nu \cdot \sum\limits_{\lambda,\nu} b_{\lambda\nu} \eta_\lambda \eta_\nu}}$$

et un théorème bien connu sur les formes quadratiques nous apprend que

$$\frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} \xi_\lambda^2}{\sum\limits_{\lambda,\nu} b_{\lambda\nu} \xi_\lambda \xi_\nu} \leq \frac{1}{\rho} \geq \frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} \eta_\lambda^2}{\sum\limits_{\lambda,\nu} b_{\lambda\nu} \eta_\lambda \eta_\nu}.$$

Pour le cas où $a_{\lambda\nu} + a_{\nu\lambda} = 0$; $a_{\nu\nu} = 0$ l'équation (1') sera de la forme

$$(8') \qquad \begin{vmatrix} sb_{11}\,, & a_{12} + sb_{12}\,, & a_{13} + sb_{13}\,, & \ldots, & a_{1n} + sb_{1n} \\ -a_{12} + sb_{12}\,, & sb_{22}\,, & a_{23} + sb_{23}\,, & \ldots, & a_{2n} + sb_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1n} + sb_{1n}\,, & -a_{2n} + sb_{2n}\,, & -a_{3n} + sb_{3n}\,, & \ldots, & sb_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

et on peut affirmer que toutes les racines de cette équation sont telles que

$$R(s_\nu) = 0.$$

SUR LES RACINES D'UNE ÉQUATION FONDAMENTALE.

(Extrait d'une lettre de M. A. Hirsch à M. I. Bendixson.)

— — — La lecture de votre intéressant mémoire *Sur les racines d'une équation fondamentale*[1] m'a conduit à une généralisation à peu près immédiate des propositions que vous avez établies. Qu'il me soit permis dans les lignes qui suivent de vous communiquer les résultats auxquels je suis parvenu.

Ceux-ci se rapportent à l'équation déjà traitée par vous

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - s, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - s, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0,$$

où maintenant les éléments $a_{\mu\nu}$ désignent des quantités complexes quelconques; ils donnent d'une manière analogue à la votre, dans laquelle vous avez supposé les $a_{\mu\nu}$ réels, une limite pour les racines de (1).

a étant une quantité complexe quelconque, je désigne par $\bar{a}$ sa quantité conjuguée; en outre $\sigma = \alpha + \beta i$ étant racine de (1), soit $R(\sigma)$ sa partie réelle, $I(\sigma)$ sa partie imaginaire: $\alpha = R(\sigma)$, $\beta = I(\sigma)$.

On peut alors, se plaçant à votre point de vue, énoncer les propositions suivantes:

---

[1] Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1900. N:o 9. Stockholm. (Réimprimé Acta mathematica, t. 25, p. 359.)

Théorème I. *En désignant par A la plus grande d'entre les quantités $|a_{\mu\nu}|$, par B la plus grande d'entre les $\left|\left(\frac{a_{\mu\nu}+\bar{a}_{\nu\mu}}{2}\right)\right|$ et par C la plus grande d'entre les $\left|\left(\frac{a_{\mu\nu}-\bar{a}_{\nu\mu}}{2}\right)\right|$ on a toujours*

$$(2)\qquad \begin{cases} |\sigma| \leqq n\,.\,A, \\ |R(\sigma)| \leqq n\,.\,B, \\ |I(\sigma)| \leqq n\,.\,C. \end{cases}$$

Dans le cas où les éléments $a_{\mu\nu}$ sont tels que chacune des quantités $(a_{\mu\nu}+a_{\nu\mu})$ soit réelle, la dernière de ces inégalités peut être remplacée par une autre plus restreinte, par

$$(3)\qquad |I(\sigma)| \leqq \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\,.\,C.$$

Théorème II. *Soient M la plus grande et m la plus petite des racines toutes réelles, comme on sait, de l'équation*

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \frac{a_{11}+\bar{a}_{11}}{2}-s, & \frac{a_{12}+\bar{a}_{21}}{2}, & \frac{a_{13}+\bar{a}_{31}}{2}, & \ldots, & \frac{a_{1n}+\bar{a}_{n1}}{2} \\ \frac{a_{21}+\bar{a}_{12}}{2}, & \frac{a_{22}+\bar{a}_{22}}{2}-s, & \frac{a_{23}+\bar{a}_{32}}{2}, & \ldots, & \frac{a_{2n}+\bar{a}_{n2}}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{a_{n1}+\bar{a}_{1n}}{2}, & \frac{a_{n2}+\bar{a}_{2n}}{2}, & \frac{a_{n3}+\bar{a}_{3n}}{2}, & \ldots, & \frac{a_{nn}+\bar{a}_{nn}}{2}-s \end{vmatrix} = 0,$$

on a toujours

$$(5)\qquad m < R(\sigma) < M.$$

Une méthode très semblable à celle utilisée par vous conduit à la démonstration de la première de ces deux propositions.

σ étant racine de l'équation (1), il existe un système de quantités non toutes nulles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfaisant aux n équations linéaires:

$$(6)\qquad \sigma x_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu. \qquad (\mu=1,2,\ldots,n)$$

Par multiplication respective de chacune d'entre elles par x_μ, puis par addition membre à membre on obtient la relation

$$\sigma \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \bar{x}_\mu x_\nu, \tag{7}$$

qui par changement de $(+i)$ en $(-i)$ se transforme en

$$\bar{\sigma} \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\nu\mu} \bar{x}_\mu x_\nu. \tag{8}$$

De (7) et (8) par addition et soustraction l'on déduit:

$$\alpha \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left(\frac{a_{\mu\nu} + \bar{a}_{\nu\mu}}{2}\right) \bar{x}_\mu x_\nu, \tag{9}$$

$$\beta \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left(\frac{a_{\mu\nu} - \bar{a}_{\nu\mu}}{2i}\right) \bar{x}_\mu x_\nu. \tag{10}$$

Ceci dit, partant de (7), on peut écrire:

$$|\sigma| \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu < \sum_{\mu,\nu=1}^{n} |a_{\mu\nu}| . |x_\mu| . |x_\nu| \leqq A . \sum_{\mu,\nu=1}^{n} |x_\mu| . |x_\nu| = A \left\{ \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu| \right\}^2; \tag{11}$$

et comme l'inégalité si élégamment employée par vous:

$$[k_1 + k_2 + \ldots + k_m]^2 \leqq m[k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_m^2] \tag{12}$$

nous donne

$$\left\{ \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu| \right\}^2 \leqq n \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu,$$

nous avons immédiatement

$$|\sigma| \leqq n . A.$$

L'application à (9) et (10) de ce résultat conduit alors aux deux autres inégalités:

$$|\alpha| \leqq n . B, \qquad |\beta| \leqq n . C. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

En supposant maintenant que les sommes $(a_{\mu\nu} + a_{\nu\mu})$ sont toutes réelles, l'égalité (10) peut être mise sous la forme:

$$\beta \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu = \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} \left(\frac{a_{\mu\nu} - a_{\nu\mu}}{2}\right) \left(\frac{\bar{x}_\mu x_\nu - x_\mu \bar{x}_\nu}{i}\right),$$

d'où résulte:

$$(13) \qquad |\beta| \sum_{\mu}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu \leq C \cdot \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu<\nu}}^{n} \left| \left(\frac{\bar{x}_\mu x_\nu - x_\mu \bar{x}_\nu}{i} \right) \right| .$$

Or, les quantités

$$\left(\frac{\bar{x}_\mu x_\nu - x_\mu \bar{x}_\nu}{i} \right)$$

étant toutes réelles, l'inégalité (12) peut être appliquée comme suit:

$$\left\{ \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu<\nu}}^{n} \left| \left(\frac{\bar{x}_\mu x_\nu - x_\mu \bar{x}_\nu}{i} \right) \right| \right\}^2 \leq - \frac{n(n-1)}{2} \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu<\nu}}^{n} (\bar{x}_\mu x_\nu - x_\mu \bar{x}_\nu)^2$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} \left\{ \left[\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu \right]^2 - \left| \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu^2 \right| \left| \sum_{\mu=1}^{n} \bar{x}_\mu^2 \right| \right\} \leq \frac{n(n-1)}{2} \left[\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \bar{x}_\mu \right]^2 ;$$

et par conséquence de (13) résulte l'inégalité (3)

$$|\beta| \leq \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot C$$

indiquée plus haut.

La démonstration de la proposition II. s'obtient en remarquant qu'à cause de (9) α se trouve compris entre la plus petite et la plus grande des valeurs que prend le quotient des formes quadratiques

$$\sum_{(\mu,\nu)} \left(\frac{a_{\mu\nu} + \bar{a}_{\nu\mu}}{2} \right) \bar{x}_\mu x_\nu : \sum_{\mu} x_\mu \bar{x}_\mu ,$$

lorsque les x_μ varient d'une façon indépendante.

Or, ces valeurs extrêmes sont, comme on le voit aisément, racines de l'équation (4); par suite α se trouve nécessairement dans l'intervalle compris entre m et M, la plus petite et la plus grande des racines de (4).

c. q. f. d.

ARITHMETISCHE EIGENSCHAFTEN ANALYTISCHER FUNCTIONEN

VON

PAUL STÄCKEL

IN KIEL

I.

Betrachten wir die Gesamtheit derjenigen algebraischen Functionen y von x, die durch eine Gleichung

$$g(x, y) = 0$$

definirt werden; $g(x, y)$ bedeute eine ganze rationale Function von x und y mit ganzzahligen Coefficienten. Darunter sind die rationalen Functionen von x mit rationalen Coefficienten enthalten. Sie sind dadurch ausgezeichnet, dass zu jedem rationalen Werte des Argumentes ein rationaler Wert der Function gehört. Das gilt auch noch dann, wenn der Begriff »rational» dahin erweitert wird, dass darunter jede Zahl der Form $a + ib$ verstanden werden soll, bei der a und b reelle rationale Zahlen sind.

Die soeben angegebene Eigenschaft kann dazu dienen, die rationalen Functionen mit rationalen Coefficienten aus der Gesamtheit der betrachteten algebraischen Functionen auszusondern. Nach Herrn HILBERT ist nämlich eine algebraische Function, die für alle rationalen Werte eines beliebig kleinen Intervalles selbst stets rationale Werte annimmt, notwendig eine rationale Function[1]; Herr HILBERT hat diesen Satz allerdings nur für *reelle* rationale Werte ausgesprochen, er gilt aber, wie man sich leicht überzeugt, auch im complexen Gebiete.

---

[1] *Über die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten.* Journal für Math., Bd. 110 (1892), S. 129.

Ein weit ausgedehnterer Bereich von Functionen ergiebt sich, wenn man eine Gleichung der Form

$$\mathfrak{P}(x, y) = 0$$

zu Grunde legt, in der $\mathfrak{P}(x, y)$ eine Potenzreihe von x und y mit rationalen Coefficienten bedeutet, die in einem die Stelle $x = 0$, $y = 0$ umgebenden Gebiete unbedingt convergirt. Unter den Functionen des Bereiches sind auch die vorher betrachteten algebraischen und rationalen Functionen enthalten, und es entsteht daher die Frage, ob diese gegenüber der Gesamtheit der Functionen der Bereiches ebenso durch einfache arithmetische Eigenschaften characterisirt werden können, wie das bei den rationalen Functionen gegenüber der Gesamtheit der algebraischen Functionen der Fall war.

Dass eine analytische Function, die für alle reellen rationalen Werte des Argumentes selbst stets reelle rationale Werte annimmt, notwendig eine rationale Function sein müsse, hatte ein früh verstorbener, talentvoller Mathematiker Emil Strauss[1] in Jahre 1886 zu beweisen versucht, war aber von Weierstrass, dem er den Beweisversuch mitgeteilt hatte, auf die Vergeblichkeit seiner Bemühungen aufmerksam gemacht worden; Weierstrass bildete nämlich eine *transcendente* Function, der dieselben Eigenschaften zukamen. Gleichzeitig bemerkte er, dass es auch auf mannigfache Weise möglich sei, *transcendente* Functionen in Form von Potenzreihen mit rationalen Coefficienten herzustellen, die für jeden algebraischen Wert des Argumentes selbst stets ebenfalls algebraische Werte annehmen. Hierdurch angeregt versuchte Strauss eine solche Function herzustellen. Die von ihm construirte Potenzreihe besitzt allerdings für die dem Convergenzbereiche angehörenden Werte des Argumentes die verlangte Eigenschaft, allein Strauss bewies nur, dass dadurch keine *rationale* Function dargestellt werde, und übersah die Möglichkeit, dass durch seine Potenzreihe eine *algebraische* Function definirt werden könne. Wenn sich nun auch, wie ich gezeigt

[1] Strauss hat in dieser Zeitschrift (t. 11 (1888), S. 13—18) eine beachtenswerte Abhandlung veröffentlicht: *Eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise nebst functionentheoretischer Anwendung*, auf die Herr Hurwitz in der Abhandlung: *Über beständig convergirende Potenzreihen mit rationalen Zahlencoefficienten und vorgeschriebenen Nullstellen* (diese Zeitschrift, t. 14 (1890), S. 211—215) zurückgekommen ist.

habe[1], diese Lücke ausfüllen und die Transcendenz jener Function in aller Strenge darthun lässt, so hatte das Beispiel von STRAUSS doch den Mangel, dass der absolute Wert des Argumentes kleiner als Eins sein muss, damit die Reihe convergirt, und es blieb die Frage offen, ob es transcendente Functionen gebe, die durch beständig convergente Potenzreihen mit rationalen Coefficienten dargestellt werden können und für jeden endlichen algebraischen Wert des Argumentes einen algebraischen Wert der Function liefern. Dass diese Frage zu bejahen ist, habe ich durch ein Verfahren nachgewiesen, das noch weiter zu gehen erlaubt; z. B. lässt sich dadurch zeigen, dass es sogar Functionen der verlangten Art gibt, die für jeden algebraischen Wert des Argumentes nur (complexe) rationale Werte annehmen[2].

II.

Die algebraischen Functionen y von x, die durch eine Gleichung $g(x, y) = 0$ definirt werden, besitzen nicht nur die Eigenschaft, dass zu jedem algebraischen Werte von x ein algebraischer Wert von y gehört, sondern es ist auch umgekehrt jedem algebraischen Werte von y ein algebraischer Wert von x zugeordnet, und es entsteht daher die Frage, ob diese algebraischen Functionen durch die beiden Eigenschaften zusammengenommen gegenüber den analytischen Functionen, die durch Gleichungen der Form $\mathfrak{P}(x, y) = 0$ definirt werden, characterisirt sind. Dass das nicht der Fall ist, dass es vielmehr transcendente Functionen gibt, denen beide Eigenschaften zukommen, soll im Folgenden ausführlich dargelegt werden; eine Skizze des Beweises habe ich bereits in zwei Noten gegeben, die Herr PICARD am 20. und 27. März 1899 der Pariser Akademie vorgelegt hat und die in deren Comptes Rendus abgedruckt worden sind.

Nach dem Vorgange von Herrn G. CANTOR[3] soll einer jeden irre-

[1] *Über arithmetische Eigenschaften analytischer Functionen.* Math. Ann. t. 46 (1895), S. 513—520. Nouvelles Annales (3) t. 18 (1899), Februarheft.

[2] A. a. o. S. 519—520.

[3] *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs reeller algebraischer Zahlen.* Journal für Math., t. 77 (1873), S. 258—263.

duciblen ganzen Function mit ganzzahligen Coefficienten (ohne gemeinsamen Teiler):

$$g_0 x^n + g_1 x^{n-1} + \dots + g_{n-1} x + g_n$$

als *Höhe* die ganze positive Zahl

$$h = n - 1 + |g_0| + |g_1| + \dots + |g_{n-1}| + |g_n|$$

zugeordnet werden. Die durch eine irreducible Gleichung der Höhe h definirten algebraischen Zahlen mögen algebraische Zahlen der Höhe h heissen.

Das Product aller Functionen derselben Höhe h (wobei der Coefficient g_0 immer positiv genommen werde) ist eine ganze rationale Function mit ganzzahligen Coefficienten, die mit $\varphi_h(x)$ bezeichnet werde; man erhält:

$$\varphi_1(x) = x, \qquad \varphi_2(x) = x^2 - 1, \qquad \varphi_3(x) = 4x^4 - 17x^2 + 4, \text{ usw.}$$

Die Functionen $\varphi_h(x)$ besitzen eine Eigenschaft, von der später Gebrauch gemacht werden wird und die daher schon an dieser Stelle abgeleitet werden soll. Ist a eine algebraische Zahl der Höhe h, so ist a^{-1} eine algebraische Zahl derselben Höhe, da die Functionen

$$g_0 x^n + g_1 x^{n-1} + \dots + g_{n-1} x + g_n$$

und

$$g_n x^n + g_{n-1} x^{n-1} + \dots + g_1 x + g_0$$

gleichzeitig irreducibel oder reducibel sind; ausgenommen ist augenscheinlich nur die Zahl Null als einzige Zahl der Höhe 1. Wird daher der Grad von $\varphi_h(x)$ mit $\varkappa_h$ bezeichnet, so ist für $h = 2, 3, 4, \dots$:

$$\varphi_h(x) = \pm\, x^{\varkappa_h} \varphi_h\left(\frac{1}{x}\right);$$

dagegen ist für $h = 1$:

$$\varphi_1(x) = x^{\varkappa_1+1} \varphi_1\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ferner sollen die Producte:

$$\prod_{k=1}^{h} \varphi_k(x) = x \psi_h(x) \qquad (h = 1, 2, 3, \dots)$$

gebildet werden; man erhält:

$$\psi_1(x) = 1, \qquad \psi_2(x) = x^2 - 1, \qquad \psi_3(x) = 4x^6 - 21x^4 + 21x^2 - 4, \quad \text{usw.}$$

Wird der Grad von $\psi_h(x)$ mit λ_h bezeichnet, sodass

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 6, \quad \text{usw.}$$

ist, so gelten für $h = 1, 2, 3, \ldots$ die Identitäten:

$$\psi_h(x) = \pm x^{\lambda_h} \psi_h\left(\frac{1}{x}\right).$$

Endlich sollen die ganzen positiven Zahlen μ_h durch die Relationen:

$$\mu_h = \mu_{h-1} + \lambda_{h-1} + 1 \qquad {\scriptstyle (h=2,3,4,\ldots)}$$

mit der Anfangsbedingung $\mu_1 = 1$ definirt werden; man erhält:

$$\mu_2 = 2, \qquad \mu_3 = 5, \qquad \mu_4 = 12, \quad \text{usw.}$$

Nach diesen Vorbereitungen betrachte ich den Ausdruck:

$$\text{(A)} \qquad x + y + \sum_{h=1}^{\infty} u_h x^{\mu_h} \psi_h(x) y^{\mu_h} \psi_h(y),$$

in dem $u_1, u_2, \ldots, u_h, \ldots$ rationale Zahlen bedeuten sollen, über die noch verfügt werden darf.

Wird in dem Gliede mit dem Index h die Multiplication von $\psi_h(x)$ mit x^{μ_h} ausgeführt, so ergibt sich, weil $\psi_h(0) \neq 0$ ist, als niedrigste Potenz von x: x^{μ_h}, als höchste $x^{\mu_h + \lambda_h} = x^{\mu_{h+1}-1}$, sodass die so erhaltenen Potenzen weder in den vorhergehenden noch in den folgenden Gliedern von (A) auftreten. Da in Bezug auf y dasselbe gilt, so kommt nach Ausführung aller Multiplicationen sogleich eine geordnete Potenzreihe zum Vorschein, die sich in der Form schreiben lässt:

$$\text{(B)} \qquad x + y + u_1 xy + \sum b_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta; \qquad {\scriptstyle (\alpha, \beta = 2,3,4,\ldots)}$$

die Coefficienten $b_{\alpha\beta}$ sind dabei Producte von ganzen, positiven oder negativen, Zahlen mit je einer der Grössen $u_1, u_2, \ldots$. Wird daher irgend eine Potenzreihe:

$$x + y + u_1 xy + \sum B_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \qquad {\scriptstyle (\alpha, \beta = 2,3,4,\ldots)}$$

mit lauter von Null verschiedenen, positiven Coefficienten gewählt, die für ein die Stelle $x = 0$, $y = 0$ umgebendes Gebiet unbedingt convergirt, so ist der Convergenzbereich der Reihe (B) mindestens ebenso ausgedehnt, sobald die Ungleichheiten

$$|b_{\alpha\beta}| \leq B_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 2, 3, 4, \ldots)$$

bestehen. Diese Ungleichheiten sind aber erfüllt, wenn den Grössen u_2, $u_3, \ldots, u_h, \ldots$ positive rationale Werte erteilt werden, die zwischen Null und gewissen von Null verschiedenen oberen Grenzen $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_h, \ldots$ liegen. Im Besonderen lässt sich auf diese Weise erreichen, dass der Ausdruck (A) einer beständig convergirenden Potenzreihe von x und y aequivalent ist.

Es möge ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass man zwischen der Convergenz des Ausdruckes (A) und der Potenzreihe (B) scharf unterscheiden muss; wenn, nach geschehener Wahl der Grössen $u_1, u_2, \ldots$, für $x = a$, $y = b$ die Reihe (B) convergirt, so convergirt dafür auch immer der Ausdruck (A), es braucht aber im Allgemeinen nicht das Umgekehrte zu gelten; nur wenn (B) beständig convergent ist, fällt diese Unterscheidung fort.

Man überzeugt sich leicht, dass durch die Gleichung:

$$(\mathrm{B}^*) \qquad x + y + u_1 xy + \Sigma b_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = 0$$

ein Zusammenhang zwischen den Veränderlichen x und y definirt wird, bei dem, wenn x und y auf den Convergenzbereich beschränkt werden, die beiden früher verlangten Eigenschaften stattfinden. Schreibt man nämlich, was wegen der unbedingten Convergenz gestattet ist, die Gleichung (B*) in der Form

$$(\mathrm{A}^*) \qquad x + y + \sum_{h=1}^{\infty} u_h x^{\mu_h} \phi_h(x) y^{\mu_h} \phi_h(y) = 0,$$

so verschwinden, wenn für die Veränderliche x eine algebraische Zahl a der Höhe $h > 1$ eingesetzt wird, alle Functionen $\phi_k(a)$ für $k \geq h$, und man erhält daher zur Bestimmung der zugehörigen Werte von y die algebraische Gleichung:

$$a + y + \sum_{k=1}^{h-1} u_k a^{\mu_k} \phi_k(a) y^{\mu_k} \phi_k(y) = 0,$$

deren Grad $< \mu_h - 1$ ist. Das Entsprechende gilt aber auch, wenn für die Veränderliche y eine algebraische Zahl b eingesetzt wird.

III.

Die Frage, ob der durch die Gleichung (B^*) definirte Zusammenhang zwischen den Veränderlichen x und y *transcendent* ist, bedarf, um einen präcisen Sinn zu haben, einer Erläuterung, die in ausführlicher Form zu geben um so mehr angebracht erscheint, als es sich dabei um Dinge von allgemeinem Interesse handelt.

Eine jede Gleichung der Form:

$$(C) \qquad x + y + \sum c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = 0, \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, \ldots, \alpha + \beta > 1)$$

auf deren linker Seite eine Potenzreihe von x und y steht, die für ein gewisses die Stelle $x = 0$, $y = 0$ umgebendes Gebiet unbedingt convergirt, definirt zwischen den Veränderlichen x und y einen Zusammenhang in dem Sinne, dass, wenn für x ein dem Convergenzbereiche, angehörender Wert a eingesetzt wird, die zugehörigen Werte von y aus der Gleichung

$$a + y + \sum c_{\alpha\beta} a^\alpha y^\beta = 0$$

zu bestimmen sind. Wenn x hinreichend klein ist, gibt es Werte von y, die dieser Gleichung genügen, denn nach einem bekannten Satze existirt unter den Voraussetzungen, die gemacht worden sind, eine convergente Potenzreihe:

$$y = -x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + \ldots,$$

die in (C) eingesetzt die linke Seite zum identischen Verschwinden bringt. Aus dieser Potenzreihe für y entspringt durch analytische Fortsetzung eine monogene analytische Function $y = f(x)$, von der man sagen darf, dass sie der Gleichung (C) genügt. Darunter ist zu verstehen, dass jedes durch Fortsetzung erhaltene Element von $f(x)$:

$$y - y_0 = \sum_{\alpha=1}^{\infty} s_\alpha (x - x_0)^\alpha,$$

wenn x_0 und y_0 dem Convergenzbereiche der Reihe auf der linken Seite von (C) angehören, ebenfalls zur identischen Erfüllung der Gleichung (C) führt.

Jetzt sind zwei Möglichkeiten vorhanden. Entweder sind sämtliche Potenzreihen

$$y - y_1 = \sum_{a=1} t_a (x - x_1)^a,$$

durch die die Gleichung (C) identisch erfüllt wird, Elemente der Function $f(x)$ oder es gibt Potenzreihen, die zwar der Gleichung (C) genügen, aber nicht zur Function $f(x)$ gehören. Der erste Fall entspricht genau dem Verhalten bei einer irreduciblen algebraischen Gleichung $g(x, y) = 0$, durch die y als monogene analytische Function von x definirt wird. Ich habe daher vorgeschlagen, in einem erweiterten Sinne des Wortes die Gleichung (C) alsdann ebenfalls *irreducibel* zu nennen.

Da man nicht weiss, ob die besondere Gleichung:

$$(\mathrm{B}^*) \qquad x + y + u_1 xy + \sum b_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta = 0$$

im erweiterten Sinne irreducibel ist, so ist es möglich, dass ihr verschiedene, ja sogar unendlich viele monogene analytische Functionen genügen, und es wäre sogar denkbar, dass es lauter algebraische Functionen wären. Es ist daher erforderlich zu zeigen, dass wenigstens eine der durch diese Gleichung definirten monogenen analytischen Functionen transcendent ist. Die Frage, ob die Gleichung (B*) irreducibel ist oder nicht, bleibt dabei unentschieden [1].

IV.

Nach einem bekannten Satze wird die Gleichung (B*) durch eine convergente Potenzreihe

$$(\mathrm{R}) \qquad y = -x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + \dots$$

befriedigt; die Coefficienten $r_2, r_3, \dots$ sind rationale Zahlen, weil vermöge der Festsetzung über die Grössen $u_1, u_2, \dots$ die Coefficienten $b_{\alpha,\beta}$ rationale

[1] Irreducible Gleichungen (B*), deren linke Seite eine beständig convergente Potenzreihe von x und y ist, würden eine bemerkenswerte Klasse analytischer Functionen definiren, bei denen nämlich jeder algebraische Wert von x eine singuläre Stelle und zwar ein Verzweigungspunkt wäre, indem dazu der mehrfache Wert $y = \infty$ gehörte.

Zahlen waren. Durch die Reihe (R) wird eine monogene analytische Function von x definirt, der für einen hinreichend kleinen die Stelle $x = 0$, $y = 0$ umgebenden Bereich die Eigenschaft zukommt, dass jedem algebraischen Werte von x ein algebraischer Wert von y, nämlich der durch die Gleichung (R) definirte, und umgekehrt jedem algebraischen Werte von y ein algebraischer Wert von x, nämlich der durch die Umkehrung der Gleichung (R) definirte, zugeordnet ist.

Der Beweis, dass diese analytische Function transcendent ist, beruht auf einigen algebraischen Hilfssätzen, die zunächst hergeleitet werden sollen.

In der ganzen rationalen Function

$$P_a(x\,,\,y\,,\,u_a) = x + y + \sum_{h=1}^{a} u_h x^{\mu_h} \phi_h(x) y^{\mu_h} \phi_h(y)$$

mögen x und y veränderliche Grössen bezeichnen, $u_1\,,\,u_2\,,\,\ldots\,,\,u_{a-1}$ seien gegebene rationale Zahlen, während u_a zwischen den Grenzen 0 und ε_a variiren darf. Als Function der Argumente $x\,,\,y\,,\,u_a$ ist P_a *irreducibel*, denn es ist linear in u_a, könnte also nur dadurch reducibel werden, dass der Coefficient von u_a:

$$x^{\mu_a} \phi_a(x) y^{\mu_a} \phi_a(y)$$

mit dem absoluten Gliede

$$x + y + \sum_{k=1}^{a-1} u_k x^{\mu_k} \phi_k(x) y^{\mu_k} \phi_k(y)$$

einen Factor gemeinsam hätte. Ein solcher Factor müsste die Form $\chi(x)\,.\,\omega(y)$ haben, das absolute Glied ist aber weder durch $\chi(x)$ teilbar, weil darin y als Term vorkommt, noch durch $\omega(y)$, weil darin x als Term vorkommt.

Setzt man

$$x = \frac{1}{\xi}\,, \qquad y = \frac{1}{\eta}\,, \qquad u_a = \frac{1}{v_a}\,,$$

und beachtet die Identitäten:

$$\phi_h(t) = \pm\, t^{\lambda_h} \phi_h\left(\frac{1}{t}\right),$$

so wird

$$P_a\left(\frac{1}{\xi}\,,\,\frac{1}{\eta}\,,\,\frac{1}{v_a}\right) = \frac{\Pi_a(\xi\,,\,\eta\,,\,v_a)}{v_a \xi^{\mu_{a+1}-1} \eta^{\mu_{a+1}-1}}$$

Dabei bedeutet

$$\Pi_a(\xi, \eta, v_a) = \pm \psi_a(\xi)\psi_a(\eta)$$

$$+ v_a \left\{ \xi^{\mu_{a+1}-1}\eta^{\mu_{a+1}-1}(\xi + \eta) + \sum_{k=1}^{a-1} \pm u_k \xi^{\mu_{a+1}-\mu_{k+1}} \psi_k(\xi) \eta^{\mu_{a+1}-\mu_{k+1}} \psi_k(\eta) \right\}$$

eine ganze rationale Function von ξ, η, v_a mit rationalen Coefficienten, die ebenso wie $P_a(x, y, u_a)$ irreducibel ist.

Nun gilt nach Herrn Hilbert folgendes Theorem:

Wenn die ganze Function $F(x, y, \ldots, w; t, r, \ldots, q)$ der Veränderlichen $x, y, \ldots, w$ und der Parameter $t, r, \ldots, q$ mit rationalen Coefficienten irreducibel ist, so ist es stets auf unendlich viele Weisen möglich, in dieser Function $F(x, y, \ldots, w; t, r, \ldots, q)$ für die Parameter $t, r, \ldots, q$ ganze rationale Zahlen einzusetzen, so dass dadurch diese Function in eine irreducible Function der Veränderlichen $x, y, \ldots, w$ übergeht[1].

Aus dem Beweise von Herrn Hilbert geht hervor, dass, vermöge der Fähigkeit, die Werte der Parameter $t, r, \ldots, q$ auf unendlich viele Arten zu wählen, stets erreicht werden kann, dass sie *sämtlich* grösser als irgend eine gegebene ganze Zahl N sind; dieser Umstand wird für die folgende Deduction von wesentlicher Bedeutung sein.

Nunmehr sollen in der Function $\Pi_a(\xi, \eta, v_a)$ ξ und v_a als Parameter behandelt werden, während η die Veränderliche ist. Die ganze Zahl N_a werde so gross angenommen, dass $N_a \geq \alpha$ ist und dass $\frac{1}{N_a}$ dem Intervall $(0 \ldots \varepsilon_a)$ angehört. Dann gibt es zwei ganze Zahlen $\beta - 1$ und ω_a, die grösser als N_a sind und die, für ξ und v_a eingesetzt, $\Pi_a(\xi, \eta, v_a)$ in eine irreducible Function von η verwandeln. Alsdann ist auch

$$P_a\left(\frac{1}{\beta - 1}, y, \frac{1}{\omega_a}\right) = \frac{\Pi_a\left(\beta - 1, \frac{1}{y}, \omega_a\right)}{\omega_a(\beta - 1)^{\mu_{a+1}-1}} y^{\mu_{a+1}-1}$$

eine irreducible Function von y.

[1] A. a. O., S. 122. Dass dort von ganzzahligen Coefficienten gesprochen wird, ist unerheblich. Irreducibel ist hier für den Bereich der rationalen Zahlen gemeint, bei Herrn Hilbert (was für den vorliegenden Zweck nicht in Betracht kommt) für einen durch eine beliebige algebraische Zahl bestimmten Rationalitätsbereich.

Nachdem für die Grösse u_α der rationale Wert $\frac{1}{\omega_\alpha}$ gewonnen ist, setze man

$$u_{\alpha+1} = 0, \qquad u_{\alpha+2} = 0\,, \quad \ldots\,, \quad u_{\beta-1} = 0$$

und bilde zur Bestimmung von u_β mit den vorher angenommenen Werten von $u_1, u_2, \ldots, u_{\beta-1}$ die ganze rationale Function

$$P_\beta(x, y, u_\beta) = x + y + \sum_{h=1}^{\beta} u_h x^{\mu_h} \phi_h(x) y^{\mu_h} \phi_h(y).$$

Indem man die ganze Zahl N_β so gross wählt, dass $N_\beta \geqq \beta$ ist und dass $\frac{1}{N_\beta}$ dem Intervall $(0 \ldots \varepsilon_\beta)$ angehört, kann man, abermals das Theorem von Herrn Hilbert anwendend, ganze Zahlen $\gamma - 1$ und ω_β finden, die grösser als N_β sind und die bewirken, dass

$$P_\beta\left(\frac{1}{\gamma - 1}, y, \frac{1}{\omega_\beta}\right)$$

eine irreducible Function von y wird.

In dieser Weise fortfahrend erhält man eine unendliche Reihe von ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \varkappa, \lambda, \ldots$, die beständig wachsen, und dabei sind die Polynome

$$P_\varkappa\left(\frac{1}{\lambda - 1}, y, \frac{1}{\omega_\varkappa}\right)$$

irreducible Functionen von y.

Bildet man nunmehr die Gleichung:

$$(\bar{\mathrm{A}}) \qquad 0 = x + y$$

$$+ \sum_{h=1}^{\alpha} u_h x^{\mu_h} \phi_h(x) y^{\mu_h} \phi_h(y) + u_\beta x^{\mu_\beta} \phi_\beta(x) y^{\mu_\beta} \phi_\beta(y) + u_\gamma x^{\mu_\gamma} \phi_\gamma(x) y^{\mu_\gamma} \phi_\gamma(y) + \ldots$$

$$+ u_\varkappa x^{\mu_\varkappa} \phi_\mu(x) y^{\mu_\varkappa} \phi_\varkappa(y) + u_\lambda x^{\mu_\lambda} \phi_\lambda(x) y^{\mu_\lambda} \phi_\lambda(y) + \ldots \text{ in inf.},$$

so ist die rechte Seite eine convergente Potenzreihe von x und y mit rationalen Coefficienten, und es wird daher die Gleichung $(\bar{\mathrm{A}})$ durch eine convergente Potenzreihe mit rationalen Coefficienten:

$$(\bar{\mathrm{R}}) \qquad y = -x + \bar{r}_2 x^2 + \bar{r}_3 x^3 + \ldots$$

befriedigt.

Da die ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa, \lambda, \ldots$ beständig wachsen, so werden die Brüche $\frac{1}{\alpha - 1}, \frac{1}{\beta - 1}, \frac{1}{\gamma - 1}, \ldots, \frac{1}{\varkappa - 1}, \frac{1}{\lambda - 1}, \ldots$ beständig kleiner und müssen daher, von einer bestimmten Stelle an, kleiner als der Convergenzradius der Reihe $(\overline{\mathrm{R}})$ bleiben. Convergirt die Reihe (R) etwa für $x = \frac{1}{\lambda - 1}$, so ergibt sich aus ihr für y ein algebraischer Wert, der sich auch aus der Gleichung (A) berechnen lässt, indem man darin $x = \frac{1}{\lambda - 1}$ setzt. Nun ist aber $\frac{1}{\lambda - 1}$ eine algebraische Zahl der Höhe λ, folglich verschwinden alle Functionen $\phi_k(x)$, für die der Index $k \geq \lambda$ ist. Da ferner

$$u_{\varkappa+1} = 0, \qquad u_{\varkappa+2} = 0\,, \quad \ldots\,, \quad u_{\lambda-1} = 0$$

sein sollte, so erhält man zur Bestimmung von y die Gleichung

$$P_\varkappa\left(\frac{1}{\lambda - 1}, y, \frac{1}{\omega_\varkappa}\right) = 0,$$

die irreducibel und vom Grade $\mu_{\varkappa+1} - 1$ ist.

Hieraus folgt, dass die durch die Reihe $(\overline{\mathrm{R}})$ definirte analytische Function $f(x)$ notwendig transcendent ist. Wäre nämlich $y = f(x)$ eine algebraische Function, so müsste y einer irreducibeln algebraischen Gleichung

$$g(x\,, y) = 0$$

mit rationalen Coefficienten genügen, deren Grad in y gleich Γ sein möge. Wird der Veränderlichen x ein rationaler Wert r erteilt, so sind die zugehörigen Werte von y durch die Gleichung

$$g(r\,, y) = 0$$

bestimmt, jeder einzelne dieser Werte genügt also einer irreducibeln Gleichung, deren Grad $\leq \Gamma$ ist. Bei der durch die Reihe $(\overline{\mathrm{R}})$ definirten Function $f(x)$ genügt aber einer der zu $x = \frac{1}{\lambda - 1}$ gehörenden Werte von $f(x)$ einer irreducibeln Gleichung vom Grade $\mu_{\varkappa+1} - 1$, und man kann, indem man in der Reihe der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ nur weit genug geht, bewirken, dass $\varkappa$ und damit auch a fortiori $\mu_{\varkappa+1} - 1$ grösser als jede gegebene noch so grosse ganze Zahl Γ wird. Mithin führt die Annahme, $f(x)$ sei eine algebraische Function, auf einen Widerspruch.

Zum Schluss möge auf eine Eigenschaft der algebraischen Functionen aufmerksam gemacht werden, die vielleicht dazu dienen kann, diese arithmetisch zu characterisiren. Ist $g(x, y)$ irgend eine ganze rationale Function mit ganzzahligen Coefficienten, so hat die durch die Gleichung $g(x, y) = 0$ definirte algebraische Function y von x die Eigenschaft, dass zu jedem algebraischen Werte a des Argumentes nicht nur algebraische Werte der Function, sondern auch sämtlicher Ableitungen von y nach x gehören. Wird also ein Zweig der Function in der Umgebung der Stelle $x = a$ durch eine Potenzreihe:

$$y = t_0 + t_1(x - a) + t_2(x - a)^2 + \dots$$

dargestellt, so sind die Coefficienten $t_0, t_1, t_2, \dots$ sämtlich algebraische Zahlen. Es würde also zu untersuchen sein, ob es *transcendente* Functionen gibt, die durch eine Potenzreihe mit lauter algebraischen Coefficienten:

$$y = s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \dots$$

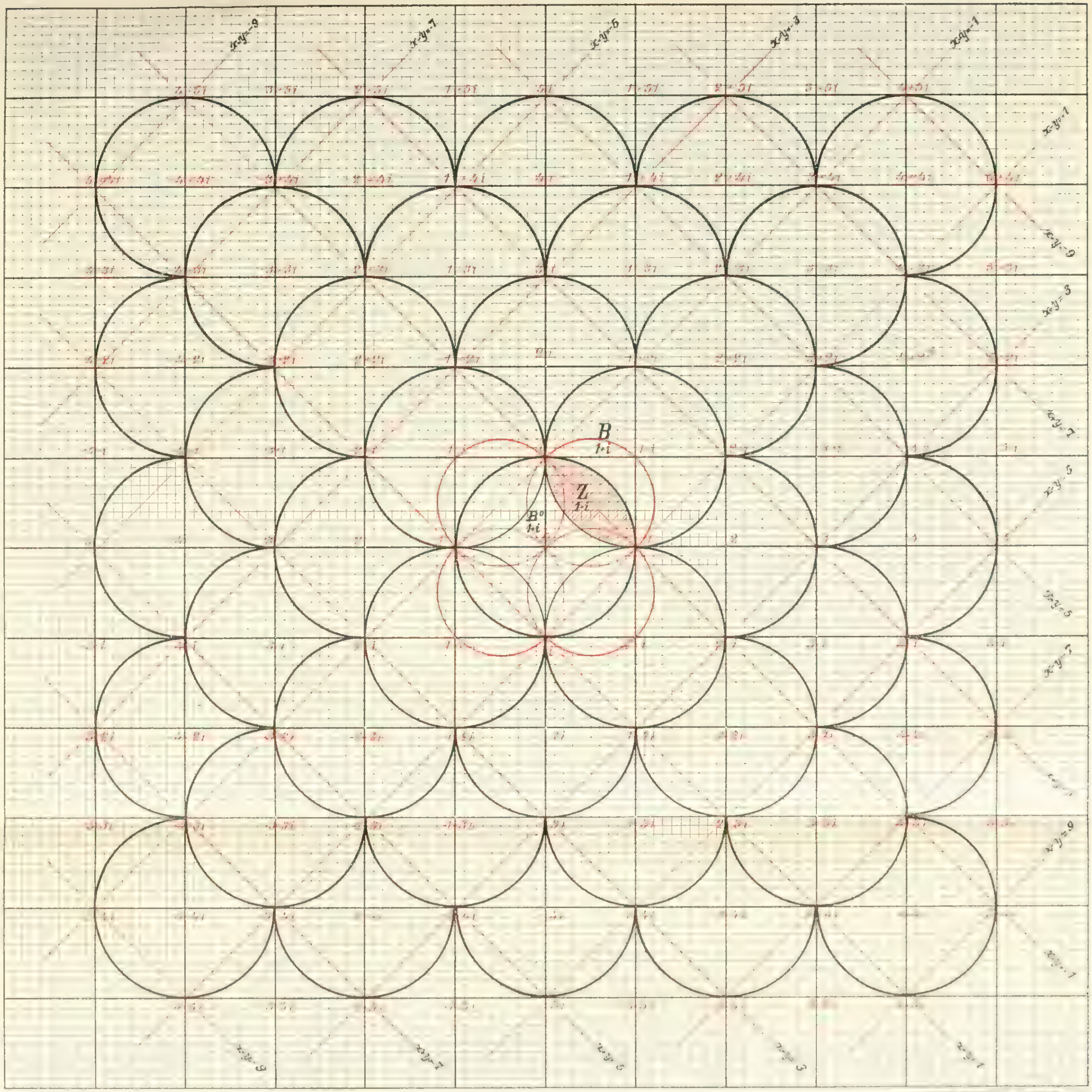
definirt werden, von der Beschaffenheit, dass daraus durch analytische Fortsetzung für jede in einer gewissen Umgebung der Stelle $x = 0$ gelegenen Stelle a, sobald a eine algebraische Zahl ist, Potenzreihen

$$y = t_0 + t_1(x - a) + t_2(x - a)^2 + \dots$$

hervorgehen, deren Coefficienten ebenfalls lauter algebraische Zahlen sind.

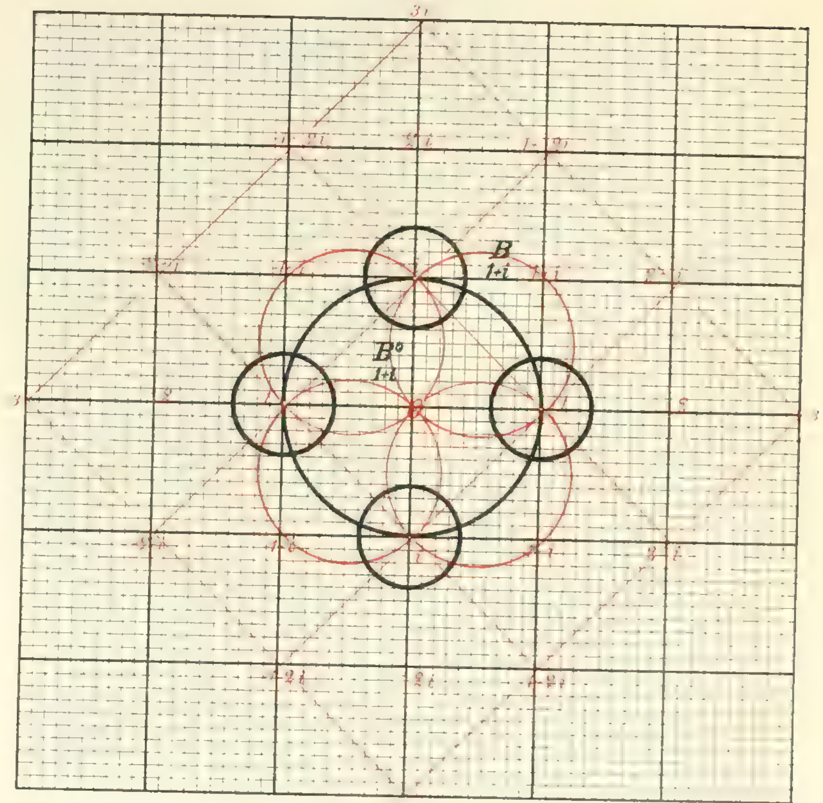
Kiel, im October 1901.

Figur I.



Julius Hurwitz. Über die Reduction der binären quadratischen Formen mit complexen Coefficienten und Variabeln.

Figur II.



CENTRALTRYCKERIET STOCKHOLM F.264

ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

26

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG.
1902.
CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

PARIS
A. HERMANN
8 RUE DE LA SORBONNE

NIELS HENRIK ABEL

IN MEMORIAM

UN MÉMOIRE D'ABEL.

Le mémoire d'ABEL que nous publions ci-après était destiné au Journal de Crelle. Comme le montrent des annotations de la main de CRELLE, le mémoire était arrivé à sa destination, mais CRELLE, on ne sait pour quelle raison, n'en a publié que le § 1. Le manuscrit provient de la collection MANZONI-BORGHESI qui a été vendue à Rome en 1894. Dans le catalogue de vente (Catalogo degli autografi MANZONI-BORGHESI appartenuti al fu CONTE GIACOMO MANZONI, Anno 4, catalogo N:o 46, Roma 1894) on retrouve ce manuscrit sous le n:o 2 et avec l'indication qu'il provient de la collection de LIBRI. Dans la collection des manuscrits du Journal de Crelle que possède la bibliothèque de l'académie des sciences de BERLIN, et où, comme on sait, les manuscrits originaux d'ABEL sont remplacés par des transcriptions faites à Berlin, la copie du présent mémoire est en défaut, même pour la partie du mémoire qui a été publiée.

En publiant le § 1 CRELLE lui a donné le titre *Théorèmes sur les fonctions elliptiques* (Crelle Journal, B. 4, p. 194. SYLOW et LIE t. 1, p. 508). Le commencement du § 2 se retrouve changé et raccourci en partie dans le troisième paragraphe des *Fragments sur les fonctions elliptiques* que SYLOW et LIE (t. 2, p. 251) ont publiés pour la première fois. La formule (40) est identique à la dernière formule donnée dans ce fragment. La continuation et la fin du § 2 n'ont pas été retrouvées autre part sous cette forme: le résultat pourtant n'est pas resté inconnu.

Le commencement du § 3 se retrouve presque sans changement dans la *Démonstration de quelques formules elliptiques* I (HOLMBOE, t. 2, p. 210, SYLOW et LIE, t. 2, p. 194). La suite se trouve, sous une forme un peu modifiée, dans le *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques* (CRELLE, HOLMBOE, SYLOW et LIE. Chez SYLOW et LIE, t. 1, p. 533 et suivantes).

Le § 4 se retrouve dans les *Fragments sur les fonctions elliptiques* 2 ainsi que dans *Précis* . . . (SYLOW et LIE, t. 1, p. 523).

Le commencement du § 5 contient à peu près la même chose que *Fragments* . . . 1. La circonstance que le théorème 15 se trouve dans cette combinaison paraît confirmer la supposition faite par SYLOW dans la note au *Précis* . . ., p. 526 et 527, qu'ABEL à la page 527 pensait à *l'équation modulaire.* Le théorème n'a pas été retrouvé parmi les publications d'ABEL. Pourtant il n'est guère resté inconnu de ceux qui se sont occupés de cette matière.

Le théorème final 16 n'a pas non plus été retrouvé autre part chez ABEL: il se rapporte comme on voit à la multiplication complexe.

Si la publication de ce manuscrit n'apporte pas à la science actuelle des résultats nouveaux, elle semble pourtant d'une très grande valeur pour l'étude de l'enchaînement et du développement des idées d'ABEL. On ne peut s'empêcher de penser que, si CRELLE avait publié le mémoire en entier, les *Recherches sur les fonctions elliptiques* auraient constitué, dès le début, une doctrine plus complète et plus achevée, de nature à faire ressortir ABEL aux yeux de ses contemporains comme le vrai et principal créateur de la théorie des fonctions elliptiques.

RECHERCHES SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

(par M. N. H. ABEL).

SECOND MÉMOIRE.

Dans les »recherches sur les fonctions elliptiques» insérées dans le tome second de ce journal j'ai fait voir comment on pourra toujours résoudre l'équation du degré $(2n+1)^2$ d'où dépend la division en $2n+1$ parties égales d'une fonction elliptique; mais je me suis contenté à démontrer seulement la possibilité d'une telle résolution, sans entrer dans des détails sur l'expression des racines. Une note de M. JACOBI insérée dans le t. III, p. 86, m'a fait revenir sur cet objet; et étant parvenu à cette occasion à plusieurs propriétés nouvelles des fonctions elliptiques je vais continuer ici mes premières recherches.

§ 1.

En faisant $\varphi\theta = x$ on aura selon ce qu'on a vu dans le § III du mémoire cité

$$\varphi(2n+1)\theta = R \tag{1}$$

où R une fonction rationnelle de x, le numérateur étant du degré $(2n+1)^2$ et le dénominateur du degré $(2n+1)^2 - 1$. L'équation (1) est donc du degré $(2n+1)^2$ et les racines pourront être représentées par la formule

$$x = \varphi\left(\theta + \frac{2m\omega + 2\mu\varpi i}{2n+1}\right) \tag{2}$$

en donnant à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$ incl.

Soient pour abréger

$$(3) \qquad \frac{2\omega}{2n+1} = \alpha, \qquad \frac{2\varpi i}{2n+1} = \beta$$

l'expression des racines sera:

$$(4) \qquad x = \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta).$$

Cela posé nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème I. Soit $\psi\theta$ une fonction *entière* quelconque des quantités $\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)$ qui reste la même en changeant θ en $\theta + \alpha$ et $\theta + \beta$. Soit ν l'exposant le plus grand de la quantité $\varphi\theta$ dans la fonction $\psi\theta$; on aura toujours:

$$(5) \qquad \psi\theta = p + q \,.\, f(2n+1)\theta \,.\, F(2n+1)\theta$$

où p et q sont deux fonctions *entières* de $\varphi(2n+1)\theta$; la première du degré ν et la seconde du degré $\nu - 2$.

Démonstration. En vertu de la formule (10), pag. 105, on a

$$(6) \qquad \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = \frac{\varphi\theta \,.\, f(m\alpha + \mu\beta) \,.\, F(m\alpha + \mu\beta) + \varphi(m\alpha + \mu\beta) \,.\, f\theta \,.\, F\theta}{1 + e^2c^2 \,.\, \varphi^2(m\alpha + \mu\beta) \,.\, \varphi^2\theta}$$

d'où il suit qu'on pourra exprimer $\psi\theta$ rationnellement en $\varphi\theta$ et $f\theta \,.\, F\theta$. Or le carré de $f\theta \,.\, F\theta$ est rationnel en $\varphi\theta$, savoir

$$(f\theta \,.\, F\theta)^2 = (1 - c^2\varphi^2\theta)(1 + e^2\varphi^2\theta),$$

donc on pourra faire en sorte que l'expression de $\psi\theta$ ne contienne la quantité $f\theta \,.\, F\theta$ qu'à la première puissance. On pourra donc faire:

$$(7) \qquad \psi\theta = \psi_1\{\varphi\theta\} + \psi_2\{\varphi\theta\} \,.\, f\theta \,.\, F\theta$$

où $\psi_1\{\varphi\theta\}$ et $\psi_2\{\varphi\theta\}$ sont des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$.

Si l'on met $\omega - \theta$ à la place de θ on aura en remarquant que $\varphi(\omega - \theta) = \varphi\theta$; $f(\omega - \theta) = -f\theta$; $F(\omega - \theta) = F\theta$:

$$(8) \qquad \psi(\omega - \theta) = \psi_1\{\varphi\theta\} - \psi_2\{\varphi\theta\} \,.\, f\theta \,.\, F\theta.$$

Des équations (7) et (8) on déduit:

$$(9) \qquad \psi_1\{\varphi\theta\} = \frac{1}{2}.\{\psi\theta + \psi(\omega - \theta)\};$$

$$(10) \qquad \psi_2\{\varphi\theta\}.f\theta.F\theta = \frac{1}{2}.\{\psi\theta - \psi(\omega - \theta)\}.$$

Considérons d'abord la fonction $\psi_1\{\varphi\theta\}$. En y mettant $\theta + \alpha$ au lieu de θ il viendra:

$$\psi_1\{\varphi(\theta + \alpha)\} = \frac{1}{2}\{\psi(\theta + \alpha) + \psi(\omega - \alpha - \theta)\};$$

or on a $\psi(\theta + \alpha) = \psi\theta$ et par conséquent aussi en mettant $\omega - \alpha - \theta$ au lieu de θ

$$\psi(\omega - \theta) = \psi(\omega - \alpha - \theta)$$

donc:

$$\psi_1\{\varphi(\theta + \alpha)\} = \frac{1}{2}\{\psi\theta + \psi(\omega - \theta)\}$$

c'est-à-dire

$$\psi_1\{\varphi(\theta + \alpha)\} = \psi_1\{\varphi\theta\}$$

On aura de la même manière:

$$\psi_1\{\varphi(\theta + \beta)\} = \psi_1\{\varphi\theta\}.$$

La première de ces équations donne en mettant successivement $\theta + \alpha$, $\theta + 2\alpha$, ... au lieu de θ:

$$(11) \qquad \psi_1\{\varphi(\theta + m\alpha)\} = \psi_1\{\varphi\theta\}$$

où m est un nombre entier quelconque. De même la seconde équation donne:

$$\psi_1\{\varphi(\theta + \mu\beta)\} = \psi_1\{\varphi\theta\}$$

d'où l'on tire en mettant $\theta + m\alpha$ au lieu de θ et ayant égard à l'équation (11):

$$(12) \qquad \psi_1\{\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)\} = \psi_1\{\varphi\theta\}.$$

La fonction $\psi_1\{\varphi\theta\}$ reste donc la même en substituant au lieu de $\varphi\theta$ une autre racine quelconque de l'équation (1). La formule (12) donne

en attribuant à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$ et puis ajoutant:

$$(13) \qquad \psi_1\{\varphi\theta\} = \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \psi_1\{\theta + m\alpha + \mu\beta\}.$$

Le second membre de cette équation est une fonction *rationnelle* et *symétrique* des racines de l'équation (1), donc on pourra l'exprimer rationnellement en les coefficients de cette équation, c'est-à-dire en $\varphi(2n+1)\theta$. Soit donc

$$\psi_1\{\varphi\theta\} = p.$$

La quantité p sera une fonction rationnelle de $\varphi(2n+1)\theta$. Or je dis que p doit toujours être entière. En effet soit $\varphi(2n+1)\theta = y$ et $p = \frac{p'}{q'}$ où p' et q' sont des fonctions entières de y sans diviseur commun. Soit $y = \varphi(2n+1)\delta$ une racine de l'équation $q' = 0$; la quantité

$$p' = \frac{1}{2}\{\psi\theta + \psi(\omega - \theta)\}$$

sera infinie en faisant $\theta = \delta$, donc on doit avoir $\psi\delta + \psi(\omega - \delta) = \frac{1}{0}$. Maintenant il est évident par la forme de la fonction $\psi\theta$ que cette équation ne peut pas subsister à moins qu'une quantité de la forme $\varphi(\delta + m\alpha + \mu\beta)$ ou $\varphi(\omega - \delta + m\alpha + \mu\beta)$ ait une valeur infinie. Soit donc $\varphi(\delta + m\alpha + \mu\beta) = \frac{1}{0}$, on aura en vertu de l'équation (30) pag. 113:

$$\delta = \left(m' + \frac{1}{2}\right)\omega + \left(n' + \frac{1}{2}\right)\varpi i - m\alpha - \mu\beta$$

où m' et n' sont des nombres entiers; or cette valeur de δ donne:

$$\varphi(2n+1)\delta$$
$$= \varphi\left\{[(2n+1)m' + n - 2m]\omega + [(2n+1)n' + n - 2\mu]\varpi i + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\right\}$$

c'est-à-dire ((26) pag. 111): $\varphi(2n+1)\delta = \frac{1}{0}$. Or cela est impossible car une racine quelconque de l'équation $q' = 0$ doit être finie. On trouvera de même que $\varphi(\omega - \delta + m\alpha + \mu\beta)$ donnera $\varphi(2n+1)\delta = \frac{1}{0}$. La quantité p est donc une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$.

Considérons maintenant l'équation (10). En divisant les deux membres par $f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta$ on aura:

$$\frac{\psi_2\{\varphi\theta\}.f\theta.F\theta}{f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\psi\theta - \psi(\omega-\theta)}{f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta}.$$

Comme on a vu (45) pag. 117 on aura

$$f(2n+1)\theta = f\theta.u, \qquad F(2n+1)\theta = F\theta.v$$

où u et v sont des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$; donc le second membre de l'équation précédente sera une fonction rationnelle de $\varphi\theta$. En la désignant par $\chi\{\varphi\theta\}$ on aura:

$$\chi\{\varphi\theta\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\psi\theta - \psi(\omega-\theta)}{f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta}.$$

En mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, il viendra

$$\psi(\theta+\alpha) = \psi\theta, \qquad \psi(\omega-(\theta+\alpha)) = \psi(\omega-\theta)$$

$$f(2n+1)(\theta+\alpha) = f((2n+1)\theta + 2m\omega + 2\mu\varpi i) = f(2n+1)\theta,$$

$$F(2n+1)(\theta+\alpha) = F((2n+1)\theta + 2m\omega + 2\mu\varpi i) = F(2n+1)\theta;$$

donc on aura $\chi\{\varphi(\theta+\alpha)\} = \chi\{\varphi\theta\}$. De la même manière on trouvera $\chi\{\varphi(\theta+\beta)\} = \chi\{\varphi\theta\}$. On en déduit de même que plus haut pour la fonction $\psi_1\{\varphi\theta\}$ que $\chi\{\varphi\theta\}$ pourra être exprimée par une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$. Soit donc:

$$\chi\{\varphi\theta\} = q,$$

on aura

$$\psi_2\{\varphi\theta\}.f\theta.F\theta = q.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta.$$

Par conséquent enfin

$$\psi\theta = p + q.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta \tag{14}$$

où p et q sont des fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$. Pour trouver les degrés de ces fonctions, soit $(\varphi\theta)^\nu.\chi\theta$ le terme dans $\psi\theta$ où $\varphi\theta$ est élevé à la plus haute puissance; on aura en posant $\varphi\theta$ infini

$$\psi\theta = A.(\varphi\theta)^\nu$$

où A est une constante. On aura de même

$$\psi(\omega - \theta) = A'.(\varphi\theta)^\nu$$

et par suite:

$$p = \frac{1}{2}(A + A')(\varphi\theta)^\nu;$$

mais pour $\varphi\theta$ infini on a $\varphi(2n + 1)\theta = B.\varphi\theta$ où B est constante; d'où il suit que p sera du degré ν par rapport à $\varphi(2n + 1)\theta$. On démontrera de la même manière que la fonction q sera du degré $\nu - 2$ tout au plus. Notre théorème est donc démontré.

Dans le cas où la quantité $\varphi\theta$ ne monte qu'à la première puissance dans $\psi\theta$ on a $\nu = 1$; par conséquent q sera du degré -1, c'est-à-dire $q = 0$. On a donc alors:

$$\psi\theta = A + B.\varphi(2n + 1)\theta \tag{15}$$

où A et B sont des quantités constantes qu'on déterminera facilement en faisant $\theta = 0$ et $\varphi\theta = \frac{1}{0}$.

Soit par ex.: $\pi\theta$ le produit d'un nombre quelconque des racines de l'équation (1) et faisons

$$\psi\theta = \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta),$$

il est clair qu'on aura $\psi(\theta) = \psi(\theta + \alpha) = \psi(\theta + \beta)$ en remarquant que $\pi(\theta + (2n + 1)\alpha + \mu\beta) = \pi(\theta + \mu\beta)$ et $\pi(\theta + (2n + 1)\beta + m\alpha) = \pi(\theta + m\alpha)$. Donc:

$$\sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = A + B.\varphi(2n + 1)\theta. \tag{16}$$

On doit remarquer que l'une des quantités A et B est toujours égale à zéro. On a $A = 0$ si le nombre des facteurs de $\pi\theta$ est un nombre impair et $B = 0$ si ce nombre est pair. Dans ce dernier cas la quantité $\psi\theta$ est donc indépendante de la valeur de θ; par conséquent en faisant $\theta = 0$:

$$\sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(m\alpha + \mu\beta). \tag{17}$$

Ainsi si l'on fait $\pi\theta = \varphi\theta.\varphi(\theta + k\alpha + k'\beta)$ on a:

$$(18) \qquad \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta).\varphi(\theta + (m + k)\alpha + (\mu + k')\beta)$$
$$= \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \varphi(m\alpha + \mu\beta).\varphi((m + k)\alpha + (\mu + k')\beta),$$

k et k' sont des nombres entiers quelconques moindres que $2n + 1$. Cependant on ne peut pas supposer à la fois $k = 0$; $k' = 0$; car alors $\pi\theta = (\varphi\theta)^2$ et par suite $\nu = 2$ tandis qu'on doit avoir $\nu = 1$.

Entièrement de la même manière que nous avons démontré le théorème précédent on pourra encore établir les deux suivants:

Théorème II. Soit $\psi\theta$ une fonction quelconque *entière* des quantités de la forme $f(\theta + m\alpha + \mu\beta)$ telle que $\psi(\theta) = \psi(\theta + \alpha) = \psi(\theta + \beta)$, on aura:

$$\psi\theta = p + q.\varphi(2n + 1)\theta.F(2n + 1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $f(2n + 1)\theta$; la première du degré ν et la seconde du degré $\nu - 2$ tout au plus, en désignant par ν le plus grand exposant de $f\theta$ dans $\psi\theta$.

Théorème III. Soit $\psi\theta$ une fonction quelconque entière des quantités de la forme $F(\theta + m\alpha + \mu\beta)$ telle que $\psi\theta = \psi(\theta + \alpha) = \psi(\theta + \beta)$, on aura $\psi\theta = p + q.\varphi(2n + 1)\theta.f(2n + 1)\theta$, où p et q sont des fonctions entières de $F(2n + 1)\theta$; la première du degre ν et la seconde du degré $\nu - 2$ tout au plus, en désignant par ν le plus grand exposant de $F\theta$ dans $\psi\theta$.

§ 2.

A l'aide du théorème I, démontré dans le paragraphe précédent, il est facile de parvenir au théorème de M. Jacobi sur la forme des racines de l'équation:

$$\varphi(2n + 1)\theta = R.$$

Considérons l'expression:

$$(19) \qquad \psi\theta = \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \delta^{mk+\mu k'}.\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)$$

où $\delta = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + i.\sin\frac{2\pi}{2n+1}$ et k et k' sont deux nombres entiers. En mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, on aura

$$\psi(\theta+\alpha) = \sum_{0}^{2n}{}_{\mu}\, \delta^{\mu k'}.\sum_{0}^{2n}{}_{m}\, \delta^{mk}\varphi(\theta+(m+1)\alpha+\mu\beta);$$

or on a

$$\sum_{0}^{2n}{}_{m}\, \delta^{mk}\varphi(\theta+(m+1)\alpha+\mu\beta) = \sum_{1}^{2n} \delta^{(m-1)k}\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta)$$
$$+\ \delta^{2nk}\varphi(\theta+(2n+1)\alpha+\mu\beta),$$

mais

$$\varphi(\theta+\mu\beta+(2n+1)\alpha) = \varphi(\theta+\mu\beta+2\omega) = \varphi(\theta+\mu\beta),$$

donc en remarquant que $\delta^{2nk} = \delta^{-k}$:

$$\sum_{0}^{2n}{}_{m}\, \delta^{mk}\varphi(\theta+(m+1)\alpha+\mu\beta) = \delta^{-k}.\sum_{0}^{2n}{}_{m}\, \varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta).$$

L'expression de $\psi(\theta+\alpha)$ deviendra donc en substituant:

(20) $$\psi(\theta+\alpha) = \delta^{-k}.\psi\theta.$$

Entièrement de la même manière on aura:

(21) $$\psi(\theta+\beta) = \delta^{-k'}.\psi\theta.$$

En élevant chaque membre de (20) à la $(2n+1)^{e}$ puissance et remarquant que $\delta^{-k(2n+1)} = 1 = \delta^{-k'(2n+1)}$ il viendra:

$$\{\psi\theta\}^{2n+1} = \{\psi(\theta+\alpha)\}^{2n+1} = \{\psi(\theta+\beta)\}^{2n+1}.$$

D'où il suit que le théorème I^er est applicable à la fonction $(\psi\theta)^{2n+1}$. On aura donc:

(22) $$(\psi\theta)^{2n+1} = p + q.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta$$

où p et q sont des fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$.

L'expression (19) de $\psi\theta$ nous montre que $\varphi\theta$ se trouve à la première puissance seulement dans cette fonction; donc $\varphi\theta$ est élevé à la puissance $2n+1$ dans la fonction $(\psi\theta)^{2n+1}$. De là il suit que p et q seront respec-

tivement du degré $2n+1$ et $2n-1$ tout au plus. Comme nous allons voir q n'est effectivement que du degré $2n-2$.

En mettant dans l'expression de $(\psi\theta)^{2n+1}$ $\omega-\theta$ au lieu de θ on aura en remarquant que

$$\varphi(2n+1)(\omega-\theta)=\varphi(2n+1)\theta,$$

$$f(2n+1)(\omega-\theta)=-f(2n+1)\theta, \qquad F(2n+1)(\omega-\theta)=F(2n+1)\theta$$

cette formule:

$$\{\psi(\omega-\theta)\}^{2n+1}=p-q\,.\,f(2n+1)\theta\,.\,F(2n+1)\theta;$$

donc:

$$(23)\qquad \begin{cases} 2p=(\psi\theta)^{2n+1}+\{\psi(\omega-\theta)\}^{2n+1}, \\ 2q\,.\,f(2n+1)\theta\,.\,F(2n+1)\theta=(\psi\theta)^{2n+1}-\{\psi(\omega-\theta)\}^{2n+1}. \end{cases}$$

Mettons ici $-\theta$ au lieu de θ et désignons les valeurs correspondantes de p et q par p' et q', on aura, comme il est facile de déduire de la formule (19),

$$\psi(-\theta)=-\psi(\omega-\theta); \qquad \psi(\omega+\theta)=-\psi\theta,$$

donc

$$p'=-p, \qquad q'=q.$$

Maintenant puisque $\varphi(2n+1)\theta$ change de signe avec θ, il s'ensuit que p ne contiendra que des puissances impaires et q seulement des puissances paires. On aura donc

$$(24)\qquad \begin{cases} p=\left(a_0+a_1\{\varphi(2n+1)\theta\}^2+a_2\{\varphi(2n+1)\theta\}^4+\dots\right. \\ \qquad\qquad\qquad \left.+\,a_n\{\varphi(2n+1)\theta\}^{2n}\right).\varphi(2n+1)\theta, \\ q=b_0+b_1\{\varphi(2n+1)\theta\}^2+b_2\{\varphi(2n+1)\theta\}^4+\dots \\ \qquad\qquad\qquad +\,b_{n-1}\,.\,\{\varphi(2n+1)\theta\}^{2n-2} \end{cases}$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$; $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ sont des coefficients indépendants de θ. Ces coefficients sont des fonctions des quantités $\varphi(m\alpha+\mu\beta)$ et on pourra les déterminer en développant les deux membres de l'équation (22) suivant les puissances de $\varphi\theta$. Or le procédé serait fort compliqué. Nous donnerons tout à l'heure une autre méthode plus simple.

Connaissant ainsi la valeur de $(\psi\theta)^{2n+1}$ en $\varphi(2n+1)\theta$, on en tire celle de $\psi\theta$ en extrayant la racine $(2n+1)^e$ savoir

$$(25)\qquad \psi\theta = \sqrt[2n+1]{p + q \,.\, f(2n+1)\theta \,.\, F(2n+1)\theta},$$

$\psi\theta$ est une fonction linéaire des racines. Elle prend différentes formes selon les valeurs différentes de k et k'. En donnant à ces nombres toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à $2n$ on connait la valeur de $(2n+1)^2$ fonctions différentes. Nous allons voir qu'on pourra en déduire les racines elles-mêmes.

Désignons la valeur de $p + qf(2n+1)\theta \,.\, F(2n+1)\theta$ qui répond à k et k' par $\chi(k, k')$, on aura:

$$(26)\qquad \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \partial^{mk+\mu k'} \,.\, \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = \sqrt[2n+1]{\chi(k, k')}.$$

Multiplions cette équation par $\partial^{-m'k-\mu'k'}$ et prenons ensuite la somme par rapport à k et k' depuis zéro jusqu'à $2n$, on aura:

$$\sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \sum_0^{2n}{}_k \sum_0^{2n}{}_{k'} \partial^{(m-m')k+(\mu-\mu')k'} \,.\, \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = \sum_0^{2n}{}_k \sum_0^{2n}{}_{k'} \sqrt[2n+1]{\chi(k, k')} \,.\, \partial^{-m'k-\mu'k'}.$$

Maintenant on a:

$$\sum_0^{2n}{}_k \sum_0^{2n}{}_{k'} \partial^{(m-m')k+(\mu-\mu')k'} = \sum_0^{2n}{}_k \partial^{(m-m')k} \,.\, \sum_0^{2n}{}_{k'} \partial^{(\mu-\mu')k'}$$

$$= \left\{1 + \partial^{m-m'} + \partial^{2(m-m')} + \ldots + \partial^{2n(m-m')}\right\} . \left\{1 + \partial^{\mu-\mu'} + \partial^{2(\mu-\mu')} + \ldots + \partial^{2n(\mu-\mu')}\right\}.$$

Quel que soit le nombre impair $2n+1$ premier ou non, si en même temps m' et μ' sont positifs et moindres que $2n+1$ cette quantité se réduit à zéro pour toutes les valeurs de m, m', μ, μ' excepté lorsqu'on a à la fois $m = m'$ et $\mu = \mu'$; dans ce cas elle devient $(2n+1)^2$. De là il suit que le premier membre de l'équation (26) se réduira à

$$(2n+1)^2 . \varphi(\theta + m'\alpha + \mu'\beta).$$

Par conséquent on aura en changeant m' et μ' en m et μ

$$(27)\qquad \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_0^{2n}{}_k \sum_0^{2n}{}_{k'} \partial^{-mk-\mu k'} . \sqrt[2n+1]{\chi(k, k')};$$

voici donc l'expression d'une racine quelconque de l'équation

$$\varphi(2n+1)\theta - R = 0.$$

En faisant $m = 0$, $\mu = 0$ on aura la valeur de $\varphi\theta$ savoir

$$\varphi\theta = \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \sum_0^{2n}{}_k \sum_0^{2n}{}_{k'} \sqrt[2n+1]{\chi(k\,,\,k')}. \tag{28}$$

L'expression des racines contient comme on voit $(2n+1)^2$ radicaux différens. Or on peut les exprimer rationnellement en deux d'entre eux. Soient ρ et ρ_1 les deux valeurs de $\chi(k\,,k')$ qui répondent respectivement à $k = 1$, $k' = 0$ et $k = 0$, $k' = 1$, en sorte que:

$$\begin{cases} \rho = \left\{ \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \, \partial^m . \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta) \right\}^{2n+1}, \\ \rho_1 = \left\{ \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \, \partial^\mu . \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta) \right\}^{2n+1}, \end{cases} \tag{29}$$

alors je dis qu'on aura:

$$\psi\theta = S . \rho^{-1+\frac{k}{2n+1}} . \rho_1^{-1+\frac{k'}{2n+1}} \tag{30}$$

où S désigne une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$ et $f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta$. Soient $\sqrt[2n+1]{\rho} = \psi_1\theta$, $\sqrt[2n+1]{\rho_1} = \psi_2\theta$, on aura en vertu des équations (20), (21) en faisant $k = 1$, $k' = 0$; $k = 0$, $k' = 1$

$$\psi_1(\theta+\alpha) = \partial^{-1} . \psi_1\theta; \qquad \psi_2(\theta+\beta) = \partial^{-1} . \psi_2\theta;$$

$$\psi_1(\theta+\beta) = \psi_1\theta; \qquad \psi_2(\theta+\alpha) = \psi_2\theta$$

donc:

$$\{\psi_1(\theta+\alpha)\}^{-k+2n+1} = \partial^{+k} . (\psi_1\theta)^{-k+2n+1},$$

$$\{\psi_2(\theta+\beta)\}^{-k'+2n+1} = \partial^{+k'} . (\psi_2\theta)^{-k'+2n+1},$$

et de là en ayant égard à la formule (20)

$$\psi(\theta+\alpha) . \{\psi_1(\theta+\alpha)\}^{2n+1-k} . \{\psi_2(\theta+\alpha)\}^{2n+1-k'} = \psi\theta(\psi_1\theta)^{2n+1-k} . (\psi_2\theta)^{2n+1-k'},$$

$$\psi(\theta+\beta) . \{\psi_1(\theta+\beta)\}^{2n+1-k} . \{\psi_2(\theta+\beta)\}^{2n+1-k'} = \psi\theta(\psi_1\theta)^{2n+1-k} . (\psi_2\theta)^{2n+1-k'},$$

d'où il suit en vertu du théorème premier qu'on peut faire:

$$\psi\theta . (\psi_1\theta)^{2n+1-k} . (\psi_2\theta)^{2n+1-k'} = u + v . f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta = S$$

où u et v sont des fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$ et par suite

$$(31) \qquad \psi\theta = (u + v \,.\, f(2n+1)\theta \,.\, F(2n+1)\theta) \,.\, \frac{\rho^{\frac{k}{2n+1}} \cdot \rho_1^{\frac{k'}{2n+1}}}{\rho \cdot \rho_1} = \sqrt[2n+1]{\chi(k\,,\,k')}.$$

En vertu de cette formule le second membre de l'équation (27) deviendra une fonction rationnelle de $\varphi(2n+1)\theta$, $f(2n+1)\theta \,.\, F(2n+1)\theta$, $\sqrt[2n+1]{\rho}$ et $\sqrt[2n+1]{\rho_1}$ et cette fonction satisfait à l'équation (1) en donnant aux radicaux $\sqrt[2n+1]{\rho}$ et $\sqrt[2n+1]{\rho_1}$ toutes leurs valeurs.

Revenons maintenant à la détermination des fonctions p et q dans la formule (22). Faisons $\theta = \frac{\varepsilon}{2n+1}$, nous aurons:

$$(32) \qquad \left\{\psi\left(\frac{\varepsilon}{2n+1}\right)\right\}^{2n+1} = a_0\varphi\varepsilon + a_1(\varphi\varepsilon)^3 + \ldots + a_n(\varphi\varepsilon)^{2n+1}$$
$$+ \left\{b_0 + b_1(\varphi\varepsilon)^2 + \ldots + b_{n-1}(\varphi\varepsilon)^{2n-2}\right\} . f\varepsilon \,.\, F\varepsilon \,.$$

Cela posé supposons qu'on donne à ε une telle valeur que $\psi\left(\frac{\varepsilon}{2n+1}\right) = 0$, on aura l'équation:

$$(33) \qquad 0 = a_0\varphi\varepsilon + a_1(\varphi\varepsilon)^3 + \ldots + a_n(\varphi\varepsilon)^{2n+1}$$
$$+ \left\{b_0 + b_1(\varphi\varepsilon)^2 + \ldots + b_{n-1}(\varphi\varepsilon)^{2n-1}\right\} . f\varepsilon \,.\, F\varepsilon$$

que nous représenterons par $v = 0$.

Maintenant il est clair d'après la forme du premier membre de l'équation (32) que l'équation $v = 0$ aura encore lieu en la différentiant par rapport à ε un nombre quelconque de fois moindre que $2n+1$. On obtiendra de cette manière ces $2n+1$ équations:

$$(35) \qquad v = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial\varepsilon} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial\varepsilon^2} = 0 \;, \quad \ldots \;, \quad \frac{\partial^{2n} v}{\partial\varepsilon^{2n}} = 0,$$

qui sont toutes linéaires par rapport aux inconnues $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$. En supposant ε connu ces équations donneront les coefficients précédents en l'un d'entre eux; il faut donc encore une équation. Or si l'on divise les deux membres de l'équation par $(\varphi\theta)^{2n+1}$ et qu'on suppose ensuite

$\varphi\theta = \frac{1}{0}$ le premier membre se réduit à 1 et le second à $a_n \frac{1}{(2n+1)^{2n+1}}$ à cause de la formule $\frac{\varphi(2n+1)\theta}{\varphi\theta} = \frac{1}{2n+1}$ pour $\varphi\theta = \frac{1}{0}$. On aura donc:

$$a_n = (2n+1)^{2n+1}. \tag{36}$$

Les mêmes équations (35) donneront encore une équation en $\varphi\varepsilon$ seul; mais comme elle doit avoir lieu quelle que soit la valeur de k et k_1 il sera impossible d'en tirer la valeur de $\varphi\varepsilon$ qui doit avoir effectivement lieu. Or on peut trouver cette quantité de la manière suivante: Soit

$$\pi\theta = \psi\theta \,.\, \psi(-\theta) \tag{37}$$

on aura

$$\pi(\theta + \alpha) = \psi(\theta + \alpha) \,.\, \psi(-\theta - \alpha),$$

mais selon (20) on a $\psi(\theta + \alpha) = \delta^{-k} . \psi\theta$ et de là en mettant $-\theta - \alpha$ au lieu de θ $\psi(-\theta - \alpha) = \delta^{k} . \psi(-\theta)$ donc en substituant $\pi(\theta + \alpha) = \pi\theta$. De la même manière on prouvera que $\pi(\theta + \beta) = \pi\theta$. Donc en vertu du Ier théorème

$$\begin{aligned}\psi\theta \,.\, \psi(-\theta) = A + B \,.\, \varphi(2n+1)\theta + C \,.\, \{\varphi(2n+1)\theta\}^2 \\ + D \,.\, f(2n+1)\theta \,.\, F(2n+1)\theta.\end{aligned}$$

Si l'on met $\omega - \theta$ au lieu de θ le premier membre reste le même et le second reste aussi le même en changeant seulement le signe de D. Ce coefficient est donc égal à zéro. En remarquant de plus que le second membre doit rester invariable en changeant le signe de θ et celui de $\varphi(2n+1)\theta$, on aura encore $B = 0$ et par conséquent

$$\psi\theta \,.\, \psi(-\theta) = A + C \,.\, \{\varphi(2n+1)\theta\}^2.$$

En faisant $\theta = 0$ on aura $A = \{\psi(0)\}^2$; en faisant $\varphi\theta = \frac{1}{0}$ on aura $C = -(2n+1)^2$ et en faisant $\theta = \frac{\varepsilon}{2n+1}$, $\psi\theta = 0$ et $A + C \,.\, (\varphi\varepsilon)^2 = 0$; on aura donc:

$$\left\{\begin{aligned}&\psi\theta \,.\, \psi(-\theta) = (2n+1)^2 \{(\varphi\varepsilon)^2 - \{\varphi(2n+1)\theta\}^2\} \quad \text{et} \\ &\varphi\varepsilon = \pm \frac{1}{2n+1} \,.\, \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \delta^{mk+\mu k_1} \,.\, \varphi(m\alpha + \mu\beta).\end{aligned}\right. \tag{38}$$

On connait donc $\varphi\varepsilon$ au signe près, or ce-ci n'influe en rien sur la valeur des coefficients $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$. En effet il n'est pas difficile de voir qu'on peut les exprimer *rationnellement* en $(\varphi\varepsilon)^2$.

Le coefficient b_0 se trouve immédiatement en faisant $\varepsilon = 0$ savoir

$$(39)\quad b_0 = \left\{ \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \, \delta^{mk+\mu k'} . \varphi(m\alpha + \mu\beta) \right\}^{2n+1} = \pm (2n+1)^{2n+1} . (\varphi\varepsilon)^{2n+1}.$$

Les fonctions p et q jouissent d'une propriété remarquable qu'on peut déduire sur le champ de l'équation (38). En effet en élevant les deux membres à la $(2n+1)^e$ puissance on aura

$$\{\psi\theta\}^{2n+1} . \{\psi(-\theta)\}^{2n+1} = (2n+1)^{4n+2} \left\{ (\varphi\varepsilon)^2 - \{\varphi(2n+1)\theta\}^2 \right\}^{2n+1}$$

mais

$$\{\psi\theta\}^{2n+1} = p + q . f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta;$$
$$\{\psi(-\theta)\}^{2n+1} = -p + q . f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta,$$

donc en substituant

$$p^2 - q^2 . \{f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta\}^2$$
$$= (2n+1)^{4n+2} \left\{ \{\varphi(2n+1)\theta\}^2 - (\varphi\varepsilon)^2 \right\}^{2n+1}.$$

Soit $\varphi(2n+1)\theta = y$ on aura

$$\{f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta\}^2 = (1 - c^2y^2)(1 + e^2y^2),$$

donc

$$(40)\qquad (a_0 y + a_1 y^3 + \ldots + a_n y^{2n+1})^2$$
$$- (b_0 + b_1 y^2 + \ldots + b_{n-1} y^{2n-2})^2 (1 - c^2y^2)(1 + e^2y^2)$$
$$= (2n+1)^{4n+2} . \{y^2 - \varphi^2\varepsilon\}^{2n+1}.$$

Cette propriété des fonctions p et q suffit pour les déterminer au signe près car l'équation doit avoir lieu pour une valeur quelconque de y, et donnera ainsi $2n + 2$ équations entre les coefficients $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ et $(\varphi\varepsilon)^2$.

Pour donner un exemple, considérons le cas le plus simple où $n = 1$. Dans ce cas on a $\alpha = \frac{2\omega}{3}$, $\beta = \frac{2\varpi i}{3}$

$$\psi\theta = \sum_0^{2}{}_m \sum_0^{2}{}_\mu \, \delta^{mk+\mu k'} . \varphi\left(\theta + \frac{2m\omega + 2\mu\varpi i}{3}\right)$$

ou bien

$$(41)\qquad \psi\theta = \varphi\theta + \partial^k.\varphi\left(\theta + \frac{2\omega}{3}\right) + \partial^{2k}.\varphi\left(\theta + \frac{4\omega}{3}\right)$$

$$+ \partial^{k'}.\varphi\left(\theta + \frac{2\varpi i}{3}\right) + \partial^{k+k'}\varphi\left(\theta + \frac{2\omega + 2\varpi i}{3}\right) + \partial^{2k+k'}\varphi\left(\theta + \frac{4\omega + 4\varpi i}{3}\right)$$

$$+ \partial^{2k'}.\varphi\left(\theta + \frac{4\varpi i}{3}\right) + \partial^{k+2k'}\varphi\left(\theta + \frac{2\omega + 4\varpi i}{3}\right) + \partial^{2k+2k'}\varphi\left(\theta + \frac{4\omega + 4\varpi i}{2}\right).$$

$$\{\psi\theta\}^3 = a_0\varphi 3\theta + a_1(\varphi 3\theta)^2 + b_0 . f3\theta . F3\theta,$$

$$(41')\qquad (a_0 y + a_1 y^3)^2 - b_0^2(1 - c^2y^2)(1 + e^2y^2) = 3^6.(y^2 - f^2)^3$$

où

$$(42)\qquad f = \frac{1}{3}.\sum_0^2{}_m \sum_0^2{}_\mu\, \partial^{mk+\mu k'}\varphi\left\{\frac{2m\omega + 2\mu\varpi i}{3}\right\}.$$

En égalant les coefficients de y^4 dans les deux membres il viendra:

$$2a_0a_1 + b_0^2c^2e^2 = -3^7f^2;$$

maintenant

$$a_1 = 3^3; \qquad b_0 = 3^3f^3,$$

donc

$$a_0 = -\frac{1}{2}\{3f^2 + e^2c^2f^6\}.3^3;$$

on a par suite

$$\{\psi\theta\}^3 = 3^3.\left\{(\varphi 3\theta)^3 - \frac{1}{2}(3f^2 + e^2c^2f^6).\varphi 3\theta + f^3.f3\theta.F(3\theta)\right\} = \chi(k, k')$$

et de là

$$(43)\qquad \psi\theta = 3.\sqrt[3]{(\varphi 3\theta)^3 - \frac{1}{2}(3f^2 + e^2c^2f^6)\varphi 3\theta + f^3.f3\theta.F3\theta}.$$

La quantité f est donnée par l'équation (42). Si l'on la cherche à l'aide de l'équation (41') on parviendra à une équation du huitième degré. En effet en comparant les coefficients de y^2 on aura

$$a_0^2 + b_0^2(c^2 - e^2) = 3^7.f^4$$

c'est à dire en substituant les valeurs de a_0 et b_0

$$\frac{1}{4}.3^6.(3f^2 + e^2c^2f^6)^2 + 3^6.(c^2 - e^2)f^6 - 3^7.f^4 = 0$$

ou bien en développant:

$$f^8 + 6e^2c^2f^4 + 4(c^2 - e^2) \cdot f^2 - 3 = 0. \tag{44}$$

Les huit racines de cette équation sont les huit valeurs de f qu'on obtiendra en donnant à k et k' les valeurs $0, 1, 2$ en faisant abstraction de la valeur $f = 0$ qui répond à $k = 0$ et $k' = 0$

Rien n'a été plus facile que de déterminer la valeur de $\psi\theta$ dans le cas où $n = 1$, mais si n est plus grand il est très compliqué de se servir de la méthode exposée; c'est pourquoi nous allons exposer une autre qui conduira à l'expression générale et explicite de la fonction $\psi\theta$.

Désignons par $\pi(k)$ et $\pi_1(k')$ les valeurs de la fonction $\psi\theta$, qui répondent respectivement à $k' = 0$ et $k = 0$, nous aurons:

$$\left\{\begin{aligned} \pi(k) &= \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \, \delta^{mk} \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta); \\ \pi_1(k') &= \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \, \delta^{\mu k'} \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta). \end{aligned}\right. \tag{45}$$

Soient de même $\pi'(k)$ et $\pi'_1(k')$ les valeurs de $\pi(k)$ et $\pi_1(k')$ en mettant $-\theta$ au lieu de θ.

Cela posé considérons la fonction

$$P = \pi(k) \cdot \pi_1(k') \cdot \psi(-\theta). \tag{46}$$

En y mettant $\theta + \alpha$ au lieu de θ les fonctions

$$\pi(k)\,;\ \pi_1(k')\,;\ \psi(-\theta)$$

deviendront respectivement

$$\delta^{-k} \cdot \pi(k)\,;\ \pi_1(k')\,;\ \delta^k \cdot \psi(-\theta);$$

donc la fonction P reste la même. En mettant $\theta + \beta$ au lieu de θ la fonction P reste encore invariable. Donc en vertu du I^er théorème on aura

$$\pi(k) \cdot \pi_1(k') \cdot \psi(-\theta) = u + u' \cdot f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta \tag{47}$$

où u et u' sont des fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$, la première du degré 3 et la seconde du degré 1. En mettant $\omega - \theta$ au lieu de θ les trois fonctions $\pi(k)\,;\ \pi_1(k')\,;\ \psi(-\theta)$ se changeront en

$$-\pi'(k)\,;\ -\pi'_1(k')\,;\ -\psi\theta;$$

donc

$$(47') \qquad \pi'(k) \,.\, \pi'_1(k') \,.\, \psi\theta = -u + u' \,.\, f(2n+1)\theta \,.\, F(2n+1)\theta;$$

par suite

$$2u = \pi(k) \,.\, \pi_1(k') \,.\, \psi(-\theta) - \pi'(k) \,.\, \pi'_1(k') \,.\, \psi\theta,$$

$$2u' \,.\, f(2n+1)\theta \,.\, F(2n+1)\theta = \pi(k) \,.\, \pi_1(k') \,.\, \psi(-\theta) + \pi'(k) \,.\, \pi'_1(k') \,.\, \psi\theta.$$

En changeant ici θ en $-\theta$ on voit que u change de signe et que u' reste invariable; on aura donc

$$u = a_0 \varphi(2n+1)\theta + a_1(\varphi(2n+1)\theta)^3; \qquad u' = b,$$

où a_0, a_1, b sont des quantités constantes par rapport à θ. Il viendra donc:

$$(48) \qquad \pi(k).\pi_1(k').\psi(-\theta) = a_0\varphi(2n+1)\theta + a_2\{\varphi(2n+1)\theta\}^3 + b.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta.$$

Soit

$$(49) \qquad c_{k,k'} = \frac{1}{2n+1} \,.\, \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \, \delta^{mk+\mu k'} \,.\, \varphi(m\alpha + \mu\beta)$$

on aura en vertu de la formule (38)

$$(50) \qquad \psi\theta \,.\, \psi(-\theta) = (2n+1)^2 \left\{ c^2_{k,k'} - \{\varphi(2n+1)\theta\}^2 \right\}.$$

L'équation (48) donnera donc en multipliant par $\psi\theta$

$$(51) \qquad \psi\theta = \frac{(2n+1)^2\left\{c^2_{k,k'} - \{\varphi(2n+1)\theta\}^2\right\}}{a_0\varphi(2n+1)\theta + a_1\{\varphi(2n+1)\theta\}^3 + b.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta} \,.\, \pi(k).\pi_1(k').$$

Cette formule donne la fonction $\psi\theta$ à l'aide du produit des deux fonctions $\pi(k)$; $\pi_1(k')$ si l'on connait seulement les trois constantes a_0, a_1, b. Or ces quantités se trouvent aisément comme il suit.

Faisons d'abord dans (48) $\varphi\theta = \frac{1}{0}$ après avoir divisé par $(\varphi\theta)^3$, on obtiendra: $a_1 = -(2n+1)^3$. Soit ensuite $\theta = 0$ on aura en faisant pour abréger

$$(52) \qquad \begin{cases} c_k = \dfrac{1}{2n+1} \,.\, \displaystyle\sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \, \delta^{mk} \,.\, \varphi(m\alpha + \mu\beta), \\[2ex] e_k = \dfrac{1}{2n+1} \,.\, \displaystyle\sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \, \delta^{\mu k} \,.\, \varphi(m\alpha + \mu\beta), \end{cases}$$

$$\pi(k) = c_k; \qquad \pi_1(k') = e_{k'}; \qquad \psi(-\theta) = c_{k,k'}; \qquad \varphi(2n+1)\theta = 0;$$

$$f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta = 1,$$

donc:

$$b = (2n+1)^3 . c_k . e_{k'} . c_{k,k'} .$$

Il reste à trouver le coefficient a_0. Or en multipliant membre à membre les deux équations (47, 47') on aura:

$$\pi(k) . \pi'(k) . \pi_1(k') . \pi_1'(k') . \psi\theta . \psi(-\theta)$$
$$= -u^2 + u'^2 . \{f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta\}^2;$$

maintenant en vertu de la formule (50) on a

$$\pi(k) . \pi'(k) = (2n+1)^2 \left\{c_k^2 - \{\varphi(2n+1)\theta\}^2\right\},$$

$$\pi_1(k') . \pi_1'(k') = (2n+1)^2 \left\{c_{k'}^2 - \{\varphi(2n+1)\theta\}^2\right\},$$

donc en faisant $\varphi(2n+1)\theta = y$

$$(a_0 y + a_1 y^3)^2 - b^2 . (1 - c^2 y^2)(1 + e^2 y^2)$$
$$= (2n+1)^6 \{y^2 - c_k^2\}\{y^2 - e_{k'}^2\}\{y^2 - c_{k,k'}^2\}$$

et comparant de part et d'autre les coefficients de y^4 on obtiendra:

$$2a_0 a_1 + b^2 e^2 c^2 = -(2n+1)^6 . \{c_k^2 + e_{k'}^2 + c_{k,k'}^2\};$$

donc en remettant les valeurs de a_1 et b_0

$$a_0 = \frac{1}{2}(2n+1)^3 . \{c_k^2 + e_{k'}^2 + c_{k,k'}^2 + e^2 c^2 c_k^2 . e_{k'}^2 . c_{k,k'}^2\}.$$

En substituant les valeurs de a_0, a_1, b l'expression (51) de $\psi\theta$ deviendra:

(53) $$\psi\theta = \frac{1}{2n+1} . \pi(k) . \pi_1(k')$$

$$\frac{\{\varphi(2n+1)\theta\}^2 - c_{k,k'}^2}{\{\varphi(2n+1)\theta\}^3 - \frac{1}{2}\{c_k^2 + e_{k'}^2 + c_{k,k'}^2 + e^2 c^2 c_k^2 . e_{k'}^2 . c_{k,k'}^2\} . \varphi(2n+1)\theta - c_k . e_{k'} . c_{k,k'} . f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta} .$$

Il s'agit maintenant de trouver les fonctions $\pi(k)$ et $\pi_1(k')$. En désignant

par k et k_1 deux nombres entiers quelconques il est clair que les deux fonctions:

$$\pi(k)\,.\,\pi(k_1)\,.\,\pi'(k+k') \quad \text{et} \quad \pi_1(k)\,.\,\pi_1(k_1)\,.\,\pi_1'(k+k_1)$$

ne changeront pas de valeur en mettant $\theta+\alpha$ et $\theta+\beta$ au lieu de θ. Ces fonctions auront donc en vertu du 1[er] théorème la forme

$$u + u'f(2n+1)\theta\,.\,F(2n+1)\theta$$

où u et u' sont des fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$. On démontrera aisément que u' sera constant et u de la forme

$$a_0\varphi(2n+1)\theta + a_1\{\varphi(2n+1)\theta\}^3.$$

Soit donc:

$$(54)\quad \begin{cases} \pi(k)\,.\,\pi(k')\,.\,\pi'(k+k') \\ = a_0\varphi(2n+1)\theta + a_1\{\varphi(2n+1)\theta\}^3 + b\,.\,f(2n+1)\theta\,.\,F(2n+1)\theta, \\ \pi_1(k)\,.\,\pi_1(k')\,.\,\pi_1'(k+k') \\ = a_0'\varphi(2n+1)\theta + a_1'\{\varphi(2n+1)\theta\}^3 + b'\,.\,f(2n+1)\theta\,.\,F(2n+1)\theta. \end{cases}$$

En traitant ces équations entièrement de la même manière que l'équation (48) on trouvera:

$$(55)\quad \begin{cases} a_1 = -(2n+1)^3; \qquad b = c_k\,.\,c_{k'}\,.\,c_{k+k'}; \\ a_0 = \frac{1}{2}(2n+1)^3\{c_k^2 + c_{k'}^2 + c_{k+k'}^2 + e^2c^2c_k^2\,.\,c_{k'}^2\,.\,c_{k+k'}^2\}, \\ a_1' = -(2n+1)^3; \qquad b' = (2n+1)^3\,.\,e_k\,.\,e_{k'}\,.\,e_{k+k'}; \\ a_0' = \frac{1}{2}(2n+1)^3\{e_k^2 + e_{k'}^2 + e_{k+k'}^2 + e^2c^2e_k^2\,.\,e_{k'}^2\,.\,e_{k+k'}^2\}. \end{cases}$$

Cela posé, on obtiendra en multipliant les équations respectivement par $\pi(k+k')$ et $\pi_1(k+k')$ et remarquant que

$$\pi(k+k')\,.\,\pi'(k+k') = (2n+1)^2\{c_{k+k'}^2 - \varphi^2(n+1)\theta\},$$

$$\pi_1(k+k')\,.\,\pi_1'(k+k') = (2n+1)^2\{e_{k+k'}^2 - \varphi^2(n+1)\theta\},$$

$$
(56)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\pi(k+k') = \frac{1}{2n+1}\cdot\pi(k)\cdot\pi(k') \\
&\times \frac{\{\varphi(2n+1)\theta\}^2 - c^2_{k+k'}}{\{\varphi(2n+1)\theta\}^3 - \frac{1}{2}\left(c_k^2+c_{k'}^2+c_{k+k'}^2+e^2c^2c_k^2.c_{k'}^2.c_{k+k'}^2\right)\varphi(2n+1)\theta - c_k.c_{k'}.c_{k+k'}.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta}, \\
&\pi_1(k+k') = \frac{1}{2n+1}\cdot\pi_1(k)\cdot\pi_1(k') \\
&\times \frac{\{\varphi(2n+1)\theta\}^2 - e^2_{k+k'}}{\{\varphi(2n+1)\theta\}^3 - \frac{1}{2}\left(e_k^2+e_{k'}^2+e_{k+k'}^2+e^2c^2e_k^2.e_{k'}^2.e_{k+k'}^2\right)\varphi(2n+1)\theta - e_k.e_{k'}.e_{k+k'}.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta}.
\end{aligned}\right.
$$

Ces formules donnent $\pi(k+k')$ en $\pi(k)$ et $\pi(k')$ et $\pi_1(k+k')$ en $\pi_1(k)$ et $\pi_1(k')$. Il est facile d'en tirer la valeur de $\pi(k)$ et $\pi_1(k)$. Soit $k'=1$ et mettons $k-1$ au lieu de k nous aurons

$$
(57)\quad \left\{
\begin{aligned}
\pi(k) &= \frac{1}{2n+1}\cdot\pi(1)\cdot\pi(k-1)\cdot\frac{v_k}{t_k}, \\
\pi_1(k) &= \frac{1}{2n+1}\cdot\pi_1(1)\cdot\pi_1(k-1)\cdot\frac{v'_k}{t'_k},
\end{aligned}\right.
$$

où l'on a fait pour abréger

$$
(58)\qquad v_k = \{\varphi(2n+1)\theta\}^2 - c_k^2; \qquad v'_k = \{\varphi(2n+1)\theta\}^2 - e_k^2,
$$

$$
(59)\quad \left\{
\begin{aligned}
t'_k = \{\varphi(2n+1)\theta\}^3 &- \frac{1}{2}(e_1^2+e_{k-1}^2+e_k^2+e^2c^2e_1^2e_{k-1}^2e_k^2)\varphi(2n+1)\theta \\
&- e_1e_{k-1}e_k.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta, \\
t_k = \{\varphi(2n+1)\theta\}^3 &- \frac{1}{2}(c_1^2+c_{k-1}^2+c_k^2+e^2c^2c_1^2c_{k-1}^2c_k^2)\varphi(2n+1)\theta \\
&- c_1c_{k-1}c_k.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta.
\end{aligned}\right.
$$

Cela posé les équations (57) donneront sur le champ en faisant $k=2, 3, \ldots$ et éliminant ensuite:

$$
(60)\quad \left\{
\begin{aligned}
\pi(k) &= \frac{1}{(2n+1)^{k-1}}\cdot\{\pi(1)\}^k\cdot\frac{v_2.v_3\ldots v_k}{t_2.t_3\ldots t_k}, \\
\pi_1(k) &= \frac{1}{(2n+1)^{k-1}}\cdot\{\pi_1(1)\}^k\cdot\frac{v'_2.v'_3\ldots v'_k}{t'_2.t'_3\ldots t'_k}.
\end{aligned}\right.
$$

De cette manière il reste seulement les deux fonctions $\pi(1)$ et $\pi_1(1)$, qui sont encore inconnues. Or si l'on fait $k = 2n + 1$ on a

$$c_k = e_k = 0; \quad \pi(2n+1) = \pi(0) = (2n+1)^2 . \varphi(2n+1)\theta = \pi_1(2n+1);$$

$$v_{2n+1} = \{\varphi(2n+1)\theta\}^2; \quad t_{2n+1} = \{\varphi(2n+1)\theta\}^3 - c_{2n}^2 = v_{2n}; \quad t'_{2n+1} = v'_{2n};$$

donc en substituant

$$\{\pi(1)\}^{2n+1} = (2n+1)^{2n+1} . \frac{t_2 . t_3 \ldots t_{2n}}{v_2 . v_3 \ldots v_{2n-1}},$$

$$\{\pi_1(1)\}^{2n+1} = (2n+1)^{2n+1} . \frac{t'_2 . t'_3 \ldots t'_{2n}}{v'_2 . v'_3 \ldots v'_{2n-1}}$$

et de là

$$(61) \quad \begin{cases} \pi(1) = (2n+1) . \sqrt[2n+1]{\dfrac{t_2 . t_3 \ldots t_{2n}}{v_2 . v_3 \ldots v_{2n-1}}}, \\ \pi_1(1) = (2n+1) . \sqrt[2n+1]{\dfrac{t'_2 . t'_3 \ldots t'_{2n}}{v'_2 . v'_3 \ldots v'_{2n-1}}}. \end{cases}$$

Connaissant ainsi $\pi(1)$ et $\pi_1(1)$ on aura $\pi(k)$ et $\pi(k')$ par les équations (60) et ensuite $\psi\theta$ par l'équation (53).

On peut simplifier un peu les expressions de $\pi(1)$ et $\pi_1(1)$ en remarquant que $t_{2n} = t_2$, $t_{2n-1} = t_3$, ..., $v_{2n-1} = v_2$, $v_{2n-2} = v_3$, ... etc. On obtiendra ainsi

$$(62) \quad \begin{cases} \pi(1) = (2n+1) . \sqrt[2n+1]{\left(\dfrac{t_2 . t_3 \ldots t_n}{v_2 . v_3 \ldots v_n}\right)^2 . t_{n+1}}, \\ \pi_1(1) = (2n+1) . \sqrt[2n+1]{\left(\dfrac{t'_2 . t'_3 \ldots t'_n}{v'_2 . v'_3 \ldots v'_n}\right)^2 . t'_{n+1}}. \end{cases}$$

Les quantités sous les radicaux sont représentées sous une forme fractionnaire mais selon ce qui précède elles sont réellement des fonctions entières. On pourra trouver ces fonctions par un procédé particulier que nous allons exposer.

Multiplions l'expression de $\pi(k)$ par $\pi'(k)$; nous obtiendrons, en remarquant que $\pi(k) . \pi'(k) = (2n+1)^2 . \{c_k^2 - \{\varphi(2n+1)\theta\}^2\} = -(2n+1)^2 v_k$,

$$\pi'(k) . \{\pi(1)\}^k = -(2n+1)^{k+1} . \frac{t_2 . t_3 \ldots t_k}{v_2 . v_3 \ldots v_{k-1}}.$$

Cela posé, soit

$$(64)\qquad \frac{t_2 \,.\, t_3 \ldots t_k}{v_2 \,.\, v_3 \ldots v_{k-1}} = S_k,$$

nous aurons

$$v_k \,.\, S_{k+1} = t_{k+1} \,.\, S_k; \qquad v_{k-1} \,.\, S_k = t_k \,.\, S_{k-1} \,.$$

De là on tire en multipliant la 1ère équation par c_{k-1} et la seconde par $-c_{k+1} \,.\, \frac{\theta_k}{v_{k-1}}$ et ensuite ajoutant:

$$(65)\qquad 0 = c_{k-1} \,.\, v_k \,.\, S_{k+1} - (c_{k-1} t_{k+1} + c_{k+1} \,.\, \theta_k) \,.\, S_k + c_{k+1} \,.\, \frac{t_k \,.\, \theta_k}{v_{k-1}} \,.\, S_{k-1} \,.$$

Cela posé si l'on désigne par θ_k la valeur de t_k en y changeant le signe de $f(2n+1)\theta \,.\, F(2n+1)\theta$, les coefficients de S_k et S_{k-1} seront divisibles par v_k. En effet on a d'abord

$$t_k \,.\, \theta_k = \{\varphi^2(2n+1)\theta - c_1^2\}\{\varphi^2(2n+1)\theta - c_k^2\}\{\varphi^2(2n+1)\theta - c_{k-1}^2\},$$

c'est à dire

$$t_k \,.\, \theta_k = v_1 \,.\, v_k \,.\, v_{k-1} \,.$$

On trouve encore à l'aide de la formule (59)

$$\begin{aligned} c_{k-1} t_{k+1} + c_{k+1} \,.\, \theta_k &= (c_{k-1} + c_{k+1}) \,.\, \varphi(2n+1)\theta \,.\, \{\varphi^2(2n+1)\theta - c_k^2\} \\ &= (c_{k-1} + c_{k+1}) \,.\, \varphi(2n+1)\theta \,.\, v_k \,. \end{aligned}$$

On aura donc en substituant dans l'équation (65) et divisant ensuite par v_k:

$$(66)\qquad \begin{aligned} &c_{k-1} \,.\, S_{k+1} - (c_{k-1} + c_{k+1}) \,.\, \varphi(2n+1)\theta \,.\, S_k \\ &\quad + c_{k+1} \,.\, \{\varphi^2(2n+1)\theta - c_1^2\} \,.\, S_{k-1} = 0. \end{aligned}$$

Cette formule donne une loi très simple pour former successivement les fonctions S_k en connaissant les deux S_1 et S_2. Or on a

$$S_1 = -\frac{\pi'(1) \,.\, \pi(1)}{(2n+1)^2} = v_1 = \varphi^2(2n+1)\theta - c_1^2 \quad \text{et} \quad S_2 = t_2 \,.$$

Par là on voit donc que les quantités $S_3, S_4, \ldots, S_k$ déterminées par la

formule (66) en faisant $k = 2, 3; \ldots$ seront des fonctions entières. En faisant $k = 2n$ on aura la valeur de

$$S_{2n} = \frac{t_2 \,.\, t_3 \ldots t_{2n}}{v_2 \,.\, v_3 \ldots v_{2n-1}}$$

et

(67) $$\pi(1) = (2n + 1) \,.\, \sqrt[2n+1]{S_{2n}}.$$

On aura en même temps en vertu de la formule (60)

(68) $$\pi(k) = \frac{1}{(2n + 1)^{k-1}} \,.\, \{\pi(1)\}^k \,.\, \frac{v_k}{S_k}.$$

En faisant

(69) $$S'_k = \frac{t'_2 \,.\, t'_3 \ldots t'_k}{v'_2 \,.\, v'_3 \ldots v'_{k-1}}$$

on aura entièrement de la même manière

(70) $$e_{k-1} \,.\, S'_{k+1} - (e_{k-1} + e_{k+1}) \,.\, \varphi(2n + 1)\theta \,.\, S'_k$$
$$+ e_{k+1} \,.\, \{\varphi^2(2n + 1)\theta - e_1^2\} \,.\, S'_{k-1} = 0.$$

§ 3.

Théorème IV. Soient $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$ des quantités en nombre quelconque et dont l'une au moins soit variable. Si l'on désigne les racines de l'équation

(71) $$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m)^2$$
$$- (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n)^2 (1 - c^2 x^2)(1 + e^2 x^2) = 0$$

par

$$\varphi\theta_1, \varphi\theta_2, \varphi\theta_3, \ldots, \varphi\theta_\mu$$

je dis qu'on aura

(72) $$\varphi(\pm \theta_1 \pm \theta_2 \pm \theta_3 \pm \ldots \pm \theta_\mu),$$ = à une constante

en déterminant convenablement le signe des quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\mu$.

Démonstration. Soient pour abréger

$$(73)\quad \begin{cases} p = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m, \\ q = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n, \end{cases}$$

et faisons

$$(74)\qquad \psi(x) = p^2 - q^2(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2).$$

En mettant pour x l'une quelconque des quantités $\varphi\theta_1$, $\varphi\theta_2$, ... on aura

$$(75)\quad \psi(\varphi\theta) = p^2 - q^2.(1 - c^2\varphi\theta).(1 + e^2\varphi^2\theta) = 0 = p^2 - q^2(f\theta)^2.(F\theta)^2.$$

En différentiant cette équation par rapport à θ et $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ il viendra

$$(76)\qquad \psi'(\varphi\theta).f\theta.F\theta.d\theta + 2p\delta p - 2q\delta q(f\theta)^2.(F\theta)^2 = 0$$

où le signe de différentiation δ se rapporte aux seules quantités $a_0, a_1, \ldots, b_0, \ldots$. Maintenant la même équation (75) donne

$$(77)\qquad p = \varepsilon q f\theta.F\theta \quad \text{où} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

En vertu de cette équation on aura

$$2p\delta p - 2q\delta q(f\theta)^2(F\theta)^2 = 2\varepsilon f\theta.F\theta\{q\delta p - p\delta q\}.$$

L'équation (76) deviendra donc en substituant et divisant par $f\theta.F\theta$:

$$\psi'(\varphi\theta).d\theta + 2\varepsilon(q\delta p - p\delta q) = 0$$

d'où l'on tire

$$(78)\qquad \varepsilon d\theta = \frac{2(p\delta q - q\delta p)}{\psi'(\varphi\theta)}.$$

La quantité $2(p\delta q - q\delta p)$ est une fonction entière de $x = \varphi\theta$ que nous désignerons par $\lambda(\varphi\theta)$. On aura par suite en mettant pour θ ces valeurs $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_\mu$ et désignant les valeurs correspondantes de ε par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_\mu$ les équations suivantes:

$$(79)\quad \varepsilon_1 d\theta_1 = \frac{\lambda(\varphi\theta_1)}{\psi'(\varphi\theta_1)}; \qquad \varepsilon_2 d\theta_2 = \frac{\lambda(\varphi\theta_2)}{\psi'(\varphi\theta_2)}; \quad \ldots; \quad \varepsilon_\mu d\theta_\mu = \frac{\lambda(\varphi\theta_\mu)}{\psi'(\varphi\theta_\mu)}$$

qui ajoutées membres à membres donneront celle-ci

$$(80)\qquad \varepsilon_1 d\theta_1 + \varepsilon_2 d\theta_2 + \ldots + \varepsilon_\mu d\theta_\mu = \frac{\lambda(\varphi\theta_1)}{\psi'(\varphi\theta_1)} + \frac{\lambda(\varphi\theta_2)}{\psi'(\varphi\theta_2)} + \ldots + \frac{\lambda(\varphi\theta_\mu)}{\psi'(\varphi\theta_\mu)}.$$

Cela posé il est facile de voir que le degré de la fonction entière $\lambda(x)$ est moindre que celui de la fonction $\psi'(x)$; donc en vertu d'une formule connue le second membre de l'équation précédente s'évanouira. Il viendra donc

$$(81)\qquad \varepsilon_1 d\theta_1 + \varepsilon_2 d\theta_2 + \varepsilon_3 d\theta_3 + \ldots + \varepsilon_\mu d\theta_\mu = 0$$

d'où l'on tire en intégrant:

$$(82)\qquad \varepsilon_1 \theta_1 + \varepsilon_2 \theta_2 + \varepsilon_3 \theta_3 + \ldots + \varepsilon_\mu \theta_\mu = \text{à une constante}$$

et de là

$$(83)\qquad \varphi(\varepsilon_1 \theta_1 + \varepsilon_2 \theta_2 + \varepsilon_3 \theta_3 + \ldots + \varepsilon_\mu \theta_\mu) = C.$$

Le théorème est donc démontré.

La démonstration précédente suppose que toutes les racines de l'équation soient inégales, mais il est évident que la formule (83) aura encore lieu si quelques-unes des quantités $\varphi\theta_1, \varphi\theta_2, \varphi\theta_3, \ldots, \varphi\theta_\mu$ deviendront égales entre elles.

La valeur de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\mu$ n'est pas arbitraire; elle est déterminée par l'équation $p = \varepsilon q f\theta . F\theta$, c'est-à-dire

$$(84)\qquad a_0 + a_1\varphi\theta_k + a_2(\varphi\theta_k)^2 + \ldots + a_m(\varphi\theta_k)^m$$
$$= \varepsilon_k . (b_0 + b_1\varphi\theta_k + b_2(\varphi\theta_k)^2 + \ldots + b_n(\varphi\theta_k)^n) . f\theta_k . F\theta_k.$$

Les quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\mu$ sont en vertu de l'équation $\psi(x) = 0$ des fonctions de $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$. Si un certain nombre k de ces dernières quantités sont indéterminées on pourra en général les déterminer de la manière que k des quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\mu$ soient données. Soient donc $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ données, les quantités $\theta_{k+1}, \theta_{k+2}, \ldots, \theta_\mu$ deviendront des fonctions de celles-là. Le cas le plus simple et le plus important est celui où $\mu - k$ a la valeur la plus petite possible. Or il est clair qu'on peut disposer de $\mu - 1$ des quantités $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$; donc on peut regarder les $\mu - 1$ quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\mu-1}$ comme données et en-

suite déterminer $\varphi\theta_\mu$ en fonction de $\varphi\theta_1, \varphi\theta_2, \ldots, \varphi\theta_{\mu-1}$ de la sorte que l'équation (83) soit satisfaite. Soit

$$(85) \qquad \varphi\theta_\mu = \psi\{\varphi\theta_1, \varphi\theta_2, \ldots, \varphi\theta_{\mu-1}\};$$

on tire de l'équation (82) une autre valeur de $\varphi\theta_\mu$ savoir

$$\varphi\theta_\mu = -\varepsilon_\mu . \varphi(\varepsilon_1\theta_1 + \varepsilon_2\theta_2 + \ldots + \varepsilon_{\mu-1}\theta_{\mu-1} - C)$$

donc

$$(86) \quad \varphi(\varepsilon_1\theta_1 + \varepsilon_2\theta_2 + \ldots + \varepsilon_{\mu-1}\theta_{\mu-1} - C) = -\varepsilon_\mu . \psi\{\varphi\theta_1, \varphi\theta_2, \ldots, \varphi\theta_{\mu-1}\}.$$

Cette formule dans laquelle toutes les quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\mu-1}$, aussi bien que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\mu-1}$, sont arbitraires, exprime la propriété fondamentale des fonctions elliptiques. En posant $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_{\mu-1}$, on a

$$(87) \quad \varphi(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_{\mu-1} - C) = -\varepsilon_\mu\psi(\varphi\theta_1, \varphi\theta_2, \ldots, \varphi\theta_{\mu-1}).$$

Cela posé, considérons quelques cas particuliers.

1. Soient

$$(88) \qquad \begin{cases} p = a_0x + a_1x^3 + \ldots + a_n\ x^{2n+1} = \lambda(x), \\ q = b_0\ + b_1x^2 + \ldots + b_{n-1}x^{2n-2} = \lambda_1(x); \end{cases}$$

dans ce cas l'équation (71)

$$(89) \qquad p^2 - q^2(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2) = 0$$

sera du degré $4n + 2$, et ses racines seront deux à deux égales mais de signes contraires. Soient donc

$$\theta_{2n+2} = -\theta_1; \qquad \theta_{2n+3} = -\theta_2; \ \ldots; \ \theta_{4n+2} = -\theta_{2n+1}.$$

Supposons $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2n}$ donnés et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_{2n} = 1$, l'équation (77) donnera celles-ci

$$(90) \quad \lambda(\varphi\theta_1) = \lambda_1(\varphi\theta_1) . f\theta_1 . F\theta_1; \qquad \lambda(\varphi\theta_2) = \lambda_1(\varphi\theta_2) . f\theta_2 . F\theta_2; \ \ldots;$$
$$\lambda(\varphi\theta_{2n}) = \lambda_1(\varphi\theta_{2n}) . f\theta_{2n} . F\theta_{2n}.$$

$\varepsilon_{2n+2}, \ldots, \varepsilon_{4n+2}$ sont déterminés par les équations:

$$\lambda(\varphi\theta_{2n+1+m}) = \varepsilon_{2n+1+m}\lambda_1(\varphi\theta_{2n+1+m}) . f\theta_{2n+1+m} . F\theta_{2n+1+m},$$

c'est-à-dire en remarquant que $\theta_{2n+1+m} = -\theta_m$

$$-\lambda(\varphi\theta_m) = \varepsilon_{2n+1+m}\lambda_1(\varphi\theta_m) . f\theta_m . F\theta_m;$$

donc en vertu des équations (90)

$$\varepsilon_{2n+1+m} = -1; \quad \text{si} \quad m > 0 \quad \text{et} \quad m < 2n+1.$$

On aura de même

$$\varepsilon_{4n+2} = -\varepsilon_{2n+1}.$$

La formule (82) deviendra donc

$$(91) \qquad 2\theta_1 + 2\theta_2 + \ldots + 2\theta_{2n} + 2\varepsilon_{2n+1}\theta_{2n+1} = C$$

d'où

$$(92) \qquad \varphi(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_{2n} + a) = -\varepsilon . \varphi\theta_{2n+1}.$$

ε est égal à ± 1 et déterminé par l'équation

$$\varepsilon = \frac{\lambda_1(\varphi\theta_{2n+1}) . f\theta_{2n+1} . F\theta_{2n+1}}{\lambda(\varphi\theta_{2n+1})}.$$

a est une quantité constante que nous allons déterminer.

L'équation (89) nous montre que b_0^2 est égal au produit des racines, donc

$$b_0^2 = \varphi^2\theta_1 . \varphi^2\theta_2 \ldots \varphi^2\theta_{2n} . \varphi^2\theta_{2n+1};$$

on en tire:

$$(93) \qquad \varphi\theta_{2n+1} = \pm\frac{b_0}{\varphi\theta_1 . \varphi\theta_2 \ldots \varphi\theta_{2n}}.$$

La quantité b_0 se détermine à l'aide des équations (90). Comme elles sont linéaires par rapport aux quantités $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$, elles donneront b_0 et par suite $\varphi\theta_{2n+1}$ en fonction *rationnelle* des quantités

$$\varphi\theta_1, \varphi\theta_2, \ldots, \varphi\theta_{2n}; f\theta_1 . F\theta_1; f\theta_2 . F\theta_2; \ldots; f\theta_{2n} . F\theta_{2n}.$$

Pour déterminer la constante a soient $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_{2n} = 0$.

Alors il est clair par la forme de l'équation (89) qu'on doit avoir $b_0 = a_0 = b_1 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$. Cette équation se réduit alors à

$$x^{4n+2} = 0$$

et par suite dans ce cas $\varphi\theta_{2n+1}=0$, donc la formule (92) donnera

$$\varphi a = 0$$

et par suite

$$\varphi(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\ldots+\theta_{2n}) = \pm\frac{b_0}{\varphi\theta_1\cdot\varphi\theta_2\ldots\varphi\theta_{2n}}. \tag{94}$$

Supposons par ex. $n=1$, on aura

$$\varphi(\theta_1+\theta_2) = \pm\frac{b_0}{\varphi\theta_1\cdot\varphi\theta_2} \tag{94'}$$

et pour déterminer b_0 on aura les deux équations

$$a_0\varphi\theta_1+\varphi^3\theta_1 = b_0\,.\,f\theta_1\,.\,F\theta_1,$$
$$a_0\varphi\theta_2+\varphi^3\theta_2 = b_0\,.\,f\theta_2\,.\,F\theta_2.$$

On en tire en éliminant a_0

$$b_0 = \frac{\varphi\theta_1\cdot\varphi\theta_2\cdot\{\varphi^2\theta_1-\varphi^2\theta_2\}}{\varphi\theta_2\cdot f\theta_1\cdot F\theta_1-\varphi\theta_1\cdot f\theta_2\cdot F\theta_2},$$

donc en substituant dans la formule (94')

$$\varphi(\theta_1+\theta_2) = \pm\frac{\varphi^2\theta_1-\varphi^2\theta_2}{\varphi\theta_2\cdot f\theta_1\cdot F\theta_1-\varphi\theta_1\cdot f\theta_2\cdot F\theta_2}.$$

Pour déterminer le signe, soit $\theta_2=0$, on aura $\varphi\theta_1=\mp\varphi\theta_1$; donc il faut prendre le signe inférieur et par suite

$$\varphi(\theta_1+\theta_2) = \frac{\varphi^2\theta_1-\varphi^2\theta_2}{\varphi\theta_1\cdot f\theta_2\cdot F\theta_2-\varphi\theta_2\cdot f\theta_1\cdot F\theta_1}.$$

Si on multiplie haut et bas de la fraction par le dénominateur en changeant le signe du second terme, on trouve en réduisant

$$\varphi(\theta_1+\theta_2) = \frac{\varphi\theta_1\cdot f\theta_2\cdot F\theta_2+\varphi\theta_2\cdot f\theta_1\cdot F\theta_1}{1+e^2c^2\varphi^2\theta_1\cdot\varphi^2\theta_1},$$

c'est-à-dire la 1ère des formules (10), tome II, pag. 105.

La formule (91) donne

$$\varphi(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{2n}+\varepsilon_{2n+1}\cdot\theta_{2n+1}) = C.$$

Si l'on pose $\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_{2n}=0$, on aura comme nous avons vu

plus haut θ_{2n+1} et par suite $C = 0$. En faisant en même temps $\varepsilon_{2n+1} = 1$ il est clair qu'on aura en vertu de ce qui précède ce théorème:

Théorème V. Si l'expression

$$\frac{a_1\varphi\theta + a_1(\varphi\theta)^3 + \ldots + a_n(\varphi\theta)^{2n+1} - (b_0 + b_1(\varphi\theta)^2 + \ldots + b_{n-1}(\varphi\theta)^{2n-2}).f\theta.F\theta}{(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_1)(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_2)(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_3)\ldots(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_{2n})(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_{2n+1})}$$

reste finie en attribuant à la quantité θ les valeurs $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2n+1}$ on aura toujours

$$\varphi(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_{2n} + \theta_{2n+1}) = 0.$$

En faisant $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_{2n+1} = \alpha$ on aura comme corollaire ce théorème:

Théorème VI. Si l'expression

$$\frac{a_0\varphi\theta + a_1(\varphi\theta)^3 + \ldots + a_n(\varphi\theta)^{2n+1} - (b_0 + b_1(\varphi\theta)^2 + \ldots + b_{n-1}(\varphi\theta)^{2n-2}).f\theta.F\theta}{(\varphi^2\theta - \varphi^2\alpha)^{2n+1}}$$

se réduit à une quantité finie en faisant $\theta = \alpha$ on aura

$$\varphi(2n + 1)\alpha = 0;$$

ou bien si la fonction

$$a_0\varphi\theta + a_1(\varphi\theta)^3 + \ldots + a_n(\varphi\theta)^{2n+1} - (b_0 + b_1(\varphi\theta)^2 + \ldots + b_{n-1}(\varphi\theta)^{2n-2}).f\theta.F\theta$$

et les dérivées par rapport à θ jusqu'à l'ordre $2n$ incl. se réduisent à zéro pour $\theta = \alpha$ on aura

$$\varphi(2n + 1)\alpha = 0.$$

On peut encore énoncer ce dernier théorème comme il suit.

Théorème VII. Si les quantités $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ sont telles que l'équation

$$(a_0 x + a_1 x^3 + \ldots + a_n x^{2n+1})^2$$

$$-(b_0 + b_1 x^2 + \ldots + b_{n-1}x^{2n-2})(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2) = a_n^2\{x^2 - \varphi^2\alpha\}^{2n+1}$$

a lieu, la quantité α satisfera nécessairement à l'équation

$$\varphi(2n + 1)\alpha = 0,$$

c'est-à-dire on doit avoir $\alpha = \dfrac{m\omega + m'\varpi i}{2n + 1}$ où m et m' sont des nombres entiers.

2. Soient maintenant

$$(95)\quad \begin{cases} p = a_0 + a_1 x^2 + \ldots + a_n x^{2n} = \lambda(x), \\ q = b_0 x + b_1 x^3 + \ldots + b_{n-2} x^{2n-3} = \lambda_1(x). \end{cases}$$

Dans ce cas l'équation

$$(96)\qquad p^2 - q^2(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2) = 0$$

sera du degré $4n$ et ses racines seront deux à deux égales mais de signe contraire. En faisant $\theta_{2n+1} = -\theta_1$, $\theta_{2n+2} = -\theta_2$, ..., $\theta_{4n} = -\theta_{2n}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_{2n-1} = 1$ on aura pour déterminer $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1 \ldots$ les équations suivantes:

$$(97)\quad \lambda(\varphi\theta_1) = \lambda_1(\varphi\theta_1).f\theta_1.F\theta_1;\qquad \lambda(\varphi\theta_2) = \lambda_1(\varphi\theta_2).f\theta_2.F\theta_2;\ \ldots;$$
$$\lambda(\varphi\theta_{2n-1}) = \lambda_1(\varphi\theta_{2n-1}).f\theta_{2n-1}.F\theta_{2n-1}.$$

On aura ensuite

$$\varepsilon_{2n} = \frac{\lambda_1(\varphi\theta_{2n}).f\theta_{2n}.F\theta_{2n}}{\lambda(\varphi\theta_{2n})},$$

$$\varepsilon_{2n+1} = \varepsilon_{2n+2} = \ldots = \varepsilon_{4n-1} = -1,\qquad \varepsilon_{4n} = -\varepsilon_{2n}.$$

La formule (82) donnera donc

$$(97')\qquad 2\theta_1 + 2\theta_2 + \ldots + 2\theta_{2n-1} + 2\varepsilon_{2n}\theta_{2n} = \text{const.},$$

de là

$$(98)\qquad \varphi(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{2n-1} + a) = -\varepsilon_{2n}\varphi\theta_{2n}.$$

En faisant $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_{2n-1} = 0$ on aura

$$b_0 = b_1 = \ldots = b_{n-2} = 0,$$

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0;$$

donc l'équation (96) deviendra $x^{4n} = 0$. Toutes les racines sont donc alors égales à zéro et par suite $\varphi\theta_{2n} = 0$. L'équation (98) donnera donc $\varphi a = 0$ et par conséquent

$$\varphi(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{2n-1}) = \pm\varphi\theta_{2n},$$

$\varphi\theta_{2n}$ se trouve en remarquant que a_0^2 est le produit de toutes les racines, donc

$$a_0^2 = \varphi^2\theta_1.\varphi^2\theta_2\ldots\varphi^2\theta_{2n}$$

et de là

$$\varphi\theta_{2n} = \pm \frac{a_0}{\varphi\theta_1 \cdot \varphi\theta_2 \ldots \varphi\theta_{2n-1}}$$

donc enfin

$$(99) \qquad \varphi(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{2n-1}) = \pm \frac{a_0}{\varphi\theta_1 \cdot \varphi\theta_2 \ldots \varphi\theta_{2n}} \,.$$

a_0 et par suite le second membre de cette équation est une fonction rationnelle des quantités:

$$\varphi\theta_1 \,,\ \varphi\theta_2 \ldots,\ \varphi\theta_{2n-1};\quad f\theta_1 \,.\, F\theta_1 \,;\ f\theta_2 \,.\, F\theta_2 \,;\ \ldots;\ f\theta_{2n-1} \,.\, F\theta_{2n-1} \,.$$

On peut remarquer que la formule (99) doit se déduire de la formule (94), en y faisant $\theta_{2n} = 0$.

L'équation (97') donne encore

$$\varphi(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{2n-1} + \varepsilon_{2n}\theta_{2n}) = C.$$

On trouve $C = 0$. Si donc $\varepsilon_{2n} = 1$ on aura le théorème suivant:

Théorème VIII. Si l'expression

$$\frac{\{a_0 + a_1(\varphi\theta)^2 + a_2(\varphi\theta)^4 + \ldots + a_n(\varphi\theta)^{2n}\} - (b_0\varphi\theta + b_1(\varphi\theta)^3 + \ldots + b_{n-2}(\varphi\theta)^{2n-3}) \,.\, f\theta \,.\, F\theta}{(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_1)(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_2)(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_3) \ldots (\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_{2n})}$$

se réduit à une quantité finie pour $\theta = \theta_1 \,,\ \theta_2 \,,\ \ldots,\ \theta_{2n}$ on aura toujours:

$$\varphi(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{2n}) = 0.$$

En faisant $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_{2n} = \alpha$ on en déduira un autre théorème:

Théorème IX. Si une équation de la forme

$$(a_0 + a_1x^2 + \ldots + a_nx^{2n})^2$$
$$- (b_0x + \ldots + b_{n-2}x^{2n-3})^2(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2) = a_n^2\{x^2 - \varphi^2\alpha\}^{2n}$$

a lieu indépendemment de la valeur de x, la quantité α satisfera nécessairement à l'équation

$$\varphi(2n\alpha) = 0,$$

c'est-à-dire on doit avoir $\alpha = \dfrac{m\omega + m'\varpi i}{2n}$ où m et m' sont des nombres entiers.

3. Si l'on fait

$$(100) \qquad \begin{cases} p = a_0 x + a_1 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{2n-1}, \\ q = b_0 \quad + b_1 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{2n-2} \end{cases}$$

ou encore

$$(101) \qquad \begin{cases} p = a_0 \quad + a_1 x^2 + \ldots + a_n \quad x^n, \\ q = b_0 x + b_1 x^3 + \ldots + b_{n-1} x^{2n-1} \end{cases}$$

on démontrera de la même manière les deux théorèmes suivants:

Théorème X. Si l'expression

$$\frac{a_0 \varphi\theta + a_1 (\varphi\theta)^3 + \ldots + a_{n-1} (\varphi\theta)^{2n-1} - (b_0 + b_1 (\varphi\theta)^2 + \ldots + b_{n-1} (\varphi\theta)^{2n-2}) . f\theta . F\theta}{(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_1)(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_2) \ldots (\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_{2n})^2}$$

reçoit une valeur finie pour $\theta = \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2n}$ on aura toujours

$$\varphi(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_{2n}) = \frac{1}{0}.$$

Théorème XI. Si l'expression

$$\frac{a_0 + a_1 (\varphi\theta)^2 + \ldots + a_n (\varphi\theta)^{2n} - (b_0 \varphi\theta + b_1 (\varphi\theta)^3 + \ldots + b_{n-1} (\varphi\theta)^{2n-1}) . f\theta . F\theta}{(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_1)(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_2) \ldots (\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_{2n+1})}$$

reçoit une valeur finie pour $\theta = \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2n+1}$ on aura toujours

$$\varphi(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{2n+1}) = \frac{1}{0}.$$

En supposant $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \alpha$, on aura comme corollaires:

Théorème XII. Si l'équation

$$(a_0 x + a_1 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{2n-1})^2$$
$$- (b_0 + b_1 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{2n-2})^2 (1 - c^2 x^2)(1 + e^2 x^2) = c^2 e^2 b_{n-1}^2 (x^2 - \varphi^2\alpha)^{2n+1}$$

a lieu pour une valeur quelconque de x, la quantité α satisfera nécessairement à l'équation

$$\varphi(2n\alpha) = \frac{1}{0}.$$

Théorème XIII. Si l'équation

$$(a_0 + a_1x^2 + \ldots + a_nx^{2n})^2 - (b_0x + b_1x^3 + \ldots + b_{n-1}x^{2n-1})^2(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)$$
$$= c^2e^2b_{n-1}^2(x^2 - \varphi^2\alpha)^{2n+1}$$

a lieu pour une valeur quelconque de x, la quantité α satisfera nécessairement à l'équation

$$\varphi(2n + 1)\alpha = \frac{1}{0}.$$

Ainsi p. ex. si l'on suppose $n = 1$ on trouve que l'équation

$$a_0^2x^2 - b_0^2(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2) = e^2c^2b_0^2(x^2 - \varphi^2\alpha)^2$$

doit donner

$$\varphi(2\alpha) = \frac{1}{0}.$$

L'équation précédente donne en effet $-1 = e^2c^2\varphi^4\alpha$ et cette relation entraîne l'équation $\varphi(2\alpha) = \frac{1}{0}$; comme on peut le voir par la formule

$$\varphi 2\alpha = \frac{2\varphi\alpha . f\alpha . F\alpha}{1 + e^2c^2\varphi^4\alpha}.$$

§ 4.

Relations remarquables entre les quantités de la forme

$$\varphi\left(\frac{m\omega + m'\varpi i}{2n + 1}\right).$$

La formule (38) du § 2 donne pour la quantité $\varphi\varepsilon$ une valeur exprimée en fonction linéaire des quantités de la forme $\varphi(m\alpha + \mu\beta)$. Or on peut à l'aide d'un théorème démontré dans le paragraphe précédent trouver pour $\varphi\varepsilon$ une autre expression beaucoup plus simple. En effet, en vertu du théorème VII l'équation (40) donnera nécessairement

$$\varphi(2n + 1)\varepsilon = 0$$

d'où l'on tire

$$\varepsilon = \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n + 1}$$

et par suite

$$\varphi\varepsilon = \varphi\left(\frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right)$$

où m et μ sont deux nombres entiers. Il en résulte en vertu de la formule (38) qu'on pourra toujours trouver deux nombres entiers m et μ tels que

$$\varphi\left(\frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1} \cdot \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \,\delta^{mk+\mu k'} . \varphi(m\alpha + \mu\beta),$$

quelles que soient d'ailleurs les valeurs des nombres entiers k et k'.

On aura en substituant les valeurs $\alpha = \frac{2\omega}{2n+1}$, $\beta = \frac{2\varpi i}{2n+1}$

$$\varphi\left(\frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1} \cdot \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \,\delta^{mk+\mu k'} . \varphi\left(\frac{2m\omega + 2\mu\varpi i}{2n+1}\right).$$

Les nombres entiers m et μ du premier membre dépendront de la valeur de k et k'. Par un raisonnement, que je supprime ici, je suis parvenu à démontrer que $m = -(-1)^n . nk'$, $\mu = +(-1)^n kn$, en sorte qu'on aura pour des valeurs quelconques entières de k, k' et n

$$(102) \quad \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \,\delta^{mk+\mu k'} . \varphi\left(\frac{2m\omega + 2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = -(-1)^n . (2n+1) . \varphi\left(\frac{nk'\omega - nk\varpi i}{2n+1}\right)$$

où

$$\delta = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi}{2n+1}.$$

On pourra déduire de la formule précédente plusieurs autres qui sont plus simples. Ainsi si l'on multiplie les deux membres par $\delta^{-\nu k'}$ et qu'on prenne ensuite la somme par rapport à k' depuis $k' = 0$ jusqu'à $k' = 2n$ on trouvera

$$(103) \quad \sum_0^{2n}{}_m \,\delta^{mk} . \varphi\left(\frac{2m\omega + 2n\varpi i}{2n+1}\right) = (-1)^{n+1} . \sum_0^{2n}{}_{k'} \,\delta^{-\nu k'} \varphi\left(\frac{nk'\omega - nk\varpi i}{2n+1}\right).$$

Si l'on fait $k = 0$, on obtiendra en développant cette formule:

$$(104) \quad \varphi\left(\frac{2\nu\varpi i}{2n+1}\right) + \varphi\left(\frac{2\omega + 2\nu\varpi i}{2n+1}\right) + \varphi\left(\frac{4\omega + 2\nu\varpi i}{2n+1}\right) + \ldots + \varphi\left(\frac{4n\omega + 2\nu\varpi i}{2n+1}\right)$$

$$= (-1)^{n+1} . \left\{\delta^{-\nu}\varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) + \delta^{-2\nu}\varphi\left(\frac{2n\omega}{2n+1}\right) + \ldots + \delta^{-2n\nu}\varphi\left(\frac{2n^2\omega}{2n+1}\right)\right\}.$$

En multipliant les deux membres de l'équation (102) par $\delta^{-\nu k}$ et prenant ensuite la somme par rapport à k depuis $k = 0$ jusqu'à $k = 2n$, on obtiendra

$$(105)\quad \sum_{0}^{2n}{}_{\mu}\, \delta^{\mu k'} . \varphi\left(\frac{2\nu\omega + 2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = (-1)^{n+1} . \sum_{0}^{2n}{}_{k}\, \delta^{-\nu k} . \varphi\left(\frac{nk'\omega - nk\varpi i}{2n+1}\right).$$

Pour $k' = 0$ on obtiendra la formule

$$(106)\quad \varphi\left(\frac{2\nu\omega}{2n+1}\right) + \varphi\left(\frac{2\nu\omega + 2\varpi i}{2n+1}\right) + \varphi\left(\frac{2\nu\omega + 4\varpi i}{2n+1}\right) + \ldots + \varphi\left(\frac{2\nu\omega + 4n\varpi i}{2n+1}\right)$$

$$= (-1)^n . \left\{ \delta^{-\nu}\varphi\left(\frac{n\varpi i}{2n+1}\right) + \delta^{-2\nu}\varphi\left(\frac{2n\varpi i}{2n+1}\right) + \ldots + \delta^{-2n\nu}\varphi\left(\frac{2n^2\varpi i}{2n+1}\right) \right\}.$$

Si l'on suppose par ex. dans les deux formules (104), (106) $n = 1$, $\nu = 2$ on obtiendra:

$$\varphi\left(\frac{4\varpi i}{3}\right) + \varphi\left(\frac{2\omega + 4\varpi i}{3}\right) + \varphi\left(\frac{4\omega + 4\varpi i}{3}\right) = \quad 2 \sin\frac{2\pi}{3} . \varphi\left(\frac{\omega}{3}\right),$$

$$\varphi\left(\frac{4\omega}{3}\right) + \varphi\left(\frac{4\omega + 2\varpi i}{3}\right) + \varphi\left(\frac{4\omega + 4\varpi i}{3}\right) = -2 \sin\frac{2\pi}{3} . \varphi\left(\frac{\varpi i}{3}\right)$$

ou bien

$$\varphi\left(\frac{\varpi i}{3}\right) + \varphi\left(\frac{\omega + \varpi i}{3}\right) + \varphi\left(\frac{\omega - \varpi i}{3}\right) = -\sqrt{3} . i . \varphi\left(\frac{\omega}{3}\right),$$

$$\varphi\left(\frac{\omega}{3}\right) - \varphi\left(\frac{\omega + \varpi i}{3}\right) - \varphi\left(\frac{\omega - \varpi i}{3}\right) = +\sqrt{3} . i . \varphi\left(\frac{\varpi i}{3}\right);$$

on en tire

$$(107)\quad \begin{cases} \varphi\left(\frac{\omega + \varpi i}{3}\right) = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\varphi\left(\frac{\omega}{3}\right) + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} . \varphi\left(\frac{\varpi i}{3}\right), \\ \varphi\left(\frac{\omega - \varpi i}{3}\right) = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\varphi\left(\frac{\omega}{3}\right) - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} . \varphi\left(\frac{\varpi i}{3}\right). \end{cases}$$

On pourra encore trouver d'autres relations plus simples que celles exprimées par les formules (104), (106). On a en effet:

$$(108)\quad 0 = \varphi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right) - \delta^{m}\varphi\left(\frac{\omega + m\varpi i}{2n+1}\right) + \delta^{-m}\varphi\left(\frac{\omega - m\varpi i}{2n+1}\right) + \delta^{2m}\varphi\left(\frac{2\omega + m\varpi i}{2n+1}\right)$$

$$- \delta^{-2m}\varphi\left(\frac{2\omega - m\varpi i}{2n+1}\right) - \ldots + (-1)^n \left\{ \delta^{nm}\varphi\left(\frac{n\omega + m\varpi i}{2n+1}\right) - \delta^{-nm}\varphi\left(\frac{n\omega - m\varpi i}{2n+1}\right) \right\},$$

$$(109)\quad 0=\varphi\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)+\delta^{m}\varphi\left(\frac{m\omega-\varpi i}{2n+1}\right)+\delta^{-m}\varphi\left(\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)-\delta^{2m}\varphi\left(\frac{m\omega-2\varpi i}{2n+1}\right)$$

$$-\delta^{-2m}\varphi\left(\frac{m\omega-2\varpi i}{2n+1}\right)+\ldots-(-1)^{n}.\left\{\delta^{mn}\varphi\left(\frac{m\omega-n\varpi i}{2n+1}\right)+\delta^{-mn}\varphi\left(\frac{m\omega+n\varpi i}{2n+1}\right)\right\}.$$

Ces équations peuvent remplacer la formule (102) dans toute sa généralité. Elles donneront des résultats différents pour $m=0, 1, 2, 3, \ldots, n$, mais ceux qu'on obtiendra pour une autre valeur de m rentreront dans ceux-là.

§ 5.

Je terminerai ce second mémoire par l'énoncé de plusieurs théorèmes qui me paraissent de quelque importance.

Théorème XIV. Soient pour abréger $\alpha=\dfrac{2m\omega+2\mu\varpi i}{2n+1}$ où les trois nombres entiers $m, \mu, 2n+1$ ne sont pas divisibles par le même facteur et

$$y=\varphi(\theta).\varphi(\alpha-\theta).\varphi(\alpha+\theta).\varphi(2\alpha-\theta).\varphi(2\alpha+\theta)\ldots\varphi(n\alpha-\theta).\varphi(n\alpha+\theta),$$

$$c_1=c^{2n+1}.\frac{1+c^2\varphi^2\alpha}{1-c^2\varphi^2\alpha}.\frac{1+c^2\varphi^2 2\alpha}{1-c^2\varphi^2 2\alpha}\cdots\frac{1+e^2\varphi^2 n\alpha}{1-c^2\varphi^2 n\alpha},$$

$$e_1=e^{2n+1}.\frac{1-c^2\varphi^2\alpha}{1+e^2\varphi^2\alpha}.\frac{1-c^2\varphi^2 2\alpha}{1+e^2\varphi^2 2\alpha}\cdots\frac{1-c^2\varphi^2 n\alpha}{1+e^2\varphi^2 n\alpha},$$

Cela posé, si l'on désigne par P une fonction quelconque entière des $2n$ quantités:

$$\varphi\theta, \varphi(\theta+\alpha), \varphi(\theta+2\alpha), \ldots, \varphi(\theta+2n\alpha)$$

qui aura la propriété de rester invariable par le changement de θ en $\theta+\alpha$; on pourra toujours faire

$$P=p+q.\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}$$

où p et q sont deux fonctions *entières* de la quantité y. Si l'on désigne par P' la valeur de P lorsqu'on y change le signe de α on aura en même temps

$$P'=p-q.\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}.$$

En désignant par ν le degré de la fonction proposée P par rapport à $\varphi\theta$,

les fonctions p et q seront respectivement des degrés ν et $\nu - 2$ par rapport à y.

La démonstration de ce théorème est principalement fondée sur cela que les racines de l'équation

$$(110)\qquad 0 = x(\varphi^2\alpha - x^2)(\varphi^2 2\alpha - x^2)\dots(\varphi^2 n\alpha - x^2)$$
$$- y(1 + e^2c^2\varphi^2\alpha . x^2)(1 + e^2c^2\varphi^2 2\alpha . x^2)\dots(1 + e^2c^2\varphi^2 n\alpha . x^2)$$

sont les $2n + 1$ quantités

$$\varphi\theta\,,\ \varphi(\theta + \alpha)\,,\ \dots\,,\ \varphi(\theta + 2n\alpha).$$

Si l'on pose par ex.:

$$P = \varphi\theta + \varphi(\theta + \alpha) + \dots + \varphi(\theta + 2n\alpha)$$

on trouvera cette formule:

$$(111)\qquad (-1)^n . \varphi\theta . \varphi(\alpha-\theta) . \varphi(\alpha+\theta) \dots \varphi(n\alpha+\theta) . \varphi(n\alpha-\theta) . e^{2n} . c^{2n} . (\varphi\alpha . \varphi 2\alpha \dots \varphi n\alpha)^2$$
$$= \varphi\theta + \varphi(\theta + \alpha) + \varphi(\theta + 2\alpha) + \dots + \varphi(\theta + 2n\alpha).$$

Si l'on fait:

$$(112)\qquad P = \{\varphi\theta + \delta^n\varphi(\theta + \alpha) + \delta^{2n}\varphi(\theta + 2\alpha) + \dots + \delta^{2nn}\varphi(\theta + 2n\alpha)\}^{2n+1}$$

où

$$\delta = \cos\frac{2\pi}{2n + 1} + i \sin\frac{2\pi}{2n + 1}\,,$$

P aura la propriété requise et l'on trouvera:

$$(113)\qquad P = a_0 y + a_1 y^2 + a_2 y^3 + \dots + a_n y^{2n+1}$$
$$+ (b_0 + b_1 y^2 + \dots + b_{n-1} y^{2n-2})\sqrt{(1 - c_1^2 y^2)(1 + e_1^2 y^2)}$$

où les coefficients $a_0\,, a_1\,, \dots\,, b_0\,, b_1\,, \dots\,, b_{n-1}$ satisfont à l'équation

$$(114)\qquad (a_0 y + a_1 y^3 + \dots + a_n y^{2n+1})^2 - (b_0 + b_1 y^2 + \dots + b_{n-1} y^{2n-2})^2 (1 - c_1^2 y^2)(1 + e_1^2 y^2)$$
$$= a_n^2 (y^2 - k^2)^{2n+1}$$

pour une valeur quelconque y.

Connaissant la valeur de P pour chaque valeur de μ il est facile d'en tirer la résolution algébrique de l'équation. On a en effet en désignant par P_μ la valeur de P qui répond à μ:

$$(115)\qquad \varphi\theta + \delta^\mu\varphi(\theta+\alpha) + \delta^{2\mu}\varphi(\theta+2\alpha) + \ldots + \delta^{2n\mu}\varphi(\theta+2n\alpha) = \sqrt[2n+1]{P_\mu}$$

d'où l'on tire ensuite en faisant $\mu = 0, 1, 2, \ldots, 2n$

$$(116)\qquad \varphi(\theta+m\alpha) = \frac{1}{2n+1}\Big\{(-1)^n e^{2n}c^{2n}(\varphi\alpha\,.\,\varphi 2\alpha\ldots\varphi n\alpha)^2\,.\,y$$
$$+ \delta^{-m}.\sqrt[2n+1]{P_1} + \delta^{-2m}.\sqrt[2n+1]{P_2} + \ldots + \delta^{-2nm}.\sqrt[2n+1]{P_{2n}}\Big\};$$

ce qui est l'expression d'une racine quelconque de l'équation.

Théorème XV. La quantité $\varphi\left(\frac{m\varpi i + k\omega}{2n+1}\right)$ pourra toujours s'exprimer algébriquement en fonction de $\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$. On aura en effet

$$(117)\qquad \varphi\left(\frac{m\varpi i+2k\omega}{2n+1}\right) = \frac{i}{2n+1}.\Big\{A+\delta^{-k}.\sqrt[2n+1]{A_1}+\delta^{-2k}.\sqrt[2n+1]{A_2}+\ldots+\delta^{-2nk}.\sqrt[2n+1]{A_{2n}}\Big\},$$

où $A, A_1, \ldots, A_{2n}$ sont des quantités réelles et en même temps des fonctions *rationnelles* des deux quantités $\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)$. Pour $k=0$ on aura

$$(118)\qquad \varphi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right) = \frac{i}{2n+1}.\Big\{A + \sqrt[2n+1]{A_1} + \sqrt[2n+1]{A_2} + \ldots + \sqrt[2n+1]{A_{2n}}\Big\}.$$

Il est à remarquer que l'une des quantités $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ est nécessairement égale à zéro. Cela se voit à l'aide de la formule (108).

La démonstration de ce théorème se déduit des deux formules (116), (104).

Théorème XVI. Si les deux quantités ω et ϖ sont liées entre elles par l'équation $\omega = \varpi.\sqrt{2n+1}$, c'est-à-dire si l'on a

$$\int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}} = \sqrt{2n+1}\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{\sqrt{(1+e^2x^2)(1-c^2x^2)}}$$

où e et c sont des quantités réelles et positives, alors la fonction φ aura la propriété suivante:

$$\sin\left(\frac{2\mu\pi}{2n+1}\right).\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)-\sin\left(\frac{4\mu\pi}{2n+1}\right).\varphi\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)+\dots$$

$$-(-1)^n\sin\left(\frac{2n\mu\pi}{2n+1}\right).\varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)=(-1)^{n+\mu}.\sqrt{2n+1}.\varphi\left(\frac{\mu\omega}{2n+1}\right),$$

où μ désigne un nombre entier quelconque.

Si par ex. $n=2$, $\mu=1$ on aura $\omega=\varpi\sqrt{5}$ et

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right).\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right).\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)=-\sqrt{5}.\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right).$$

Fin du second mémoire.

Christiania le 27 août 1828.

SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

§ 1. *Introduction.*

Je voudrais, sur la demande de M. MITTAG-LEFFLER, présenter ici un exposé d'ensemble de mes travaux sur les fonctions abéliennes, en y ajoutant les quelques résultats nouveaux que j'ai pu obtenir dans ces derniers temps.

Une courbe C de genre p admet p intégrales de première espèce

$$u_1, u_2, \ldots, u_p$$

et si cette courbe C est coupée par une autre courbe algébrique variable C', le théorème d'Abel nous apprend que la somme des valeurs de l'intégrale u_k aux divers points d'intersection est une constante.

Si la courbe C' est adjointe à C et de degré suffisant (j'appelle D ce degré) et que le nombre des points d'intersection de C et de C' autres que les points doubles soit égal à q, on sait que $q - p$ de ces points peuvent être choisis à volonté.

Prenons alors p points quelconques sur C; soient $M_1, M_2, \ldots, M_p$ ces points et considérons d'une part les p sommes suivantes:

$$(1) \qquad v_k = u_{k.1} + u_{k.2} + \ldots + u_{k.p} \qquad (k=1, 2, \ldots, p)$$

où $u_{k.i}$ représente la valeur de l'intégrale u_k au point M_i; et envisageons d'autre part un certain nombre de fonctions symétriques des coordonnées des p points $M_1, M_2, \ldots, M_p$ et que j'appellerai les fonctions Φ.

Je pourrai choisir $p+1$ fonctions Φ de telle façon que toutes les autres fonctions symétriques des coordonnées des points M s'expriment rationnellement par le moyen de ces $p+1$ fonctions, c'est à dire qu'à un système de valeurs de ces $p+1$ fonctions ne puisse correspondre plus d'un système de p points M. Ces $p+1$ fonctions seront d'ailleurs liées par une relation algébrique.

Ces $p+1$ fonctions Φ seront des fonctions analytiques des v_k; et ces fonctions seront holomorphes sauf peut-être en certains points singuliers. Je pourrai toujours trouver un système de points M dans le voisinage desquels les fonctions Φ soient holomorphes. Je puis d'ailleurs supposer que ce système particulier de points correspond aux valeurs $v_k=0$; car les intégrales u_k ne sont définies qu'à une constante près et je puis disposer de cette constante arbitraire de façon que v_k s'annule pour ce système particulier de points. Dans ces conditions je puis dire que les fonctions Φ sont holomorphes pourvu que les modules des v soient suffisamment petits.

Cela posé, choisissons sur C un nombre $q-2p$ de points fixes que j'appellerai

$$A_1\,,\ A_2\,,\ \ldots\,,\ A_{q-2p}\,.$$

Soit α_{ki} la valeur de l'intégrale u_k au point A_i et soit:

$$\beta_k=\alpha_{k1}+\alpha_{k2}+\ldots+\alpha_{k.q-2p}\,.$$

Par les p points M et par les $q-2p$ points A je puis faire passer une courbe adjointe C' de degré D et une seule. Cette courbe coupe C en tout en q points en dehors des points doubles, elle passera donc encore par p autres points que j'appelle

$$M'_1\,,\ M'_2\,,\ \ldots\,,\ M'_p\,.$$

J'appelle u'_{ki} la valeur de u_k en M'_i et je pose:

$$v'_k=u'_{k.1}+u'_{k.2}+\ldots+u'_{k.p}\,.$$

Soient $\Phi(v'_k)$ les valeurs des fonctions Φ correspondant au système des M'. A un système de points M correspond un système de points M' et un seul puisque par les points M et A je ne puis faire passer qu'une seule courbe C'. Il en résulte que les fonctions $\Phi(v'_k)$ s'expriment rationnellement par le moyen des fonctions $\Phi(v_k)$.

D'autre part le théorème d'Abel nous apprend que l'on a:

$$v_k + \beta_k + v'_k = \gamma_k$$

les γ_k étant des constantes. Donc les $\Phi(v'_k) = \Phi(\gamma_k - \beta_k - v_k)$ sont des fonctions rationnelles des $\Phi(v_k)$. Mais les points A ont été choisis arbitrairement sur C; donc les constantes β_k et par conséquent les $\gamma_k - \beta_k$ sont quelconques pourvu que le degré de C' ait été pris assez grand pour que $q \geqq 3p$. Donc quelles que soient les constantes λ_k, les $\Phi(\lambda_k - v_k)$ sont des fonctions rationnelles des $\Phi(v_k)$.

Donc quelles que soient les constantes λ et μ, les

$$\Phi(\lambda_k + v_k) = \Phi[(\lambda_k + \mu_k) - (\mu_k - v_k)]$$

sont des fonctions rationnelles des $\Phi(\mu_k - v_k)$ qui sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des $\Phi(v_k)$. Les $\Phi(\lambda_k + v_k)$ sont donc des fonctions rationnelles des $\Phi(v_k)$; en permutant le rôle des quantités λ_k et v_k, on voit que ce sont aussi des fonctions rationnelles des $\Phi(\lambda_k)$. Les $\Phi(\lambda_k + v_k)$ sont donc des fonctions rationnelles des $\Phi(v_k)$ et des $\Phi(\lambda_k)$. Si nous faisons $\lambda_k = v_k$, nous voyons que les $\Phi(2v_k)$ sont des fonctions rationnelles des $\Phi(v_k)$.

Or j'ai dit que les $\Phi(v_k)$ sont holomorphes si le module de v_k est suffisamment petit, plus petit que ρ par exemple. Alors les $\Phi(2v_k)$ qui sont rationnels par rapport aux $\Phi(v_k)$ seront holomorphes si $|v| < \rho$; donc les $\Phi(v_k)$ sont méromorphes si $|v| < 2\rho$. Mais alors les $\Phi(2v_k)$ étant rationnels par rapport aux $\Phi(v_k)$ seront méromorphes pourvu que $|v| < 2\rho$. Donc les $\Phi(v_k)$ seront méromorphes pourvu que $|v| < 4\rho$; et ainsi de suite.

En résumé les Φ sont des fonctions uniformes et méromorphes des v *pour toutes les valeurs de ces variables.*

Quand l'un des points M décrit un cycle sur la surface de Riemann correspondant à la courbe C, les fonctions Φ reviennent à leurs valeurs primitives, et les intégrales u_k et par conséquent les v_k augmentent d'une période. Il en résulte que les fonctions Φ sont périodiques; ce sont des fonctions à p variables et à $2p$ périodes.

C'est ainsi qu'on a été conduit aux fonctions abéliennes, et Riemann a montré comment on peut les exprimer par le moyen des fonctions θ.

Mais une courbe de genre p, dépend de $3p - 3$ paramètre, tandis qu'une fonction θ de p variables dépend de $\frac{p(p+1)}{2}$ paramètres. Ce second

nombre est plus grand que le premier sauf pour $p = 2$ et pour $p = 3$. Il y a donc des fonctions θ de p variables qui ne peuvent pas être engendrées par une courbe de genre p de la façon que je viens de dire; aussi appellerai-je fonctions θ *spéciales* et fonctions abéliennes *spéciales* celles qui sont susceptibles de ce mode de génération.

Une des premières questions à résoudre est donc de reconnaître les relations des fonctions abéliennes spéciales avec les fonctions abéliennes générales et les caractères qui les différencient les unes des autres.

Mais une autre question se pose. Riemann a démontré qu'il y a une certaine relation entre les périodes d'une fonction abélienne spéciale. Si cette relation a lieu, on peut former la fonction θ; si elle n'a pas lieu, la fonction θ n'existe pas. Nous venons de voir qu'il y a des fonctions θ qui ne sont pas spéciales, et par conséquent des fonctions $2p$ fois périodiques qui ne sont pas spéciales et dont les périodes sont cependant liées par la relation de Riemann.

Mais ne peut-il pas exister aussi des fonctions $2p$ fois périodiques dont les périodes ne sont pas liées par une semblable relation et qui ne peuvent pas s'exprimer par les fonctions θ? La réponse doit être négative. Toute fonction à p variables et $2p$ périodes peut s'exprimer par les fonctions θ.

C'est là un théorème que j'appellerai le théorème B et sur lequel je reviendrai dans la suite.

Mais je dois d'abord parler d'un autre théorème que j'appellerai le théorème A et d'après lequel entre $p + 1$ fonctions à p variables et à $2p$ périodes il y a toujours une relation algébrique.

§ 2. *Démonstration du théorème A.*

Théorème A. Si l'on a $p + 1$ fonctions de p variables, méromorphes pour toutes les valeurs de ces p variables et admettant $2p$ périodes distinctes, ces fonctions sont liées par une relation algébrique.

Dans la plupart des démonstrations du théorème B, on s'appuie sur le théorème A et on a déjà proposé plusieurs démonstrations de ce théorème A. On pourrait d'ailleurs s'en passer puisque je donnerai plus loin une

démonstration du théorème B, indépendante du théorème A et que d'ailleurs rien n'est plus facile que de déduire le théorème A du théorème B.

Je ne crois pourtant pas inutile de développer ici une démonstration nouvelle du théorème A que je n'avais fait qu'esquisser dans les Comptes Rendus en 1897.

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$, des fonctions des p variables v, méromorphes pour toutes les valeurs finies de ces variables et admettant $2p$ périodes. Je considère les zéros communs à ces p fonctions qui sont à l'intérieur du prismatoïde des périodes.

1ère proposition.

Je dis d'abord que ces zéros communs, ou bien sont en nombre fini, ou bien forment un continuum.

Soit en effet

$$v_1 = \alpha_1, \qquad v_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad v_p = \alpha_p$$

un des zéros communs des fonctions F, c'est à dire un système de valeurs des v pour lequel on a:

$$F_1 = F_2 = \ldots = F_p = 0.$$

D'après notre hypothèse, les fonctions F sont méromorphes pour toutes les valeurs des v; cela signifie que si l'on considère les parties réelles et imaginaires des v comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $2p$ dimensions l'on peut construire dans cet espace une série de domaines $D_1, D_2, \ldots$ qui seront par exemple des hypersphères et cela de telle façon:

1° que tout point de l'espace à $2p$ dimensions appartienne au moins à l'un de ces domaines.

2° que si R est une région finie quelconque de cet espace, par exemple le prismatoïde des périodes, il n'y a qu'un nombre fini de domaines D qui soient en totalité ou en partie contenus dans la région R.

3° qu'à l'intérieur de chaque domaine D, on ait:

$$F_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \qquad F_2 = \frac{P_2}{Q_2}, \quad \ldots, \quad F_p = \frac{P_p}{Q_p},$$

les fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_p$; $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$; étant holomorphes dans tout le domaine D.

Si maintenant deux des domaines D et D_1 ont une partie commune (ce qui arrivera forcément, car, puisque nous voulons que tout point de l'espace soit intérieur au moins à l'un de nos domaines, il doit exister des régions de l'espace communes à plusieurs domaines) nous avons dans le domaine D:

$$F_1 = \frac{P_1}{Q_1},$$

dans le domaine D_1:

$$F_1 = \frac{P'_1}{Q'_1}$$

et par conséquent dans la partie commune

$$F_1 = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P'_1}{Q'_1}.$$

Il ne s'ensuit pas que dans cette partie commune P_1 est égal à P'_1 et Q_1 à Q'_1. J'ai démontré il est vrai dans le tome 2 des Acta mathematica un théorème d'après lequel toute fonction méromorphe dans tout l'espace peut toujours être considérée comme le quotient de deux fonctions holomorphes dans tout l'espace. Depuis M. Cousin a donné dans sa thèse une démonstration de ce même théorème.

Il en résulterait alors que les deux fonctions holomorphes P_1 et Q_1 pourraient être supposées les mêmes dans tous les domaines. Mais je voudrais éviter pour le moment de m'appuyer sur ce théorème.

Démonstration de la 1ère proposition.

Il s'agit de démontrer qu'à l'intérieur du domaine D, les p fonctions holomorphes

$$P_1, P_2, \dots P_p$$

ne peuvent avoir un nombre infini de zéros, à moins que l'ensemble de ces zéros ne forme un continuum analytique.

Si en effet ces fonctions possédaient un nombre infini de zéros communs, à l'intérieur de D, il devrait y avoir dans D un point:

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \quad \dots, \quad x_p = \alpha_p$$

dans le voisinage duquel il y aurait une infinité de zéros communs à nos p fonctions. Cela posé; supposons que nos p équations

$$(1) \qquad P_1 = P_2 = \ldots = P_p = 0$$

ne se réduisent pas toutes à des identités; que par exemple P_1 ne soit pas identiquement nul. Je pourrai supposer que $P_1 = 0$ ne se réduit pas à une identité quand on fait

$$v_2 = \alpha_2, \qquad v_3 = \alpha_3, \quad \ldots, \quad v_p = \alpha_p.$$

Si en effet cela avait lieu on pourrait tourner la difficulté par un simple changement linéaire de variables. Comme P_1 n'est pas identiquement nul, il y a toujours un point

$$v_1 = \beta_1, \qquad v_2 = \beta_2, \quad \ldots, \quad v_p = \beta_p$$

pour lequel P_1 n'est pas nul. Soient alors $v'_1, v'_2, \ldots, v_p$, p combinaisons linéaires des v; $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_p$ les combinaisons linéaires correspondantes des α. $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_p$ les combinaisons linéaires correspondantes des β. Je pourrai choisir les coefficients de ces combinaisons linéaires de telle sorte que:

$$\beta'_2 = \alpha'_2, \qquad \beta'_3 = \alpha'_3, \quad \ldots, \quad \beta'_p = \alpha'_p.$$

Je prendrai alors les v' comme nouvelles variables et je verrai que l'équation $P_1 = 0$ ne se réduit pas à une identité pour

$$v'_2 = \alpha'_2, \qquad v'_3 = \alpha'_3, \quad \ldots, \quad v'_p = \alpha'_p.$$

Supposons donc que P_1 ne s'annule pas identiquement pour $v_2 = \alpha_2$, $v_3 = \alpha_3, \ldots, v_p = \alpha_p$. Alors en vertu des lemmes que j'ai démontrés au début de ma Thèse Inaugurale, l'équation $P_1 = 0$ definira $v_1 - \alpha_1$ en fonction algébroïde de $v_2 - \alpha_2, v_3 - \alpha_3, \ldots, v_p - \alpha_p$. Donc en vertu des mêmes lemmes $P_2, P_3, \ldots, P_p$ seront aussi des fonctions algébroïdes de $v_2 - \alpha_2, \ldots, v_p - \alpha_p$ et les équations

$$P_2 = P_3 = \ldots = P_p = 0$$

pourront être remplacées par les suivantes

$$(2) \qquad P'_2 = P'_3 = \ldots = P''_p = 0$$

où les P^ν sont des fonctions holomorphes de

$$v_2 - \alpha_2, v_3 - \alpha_3, \ldots, v_p - \alpha_p.$$

Les équations (2) sont de même forme que les équations (1), seulement le nombre des équations comme celui des variables est diminué d'une unité.

Si ces équations (2) se réduisent à des identités, l'équation $P_1 = 0$ suffit pour définir les zéros communs qui forment un continuum analytique à $p - 1$ dimensions.

Si les équations (2) ne se réduisent pas à des identités, on opérera sur elles comme sur les équations (1).

On ne sera arrêté que quand on arrivera à un système d'équations se réduisant à des identités, auquel cas l'ensemble des zéros formera un continuum analytique; ou quand le système se réduira à une équation à une inconnue. Mais pour une équation à une inconnue dont le premier membre est holomorphe et qui ne se réduit pas à une identité, on sait qu'il ne peut pas y avoir de point dans le voisinage duquel il y ait une infinité de zéros.

La proposition est donc démontrée.

Remarque. Pour appliquer ce qui précède aux fonctions méromorphes $F_1, F_2, \ldots, F_p$, il faut préciser ce que nous devons entendre par un zéro de F_1. D'abord F_1 ne pourra pas s'annuler sans que P_1 s'annule. Tous les zéros de F_1 appartiennent donc à P_1; mais il peut arriver qu'un zéro de P_1 n'appartienne pas à F_1. Soit en effet $v_i = \alpha_i$ un zéro de P_1; supposons que P_1 et Q_1 soient divisibles par une même fonction H, holomorphe dans le voisinage de $v_i = \alpha_i$ et s'annulant pour $v_i = \alpha_i$, de telle sorte que

$$P_1 = HP'_1, \qquad Q_1 = HQ'_1,$$

P'_1 et Q'_1 étant holomorphes pour $v_i = \alpha_i$. Il pourrait se faire que P_1 et H s'annulant pour $v_i = \alpha_i$, P'_1 ne s'annulât pas pour $v_i = \alpha_i$. Dans ce cas $v_i = \alpha_i$ serait un zéro de P_1, mais ne serait pas un zéro de

$$F_1 = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P'_1}{Q'_1}.$$

Reprenons alors la démonstration précédente et cherchons comme tout à l'heure les zéros communs à $F_1, F_2, \ldots, F_p$ et voisins de $v_i = \alpha_i$. Je suppose que P_1 et Q_1 soient divisible par H_1; P_2 et Q_2 par H_2; ...; P_p

et Q_p par H_p; les fonctions $H_1, H_2, \ldots, H_p$ étant holomorphes, dans le voisinage de $v_i = \alpha_i$ et nulles pour $v_i = \alpha_i$. Nous remplacerons alors les équations (1) par les équations

$$(1') \qquad \frac{P_1}{H_1} = \frac{P_2}{H_2} = \ldots = \frac{P_p}{H_p} = 0.$$

Ce sont les équations (1′) et non plus les équations (1) qui nous donneront les zéros communs à $F_1, F_2, \ldots, F_p$; mais les équations (1′) étant de même forme que les équations (1) il n'y a rien à changer au raisonnement.

Supposons maintenant que l'on envisage la partie commune aux deux domaines D et D_1 et que dans cette partie commune on ait:

$$F_k = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{P'_k}{Q'_k}$$

que P_k et Q_k soient divisibles par H_k; P'_k et Q'_k par H'_k; les fonctions H_k et H'_k étant holomorphes pour $v_i = \alpha_i$ et s'annulant pour $v_i = \alpha_i$. Supposons enfin que $\frac{P_k}{H_k}$ et $\frac{Q_k}{H_k}$ ne soient divisibles à la fois par aucune fonction holomorphe s'annulant pour $v_i = \alpha_i$, et qu'il en soit de même pour $\frac{P'_k}{H'_k}$ et $\frac{Q'_k}{H'_k}$. Alors le système des équations (1′) est équivalent au système des équations

$$(1'') \qquad \frac{P'_1}{H'_1} = \frac{P'_2}{H'_2} = \ldots = \frac{P'_p}{H'_k} = 0.$$

2e proposition.

Si les fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_p$ qui sont holomorphes dans le domaine D dépendent d'un ou plusieurs paramètres λ que l'on peut faire varier d'une manière continue; si on considère ceux des zéros communs aux p fonctions P qui sont à l'intérieur d'un domaine Δ intérieur lui-même à D; si quand on fait varier les paramètres λ entre certaines limites, le nombre des zéros communs reste fini; ce nombre ne peut varier que si un des zéros se déplaçant d'une manière continue *sort* du domaine Δ ou y *entre*, en traversant la frontière de ce domaine.

Nous savons en effet que Cauchy a exprimé le nombre des zéros de $f(z)$ situés à l'intérieur d'un contour par l'intégrale définie:

$$\frac{1}{2i\pi}\int \frac{f'dz}{f}$$

prise le long de ce contour, et que KRONECKER, généralisant le théorème de CAUCHY, a exprimé le nombre des zéros communs à $P_1, P_2, \ldots, P_p$ à l'intérieur de Δ par une intégrale multiple prise le long de la frontière de Δ.

La fonction sous le signe $\int$ reste d'ailleurs finie et continue sauf pour les zéros communs aux fonctions P, de sorte que si aucun de ces zéros ne se trouve sur la frontière de Δ, l'intégrale de KRONECKER reste finie et est une fonction continue des λ.

Si le nombre des zéros communs est infini, il y en a en général sur la frontière de Δ et l'intégrale est dans ce cas dépourvue de sens. Mais si ce nombre est fini, il n'y en aura pas en général sur la frontière de Δ; s'il y en avait, il suffirait pour tourner la difficulté de déformer infiniment peu le domaine Δ.

L'intégrale de KRONECKER est une fonction continue des λ, tant qu'il n'y a pas de zéros communs sur la frontière de Δ, et comme sa valeur est toujours un nombre entier elle doit être constante. Le nombre de ces zéros communs ne peut donc varier que quand l'un d'eux vient sur la frontière de Δ.

C. Q. F. D.

Remarque. Le théorème s'applique d'ailleurs immédiatement aux fonctions méromorphes $F_1, F_2, \ldots, F_p$, puisque les zéros communs de ces fonctions sont ceux des fonctions holomorphes que nous appelions plus haut $\frac{P_1}{H_1}, \frac{P_2}{H_2}, \ldots, \frac{P_p}{H_l}$.

Considérant maintenant un domaine Δ formé de plusieurs domaines partiels $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$; et supposons que dans chacune de ces domaines partiels la fonction F_i puisse se mettre sous la forme $\frac{P_i}{Q_i}$, le théorème s'applique au domaine total Δ.

En effet le nombre des zéros intérieurs à l'un des domaines partiels Δ_q ne peut varier que si un zéro franchit la frontière de ce domaine; alors de deux choses l'une, ou bien la partie de la frontière de Δ_q franchie par le zéro appartient à la frontière du domaine total Δ, et alors notre zéro a franchi la frontière de Δ; ou bien cette partie de la frontière de Δ_q sépare Δ_q d'un autre domaine partiel Δ_p, et alors le nombre des zéros intérieurs à Δ_q aura diminué d'une unité; mais en même temps celui des

zéros intérieurs à Δ_p aura augmenté d'une unité; le nombre *total* des zéros intérieurs à Δ n'aura pas changé.

En résumé le nombre des zéros intérieurs à Δ ne peut varier que si un zéro franchit la frontière de Δ.

C. Q. F. D.

Corollaire. Ce que nous avons dit jusqu'ici s'applique à toutes les fonctions méromorphes; nous allons voir maintenant ce qui est particulier aux fonctions abéliennes.

Je prendrai pour le domaine Δ le prismatoïde des périodes

Je vois que le nombre des zéros communs aux p fonctions F intérieurs à ce prismatoïde est fini, à moins que leur ensemble ne forme un continuum analytique; et que, quand on fait varier les λ, ce nombre, s'il reste fini, ne peut varier que quand un zéro franchit la frontière du prismatoïde. Il augmente d'une unité toutes les fois qu'un zéro entre dans le prismatoïde, et il diminue d'une unité toutes les fois qu'un zéro en sort.

Mais, à cause de la périodicité supposée de nos fonctions, un zéro ne peut entrer dans le prismatoïde sans qu'un autre en sorte; le nombre de nos zéros, s'il reste fini, demeure donc constant.

3e proposition.

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_{p+1}$, $p+1$ fonctions abéliennes à p variables. Soient

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$$

p combinaisons linéaires de ces $p+1$ fonctions de telle sorte que:

$$\Phi_q = \alpha_{q.1}F_1 + \alpha_{q.2}F_2 + \ldots + \alpha_{q.p+1}F_{p+1} + \alpha_{q.p+2}$$

le nombre des zéros communs aux p fonctions Φ, tant qu'il reste fini, est indépendant des coefficients α.

C'est là une conséquence immédiate des propositions précédentes.

Le résultat peut s'énoncer dans le langage géométrique.

Considérons $F_1, F_2, \ldots, F_{p+1}$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $p+1$ dimensions; comme ces fonctions dépendent seulement de p variables, ce point sera sur une certaine variété à p dimensions que

j'appellerai V; notre but est précisément de démontrer que cette variété est algébrique et nous voyons déjà d'après l'ensemble des résultats obtenus, que le nombre des points d'intersections de cette variété avec une droite quelconque est fini, à moins que la droite ne soit tout entière sur la variété et que ce nombre est constant pour toutes les droites qui ne sont pas tout entières sur la variété. *Soit q ce nombre.*

Considérons maintenant, au lieu d'une droite, une courbe algébrique quelconque C d'ordre n; je dis que le nombre des points d'intersection de cette courbe avec V sera nq à moins que la courbe ne soit tout entière sur la variété ou qu'elle se décompose en plusieurs composantes, une de ces composantes étant tout entière sur la variété.

Il me suffira de démontrer cela pour les courbes planes, c'est à dire pour les courbes situées sur une variété plane à 2 dimensions. L'équation générale d'une pareille courbe est:

$$\theta = 0, \qquad \Phi_1 = \Phi_2 = \ldots = \Phi_{p-1} = 0;$$

θ étant un polynôme entier d'ordre n et les Φ des polynômes du 1er ordre par rapport aux F. Le nombre des points d'intersection, tant qu'il reste fini, est indépendant des coefficients du polynôme θ; or quand ce polynôme θ se décompose en n facteurs linéaires, ce nombre est évidemment nq. Et d'un autre côté ce nombre ne peut devenir infini que si l'ensemble des points d'intersection forme un continuum analytique, c'est à dire qu'il doit être formé de tous les points de l'une au moins des composantes de notre courbe C.

La même démonstration s'appliquerait sans changement à une courbe qui serait une »intersection complète», c'est à dire dont l'équation s'écrirait:

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_p = 0$$

les θ étant des polynomes de degré quelconque. Pour étendre enfin le résultat à une courbe C qui ne serait pas une intersection complète, il suffit d'observer qu'on peut toujours trouver une intersection complète qui se compose de C et d'un certain nombre de droites.

4e proposition.

La variété V est algébrique.

Soit en effet θ un polynôme entier quelconque d'ordre n en $F_1, F_2,$ F_{p+1}. Il contient

$$\frac{(n+p+1)!}{n!\,(p+1)!}$$

coefficients arbitraires.

Soit

$$v_1 = \alpha_1, \qquad v_2 = \alpha_2\,, \quad \ldots\,, \quad v_p = \alpha_p$$

un système quelconque de valeurs des v; nous allons chercher à annuler la fonction θ et ses dérivées d'ordre $1, 2, \ldots, q$ par rapport aux p variables v pour le point $v_i = \alpha_i$. Ces dérivées étant au nombre de

$$\frac{(nq+p)!}{nq!\,p!}$$

cela sera possible pourvu que

$$\frac{(n+p+1)!}{n!\,(p+1)!} > \frac{(nq+p)!}{nq!\,p!}.$$

Or on peut toujours prendre n assez grand pour satisfaire à cette inégalité, puisque le 1$^{\text{er}}$ membre est un polynôme d'ordre $p+1$ en n et le second membre un polynôme d'ordre p.

La variété $\theta = 0$, aura alors avec la variété V un contact d'ordre nq au point $v_i = \alpha_i$. Un plan quelconque à 2 dimensions passant par le point $v_i = \alpha_i$ coupera la variété $\theta = 0$ suivant une courbe C algébrique d'ordre n qui aura avec V un contact d'ordre nq. Cette courbe C coupera donc V en $nq + 1$ points confondus avec le point $v_i = \alpha_i$.

Il en résulte qu'elle sera tout entière sur V ou qu'elle se décomposera, l'une de ses composantes C' étant tout entière sur C.

L'ensemble des courbes C' engendrera une variété V' à p dimensions. En effet, une droite quelconque D de l'espace à $p+1$ dimensions rencontrera V'; car par D et par le point $v_i = \alpha_i$ je puis faire passer un plan. Dans ce plan se trouvera d'après ce qui précède une des courbes C' et cette courbe C' rencontrera D; car une droite et une courbe algébrique situées dans un même plan se rencontrent toujours soit à distance finie, soit à l'infini. Donc D rencontre V', puisque cette courbe C' est sur V'.

C. Q. F. D.

Toutes les courbes C' étant sur la variété $\theta = 0$, la variété V' sera tout entière sur la variété algébrique $\theta = 0$. Donc ou bien ces deux variétés à p dimensions sont identiques, ou bien la variété algébrique $\theta = 0$ se décompose et V' est l'une de ces composantes; V' est donc algébrique.

Toutes les courbes C' étant sur V, la variété V' sera tout entière sur V et comme la variété V ne se décompose pas puisqu'à chaque système de valeurs des v correspond un point de V et un seul; ces deux variétés doivent être identiques.

Donc V est algébrique. C. Q. F. D.

Le théorème A est donc démontré.

Il pourrait y avoir une difficulté si la variété V avait moins de p dimensions, c'est à dire s'il y avait une relation entre les p fonctions F_1, $F_2, \ldots, F_p$; mais je dis qu'on peut toujours trouver p fonctions abéliennes qui ne soient liées par aucune relation.

Soit en effet $F(v_i)$ une fonction abélienne quelconque; considérons avec M. Wirtinger les p fonctions

$$F_k(v_i) = F(v_i + \alpha_{ik})$$

les α étant des constantes quelconques. Si entre ces p fonctions il y avait une relation, leur déterminant fonctionnel serait nul, et comme les α_{ik} sont quelconques, le déterminant où le i^e élément de la k^e ligne est

$$\frac{d}{d\alpha_{ik}} F(\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \ldots, \alpha_{pk})$$

serait identiquement nul quelles que soient les valeurs attribuées aux p^2 quantités α. Si nous considérons les p quantités

$$u_1 = \alpha_{11}, \qquad u_2 = \alpha_{21}, \quad \ldots, \quad u_p = \alpha_{p1}$$

comme des variables et les $p^2 - p$ autres α comme des constantes, cela veut dire que la fonction $F(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ satisfait à une équation de la forme

$$A_1 \frac{dF}{du_1} + A_2 \frac{dF}{du_2} + \ldots + A_p \frac{dF}{du_p} = 0$$

c'est à dire que F ne dépend que de $p - 1$ combinaisons linéaires des variables u, ce que nous ne supposerons pas.

§ 3. *Démonstration du théorème B.*

Théorème B. Toute fonction $2p$ fois périodique de p variables peut s'exprimer par le moyen des fonctions θ.

Riemann paraît avoir connu ce théorème; en tout cas, Weierstrass l'avait démontré et je crois qu'il avait dû dans son cours exposer les principes de sa démonstration; quoi qu'il en soit, cette démonstration n'avait pas été publiée et ses élèves, s'ils l'avaient connue, ne l'avaient communiquée à personne. C'est ce qui nous décida, M. Picard et moi, à aborder la question et nous donnâmes une démonstration de ce théorème dans les Comptes Rendus en 1883. Cette 1ère démonstration, dont nous reparlerons plus loin, était-elle identique à celle de Weierstrass, nous l'ignorions. Ce n'est que longtemps après, au moment de la publication des oeuvres complètes du grand géomètre que nous avons su que les deux méthodes ne différaient pas essentiellement.

M. Appell donna ensuite (Journal de Liouville 1891) une 2e démonstration du théorème B entièrement différente de la 1ère; puis vinrent deux autres démonstrations, l'une de M. Picard (Comptes Rendus, tome 124, page 1490) et l'autre de moi (Comptes Rendus, tome 124, page 1407 et Acta mathematica, tome 22).

Cette démonstration du tome 22 n'était autre chose qu'une adaptation à un but nouveau de la démonstration que j'avais donnée au tome 2 d'un théorème général sur les fonctions méromorphes; j'ai énoncé plus haut un théorème général d'après lequel toute fonction méromorphe est le quotient de deux fonctions entières et j'ai dit qu'outre ma démonstration, il en existe une autre qui a été développée par M. Cousin dans sa thèse (Acta mathematica, tome 19).

Eh bien, si ma démonstration peut être adaptée au théorème B, il en est probablement de même de celle de M. Cousin ce qui nous fournirait une cinquième démonstration du théorème B, entièrement différente des 4 premières. Cependant quand j'ai cherché à développer cette démonstration en lui conservant sa forme primitive, j'ai rencontré certaines difficultés. J'ai donc dû y introduire certaines modifications, et c'est cette démonstration modifiée, qui tient pour aussi dire le milieu entre celle de M. Cousin et la mienne que je vais chercher à adapter à l'étude du théorème

B. Rappelons d'abord les hypothèses que nous faisons. Nous avons dans l'espace à $2p$ dimensions une infinité de domaines

$$D_1, D_2, \ldots$$

tels que tout point de l'espace appartienne au moins à l'un de ces domaines et que dans le domaine D_i par exemple, la fonction abélienne F qu'il s'agit d'étudier soit égale à

$$F = \frac{P_i}{Q_i}, \tag{1}$$

P_i et Q_i étant holomorphes dans le domaine D_i.

Nous pouvons supposer qu'en aucun point M de D_i, les deux fonctions P_i et Q_i ne soient divisibles par une même fonction H, holomorphe dans le voisinage de M et s'annulant en M, de telle façon que l'on ait:

$$P_i = HP'_i, \qquad Q_i = HQ'_i,$$

P'_i et Q'_i étant holomorphes dans le voisinage de M.

On pourrait dire que si cela avait lieu on diviserait P_i et Q_i par H, et que dans la partie D'_i du domaine D_i où H est holomorphe, on écrirait:

$$F = \frac{P'_i}{Q'_i}$$

au lieu de $F = \frac{P_i}{Q_i}$. Mais ce raisonnement serait insuffisant, parce qu'on pourrait craindre que dans le domaine D'_i, qui est une partie de D_i, ne se trouvent des points où P'_i et Q'_i fussent eux-mêmes divisibles par une même fonction holomorphe, qu'on soit par conséquent obligé de détacher du domaine D'_i un domaine plus petit D''_i où l'expression de F devrait encore être modifiée, et qu'on ne soit forcé de poursuivre cette opération indéfiniment.

Nous raisonnerons donc de la manière suivante.

Soit $v_i = \alpha_i$ un point situé dans le domaine D_k et où

$$P_k = 0.$$

De l'équation $P_k = 0$, on pourra tirer v_1 par exemple en fonction algébroïde de $v_2, v_3, \ldots, v_p$. L'équation comportera d'ailleurs plusieurs solutions

$$v_1 = \varphi_1, \qquad v_1 = \varphi_2, \quad \ldots, \quad v_1 = \varphi_q; \tag{2}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q$ étant des fonctions algébroïdes de $v_2, v_3, \dots v_p$ se réduisant à α_1 pour $v_2 = \alpha_2$, $v_3 = \alpha_3$, ..., $v_p = \alpha_p$.

Nous pourrons autour du point $v_i = \alpha_i$, trouver un domaine Δ_k intérieur à D_k dans lequel les fonctions φ restent algébroïdes et dans lequel enfin l'équation $P_k = 0$ n'admette pas d'autre solution que les solutions (2).

Les fonctions algébroïdes φ pourront se répartir en groupes de la façon suivante; si

$$(v_1 - \varphi_1)(v_1 - \varphi_2)\dots(v_1 - \varphi_m)$$

est une fonction holomorphe de $v_1, v_2, \dots, v_p$ dans le voisinage de $v_i = \alpha_i$ (ce sera bien entendu un polynome entier d'ordre m et v_1) et si cette fonction holomorphe est irréductible, c'est à dire n'est pas le produit de deux fonctions holomorphes de même forme, nous dirons que les fonctions φ_1, $\varphi_2, \dots, \varphi_m$ forment un même groupe.

D'ailleurs les dimensions du domaine Δ_k restant finies quel que soit le point $v_i = \alpha_i$ nous pourrons diviser le domaine D_k en un nombre *fini* de domaines analogues à Δ_k.

Supposons maintenant qu'en faisant $v_1 = \varphi_1$, on annule identiquement non seulement P_k mais encore Q_k; il en sera évidemment de même quand on fera $v_1 = \varphi_2$, $v_1 = \varphi_3$, ..., $v_1 = \varphi_m$; les fonctions $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_m$ étant les autres fonctions du même groupe. Supposons pour fixer les idées qu'il y ait un second groupe de fonctions $\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_n$ qui substituées à la place de v_1 annulent identiquement P_k et Q_k et qu'il n'y en ait pas d'autre.

Alors P_k et Q_k seront divisibles dans le domaine Δ_k par la fonction holomorphe:

$$H_k = (v_1 - \varphi_1)(v_1 - \varphi_2)\dots(v_1 - \varphi_m)(v_1 - \varphi'_1)(v_1 - \varphi'_2)\dots(v_1 - \varphi'_n)$$

de sorte qu'on aura

$$P_k = H_k P'_k, \qquad Q_k = H_k Q'_k;$$

les fonctions H_k, P'_k et Q'_k resteront holomorphes dans tout le domaine Δ_k, et on aura dans le domaine Δ_k

$$F = \frac{P'_k}{Q'_k},$$

P'_k et Q'_k n'ayant plus de facteur commun s'annulant à l'intérieur de Δ_k.

En résumé nous pouvons toujours supposer que P_k et Q_k ne sont jamais divisibles par un même facteur H, holomorphe dans le voisinage d'un point intérieur à D_k et s'annulant en ce point.

Cela posé supposons que l'on ait $F = \frac{P_i}{Q_i}$ dans le domaine D_i et $F = \frac{P_k}{Q_k}$ dans le domaine D_k. Si les deux domaines ont une partie commune, on aura dans cette partie commune

$$\frac{P_i}{P_k} = \frac{Q_i}{Q_k}.$$

P_i ne peut s'annuler sans que P_k s'annule; car alors on aurait

$$Q_i = \frac{P_i}{P_k} Q_k$$

et Q_i s'annulerait en ce même point. Alors Q_i serait divisible par P_i, car $\frac{1}{P_k}$ est holomorphe puisque P_k ne s'annule pas. Donc P_i et Q_i seraient divisibles par un même facteur P_i ce qui est contraire à l'hypothèse que nous venons de faire.

Donc $\frac{P_k}{P_i}$ ne peut devenir infini et par conséquent est holomorphe dans toute la partie commune aux deux domaines et il en est de même de $\frac{P_i}{P_k}$.

Maintenant la fonction F étant périodique, chaque prismatoïde des périodes sera divisé en un certain nombre de domaines D_k; et on pourra supposer que tous ces prismatoïdes sont divisés de la même manière ,c'est à dire que si l'une d'eux comprend n domaines

$$D_1\,,\ D_2\,,\ \ldots\,,\ D_n$$

l'autre comprendra n domaines

$$D'_1\,,\ D'_2\,,\ \ldots\,,\ D'_n$$

correspondant respectivement à $D_1, D_2, \ldots, D_n$, de telle façon que l'on passe d'un domaine au domaine correspondant en augmentant les variables d'une période.

De plus, dans deux domaines correspondants D_k et D'_k les fonctions P et Q reprendront les mêmes valeurs; de telle sorte que l'on aura dans D_k:

$$F = \frac{P_k}{Q_k}$$

et dans D'_k:

$$F = \frac{P'_k}{Q'_k}$$

et que

$$P'_k(v_1, v_2, \ldots, v_p) = P_k(v_1 + \beta_1, v_2 + \beta_2, \ldots, v_p + \beta_p),$$

$$Q'_k(v_1, v_2, \ldots, v_p) = Q_k(v_1 + \beta_1, v_2 + \beta_2, \ldots, v_p + \beta_p);$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ étant la période par laquelle on passe de D_k et D'_k.

Les domaines D_1, D_2 etc. empiètent les uns sur les autres, mais je puis considérer une infinité de domaines Δ_1, Δ_2, etc. de telle façon: 1° que le domaine Δ_k soit intérieur à D_k; 2° que tout point de l'espace appartienne à un des domaines Δ et à un seul, à moins qu'il n'appartienne à la frontière qui sépare deux de ces domaines.

Il est clair que les domaines Δ restent encore arbitraires dans une certaine mesure et que je puis leur faire subir de petites déformations pourvu que Δ_k reste intérieur à D_k.

Considérons deux domaines D_n et D_q ayant une partie commune; nous aurons respectivement dans ces deux domaines

$$F = \frac{P_n}{Q_n}, \qquad F = \frac{P_q}{Q_q}.$$

Soient Δ_n et Δ_q les domaines Δ correspondant à D_n et à D_q et soit S_{nq} la frontière qui sépare Δ_n de Δ_q.

Je considère une fonction Φ définie de la façon suivante. Dans le domaine Δ_k on aura:

$$\Phi = \log P_k.$$

Ce n'est pas une fonction qui jouisse de la continuité analytique, car quand en franchissant S_{nq} on passe de Δ_n dans Δ_q, cette fonction subit un saut brusque égal à

$$\log \frac{P_q}{P_n}.$$

On peut dire encore que si l'on appelle Φ' la continuation analytique de Φ au delà de S_{nq} quand ayant franchi cette coupure on a passé de Δ_n dans Δ_q, on aura dans Δ_q:

$$\Phi - \Phi' = \log \frac{P_q}{P_n}.$$

Ce qui nous intéresse c'est que dans la partie commune à D_n et à D_q cette fonction $\log \frac{P_q}{P_n}$ sera holomorphe, car le rapport de P_q à P_n ne peut ni s'annuler ni devenir infini.

Posons

$$v_k = x_k + iy_k$$

de telle façon que les parties réelles et imaginaires, c'est à dire les x et les y soient les coordonnées d'un point dans notre espace à $2p$ dimensions.

Soit M' un point situé sur la variété S_{nq} qui a $2p - 1$ dimensions, et dont les coordonnées seront x'_k et y'_k.

Soit M le point de coordonnées courantes x_k et y_k. Soit

$$r = \sqrt{\Sigma(x - x'_k)^2 + \Sigma(y - y'_k)^2}$$

la distance de ces deux points. Soit $d\omega'$ un élément de la variété S_{nq} ayant pour centre de gravité le point M'. Soit δ' une fonction quelconque des coordonnées du point M' et envisageons l'intégrale

$$V = \int \frac{\delta' d\omega'}{r^{2p-2}}$$

étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la variété S_{nq}. C'est ce qu'on appelle le potentiel d'une *simple couche*. Pour tous les points situés en dehors de S_{nq}, c'est une fonction holomorphe des x et des y; cette fonction reste finie ainsi que ses dérivées quand le point M vient sur S_{nq}. Si la variété S_{nq} est analytique et si d'autre part δ' est une fonction analytique des coordonnées de M', il arrivera que la fonction V pourra être continuée analytiquement au delà de la coupure S_{nq}. Soit alors M_1 et M_2 deux points voisins l'un de l'autre, mais situés de part et d'autre de cette coupure. Soient V_1 et V_2 les valeurs de l'intégrale V en ces deux points; soit V' la continuation analytique de la fonction V quand partant du point M_1 on franchit la coupure et soit V'_2 la valeur de V' en M_2.

Alors V'_2 comme V_2 seront des fonctions analytiques des coordonnées de M_2, mais V'_2 ne sera pas en général égal à V_2. Nous devons observer que dans le cas d'une simple couche, la fonction V ne subit pas un saut brusque quand on franchit la coupure; de sorte que sur la coupure même

$$V_2 = V'_2.$$

Il n'en est pas de même des dérivées, et si l'on représente en particulier par $\frac{dV}{dn}$ la dérivée estimée suivant la normale à la coupure S_{nq}, la différence

$$\frac{dV_2}{dn} - \frac{dV_2'}{dn}$$

sur la coupure même ne sera pas nulle, mais elle sera égale à δ' à un facteur constant près qui ne dépendra que du nombre $2p$ des dimensions.

Soit maintenant ε' une autre fonction analytique des coordonnées de M', et considérons l'intégrale

$$W = \int \varepsilon' d\omega' \frac{dr^{2-2p}}{dn},$$

c'est ce qu'on appelle le potentiel d'une *double couche.* Alors si nous appelons encore W_1 et W_2 les valeurs de W aux points M_1 et M_2, nous verrons que W_1 est une fonction analytique des coordonnées de M_1, comme W_2 de celles de M_2. De plus W peut être continué analytiquement au delà de la coupure, et si l'on appelle W' cette continuation et W_2' la valeur de W' en M_2, alors W_2' sera fonction analytique de M_2.

Sur la coupure même on aura $\frac{dW_2}{dn} = \frac{dW_2'}{dn}$, mais la différence $W_2 - W_2'$ ne sera pas nulle, elle sera égale à ε' à un facteur constant près ne dépendant que du nombre $2p$ des dimensions.

Nous reprendrons maintenant notre fonction holomorphe

$$\Phi - \Phi' = \log \frac{P_q}{P_n}$$

et nous considérerons sa partie réelle que j'appellerai R_{nq}

$$R_{nq} = \log \left| \frac{P_q}{P_n} \right|.$$

Nous prendrons alors:

$$\delta' = \frac{dR_{nq}}{dn}, \qquad \varepsilon' = R_{nq}$$

et j'envisagerai l'intégrale

$$J_{nq} = aV + bW$$

les a et les b étant des constantes.

J'appellerai J'_{nq} le prolongement analytique de J_{nq} par delà la coupure. Si les coefficients constants a et b sont convenablement choisis (c'est à dire s'ils sont les inverses des coefficients constants dont je parlais tout à l'heure et qui ne dépendent que du nombre $2p$ des dimensions), nous aurons:

$$J'_{nq} - J_{nq} = R_{nq}.$$

Soit en effet Ψ une fonction qui soit égale à J_{nq} d'un côté de la coupure et à $J_{nq} + R_{nq}$ de l'autre côté de la coupure. Des deux côtés de la coupure, Ψ sera une fonction *harmonique* des $2p$ variables x et y; je veux dire par là qu'elle sera holomorphe et satisfera à l'équation de LAPLACE $\Delta\Psi = 0$; nous ne savons pas encore s'il en sera de même sur la coupure même; mais sur cette coupure la fonction Ψ est continue (si nos coefficients a et b sont convenablement choisis) et il en est de même de $\frac{d\Psi}{dn}$. On en conclut que la fonction Ψ reste holomorphe sur la coupure même et que $J_{nq} + R_{nq}$ est la continuation analytique de J_{nq}.

Si donc on a une fonction qui soit égale à $\log|P_q| - J_{nq}$ dans le domaine Δ_q et à $\log|P_n| - J_{nq}$ dans le domaine Δ_n cette fonction restera analytiquement continue quand on franchira la coupure S_{nq}; elle sera harmonique dans l'ensemble des deux domaines Δ_q et Δ_n; (sauf pour les points de Δ_n ou de Δ_q où P_n ou P_q s'annulent; en ces points c'est la différence $\Psi - \log|P_n|$ ou $\Psi - \log|P_q|$ qui est harmonique).

L'intégrale J_{nq} joue le rôle que joue dans la démonstration de M. COUSIN l'intégrale de CAUCHY

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{(f_n - f_p)dz}{z - y},$$

mais c'est une intégrale multiple.

Une propriété importante rapproche encore notre intégrale de celle de CAUCHY. Soit S'_{nq} une coupure peu différente de S_{nq}; je suppose que la frontière complète de S'_{nq} soit la même que celle de S_{nq} de façon que l'ensemble des deux coupures forme une variété fermée enfermant un certain domaine Δ'. Soit K_{nq} la même intégrale que J_{nq} mais prise le long de S'_{nq}. On aura alors en dehors de Δ':

$$J_{nq} = K_{nq}$$

et à l'intérieur de Δ':

$$J_{nq} = K_{nq} + R_{nq}.$$

Il en résulte que si ψ est une fonction égale à $\log |P_q| - J_{nq}$ dans Δ_q et à $\log |P_n| - J_{nq}$ dans Δ_n et si d'autre part ψ' est une fonction égale à $\log |P_q| - K_{nq}$ dans le domaine $\Delta_q + \Delta'$, à $\log |P_n| - K_{nq}$ dans le domaine $\Delta_n - \Delta'$, on aura

$$\psi = \psi'.$$

En d'autres termes on aura pu déplacer et déformer un peu la coupure S_{nq} sans changer la fonction ψ.

Cela posé, considérons quelques-uns de nos domaines en nombre fini

$$(2) \qquad \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_q$$

et les coupures qui séparent ces domaines (2). Soit ψ une fonction qui est égale dans Δ_n (Δ_n étant l'un des domaines (2)) à:

$$\psi = \log |P_n| - \Sigma J_{nq}$$

la sommation étant étendue à toutes les intégrales J_{nq} relatives aux coupures qui séparent les domaines (2).

La fonction ψ est harmonique, dans l'ensemble des domaines (2) sauf *peut-être* pour les points qui appartiennent à plus de deux de ces domaines; (et sauf *certainement* pour les points où l'un des P_n s'annule, car en ce points c'est $\psi - \log |P_n|$ qui est harmonique).

Soit donc N un des points qui appartiennent à plus de deux des domaines (2). De ce point comme centre décrivons une hypersphère H; déformons ensuite les coupures de façon qu'elles ne changent pas ni en dehors de l'hypersphère, ni sur l'hypersphère elle-même, mais seulement dans l'intérieur de l'hypersphère et qu'après la déformation, le point N ne soit plus sur une coupure.

Je dis que *la fonction ψ n'a pas changé.* Nous avons vu plus haut que cette fonction ne change pas quand une des coupures est déformée sans que sa frontière complète varie. Ici les choses ne se passent pas tout à fait comme cela, puisque le point N se trouvant sur la frontière commune de plusieurs coupures, nous sommes obligés de déformer ces frontières si nous voulons que le point N cesse d'être sur une coupure. C'est seulement en dehors de l'hypersphère H que les frontières ne varient pas.

Soit alors S_{nq} l'une des coupures, S'_{nq} la coupure déformée; ce sont

des variétés à $2p-1$ dimensions; soit F la frontière de S_{nq}, F' celle de S'_{nq}; ce sont des variétés à $2p-2$ dimensions; quand pendant sa déformation continue, cette frontière va de sa position initiale F à sa position finale F', elle engendre une variété à $2p-1$ dimensions que j'appelle T_{nq}. Alors la frontière de T_{nq} est formée de F et de F'; et la variété $S''_{nq} = S'_{nq} + T_{nq}$ a pour frontière F, c'est à dire même frontière que S_{nq}.

La fonction ψ ne change donc pas quand on remplace les coupures S_{nq} par les coupures S''_{nq}. Qu'est ce à dire? Soit C une variété à $2p-2$ dimensions appartenant à plus de deux domaines (2); par exemple aux domaines $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_h$; ces domaines doivent être contigus deux à deux, par exemple Δ_1 à Δ_2, Δ_2 à $\Delta_3, \ldots, \Delta_{h-1}$ à Δ_h, Δ_h à Δ_1. Alors C fera partie de la frontière de h coupures, à savoir $S_{12}, S_{23}, \ldots, S_{h-1.h}, S_{h.1}$. Pendant la déformation, C ira de sa position initiale C à sa position finale C' et engendrera ainsi une variété U à $2p-1$ dimensions. D'après sa définition même, U fera partie de $T_{1.2}, T_{2.3}, \ldots, T_{h.1}$.

Cela posé si nous appelons ψ' et ψ'' ce que devient ψ quand on remplace les coupures S_{nq} par les coupures S'_{nq} et S''_{nq}; nous avons déjà vu que $\psi = \psi''$. Quelle est la différence entre ψ' et ψ''. Ces deux fonctions ne peuvent différer que par les intégrales j_{nq} c'est à dire par des intégrales de même forme que les J_{nq} mais prises le long des variétés T_{nq}, nous aurons donc:

$$\psi'' - \psi' = \Sigma j_{nq}$$

la sommation étant étendue à tous les j_{nq}, c'est à dire à tous les T_{nq}, mais nous pouvons écrire

$$j_{nq} = \Sigma j'_{nq}$$

en appelant j'_{nq} la même intégrale étendue à l'une des variétés telles que U dont se compose T_{nq}. Il vient alors:

$$\psi'' - \psi' = \Sigma\Sigma j'_{nq},$$

l'un des signes Σ se rapportant aux différentes variétés telles que U et l'autre aux différents T_{nq} dont une de ces variétés fait partie. Or si je considère l'une de ces variétés, par exemple U, et que j'étende la sommation à tous les T_{nq} dont U fait partie, c'est à dire à $T_{12}, T_{23}, \ldots, T_{h.1}$, il viendra:

$$\Sigma j'_{nq} = j'_{12} + j'_{2.3} + \ldots + j'_{h.1}.$$

Nous nous rappelons comment a été définie l'intégrale J_{nq} et le rôle que jouait la fonction que j'ai appelée R_{nq}. Nous voyons que l'intégrale totale $\Sigma j'_{nq}$ se calculera de la même manière en remplaçant R_{nq} par

$$R_{1.2} + R_{2.3} + \ldots + R_{h.1}$$

l'intégration étant d'ailleurs étendue à U. Mais on a:

$$R_{12} + R_{23} + \ldots + R_{h.1} = \log\left|\frac{P_2}{P_1}\right| + \log\left|\frac{P_3}{P_2}\right| + \ldots + \log\left|\frac{P_1}{P_h}\right| = 0.$$

Donc on aura

$$\psi' - \psi'' = 0, \qquad \psi = \psi'.$$

C. Q. F. D.

Or le point N n'est pas un point singulier pour ψ' puisqu'il n'est pas sur les coupures S'; ce n'est donc pas non plus un point singulier pour ψ.

D'où nous concluons que ψ est harmonique dans l'ensemble des domaines (2), sauf pour les points de D_n où P_n s'annule et où c'est $\psi - \log|P_n|$ qui est harmonique.

Reprenons les intégrales V, W, J_{nq}; on se rappelle le rôle que jouait dans la définition de ces intégrales la fonction

$$r^{2-2p}$$

qui dépend des x, des y, des x' et des y'. Développons-la suivant les puissances des x et des y et soit

$$r^{2-2p} = \rho_0 + \rho'$$

où ρ_0 représente l'ensemble des termes de degré 0, 1 ou 2 par rapport aux x et aux y et ρ' l'ensemble des termes de degré supérieur.

Soit maintenant L_{nq} une intégrale analogue à J_{nq}, mais où r^{2-2p} est remplacé par ρ'; soit maintenant χ une fonction définie comme ψ, mais où les J_{nq} sont remplacées par les L_{nq}, de telle façon que dans Δ_n on ait:

$$\chi = \log|P_n| - \Sigma L_{nq};$$

la fonction χ jouira des mêmes propriétés que la fonction ψ, dont elle ne différera d'ailleurs que par un polynome du 2[d] degré en x et y.

Mais supposons que l'on prenne un nombre de plus en plus grand de domaines (2) de façon que l'ensemble de ces domaines tende à embrasser

l'espace tout entier; de sorte enfin qu'à la limite la fonction χ (resp. $\chi - \log|P_n|$) soit harmonique dans tout l'espace.

Pour que ce passage à la limite soit légitime, il faut que la série ΣL_{nq} converge; or c'est ce qu'il est aisé de constater, tandis que la série ΣJ_{nq} aurait été divergente. Nous n'avons qu'à reproduire ici la démonstration du tome 22 (pages 167, 168). La fonction χ jouissant d'ailleurs des mêmes propriétés que la fonction V du tome 22, la démonstration s'achèverait de la même manière.

§ 4. *Autre forme de la démonstration.*

Mais on aura avantage à mettre la démonstration sous une forme un peu différente.

Nous pourrons supposer d'abord que dans un certain domaine D, assez grand pour qu'un prismatoïde des périodes H y soit contenu tout entier, notre fonction abélienne F peut être mise sous la forme du quotient $\frac{P}{Q}$ de deux séries entières convergeant dans tout le domaine D.

Cela peut s'établir aisément en partant des hypothèses du paragraphe précédent, et cela de plusieurs manières, soit par la méthode de M. Cousin, soit pas ma méthode du tome 2, soit par la méthode mixte du paragraphe précédent.

D'ailleurs P et Q n'auront pas de facteur commun s'annulant à l'intérieur de D.

Si nous augmentons nos variables d'une période fondamentale a_i, $P(v_i)$ et $Q(v_i)$ deviendront $P(v_i + a_i)$ et $Q(v_i + a_i)$. Les séries $P(v_i)$ et $Q(v_i)$ convergent dans le domaine D; les séries $P(v_i - a_i)$ et $Q(v_i - a_i)$ convergeront dans un domaine D' que l'on obtiendra en faisant subir à D une translation représentée en grandeur et direction par la période a_i. Les deux domaines D et D' ont une partie commune puisque D est plus grand qu'un prismatoïde des périodes. Dans cette partie commune, les deux séries $P(v_i)$ et $P(v_i + a_i)$ convergent et leur rapport

$$\frac{P(v_i)}{P(v_i - a_i)}$$

ne peut devenir ni nulle ni infinie. Si en effet il s'annulait par exemple, les deux séries

$$P(v_i)\ ,\ Q(v_i) = P(v_i)\frac{Q(v_i - a_i)}{P(v_i - a_i)}$$

auraient un facteur commun $P(v_i)$ s'annulant à l'intérieur de D.

Nous allons maintenant définir une fonction auxiliaire que nous appellerons W. Soient M et M' deux points ayant pour coordonnées, le 1er x_k, y_k, le 2d x'_k, y'_k; soit

$$r = \sqrt{\Sigma(x_k - x'_k)^2 + \Sigma(y_k - y'_k)^2}$$

leur distance.

Soit M'' un point ayant pour coordonnée $x'_k + b'_k$, $y'_k + c'_k$ en désignant par b'_k et c'_k les parties réelle et imaginaire d'une des périodes a'_k de notre fonction abélienne (je veux dire, soit d'une période fondamentale, soit d'une des combinaisons en nombre infini de ces périodes fondamentales c'est à dire d'une période quelconque).

Soit ρ la distance des points M et M''.

On sait que r^{2-2p} est une fonction harmonique des x et des y, et il en est évidemment de même de ρ^{2-2p}. Supposons qu'on développe ρ^{2-2p} suivant les puissances des x et des y et que l'on écrive:

$$\rho^{2-2p} = \sigma + \tau$$

en représentant par σ l'ensemble des termes de degré 0, 1 et 2 et par τ l'ensemble des termes de degré supérieur. En envisageant la période zéro, on aura en particulier

$$r^{2-2p} = \sigma_0 + \tau_0.$$

Il est clair que τ est encore une fonction harmonique. Nous poserons alors:

$$W = \Sigma\tau$$

la sommation étant étendue à toutes les périodes, en y comprenant la période zéro.

Il est aisé de voir que la série $\Sigma\tau$ converge uniformément et on en conclut que W est une fonction harmonique des x et des y satisfaisant à l'équation de Laplace $\Delta W = 0$, sauf quand le point M se confond avec le point M'', c'est à dire quand le vecteur MM' représente une période quelconque en grandeur et direction.

Soient maintenant φ et ψ deux »faces» opposées du prismatoïde de H; soit a_i la période fondamentale correspondante de telle sorte qu'on passe de ψ à φ en changeant v_i en $v_i + a_i$. La face φ appartient alors à la fois aux domaines D et D'. Dans la partie commune à ces deux domaines, qui comprend la face φ, la fonction

$$\log P(v_i - a_i) - \log P(v_i)$$

est holomorphe ainsi que nous l'avons vu. Nous appellerons $U + iV$ cette fonction holomorphe, et sa partie réelle U sera évidemment une fonction harmonique des x et des y.

Soit $d\omega'$ un élément de la face φ et supposons que le point M' défini plus haut soit au centre de gravité de $d\omega'$. Soit U' la valeur de U au point M'.

Considérons alors l'intégrale

$$J = \int \left(W \frac{dU'}{dn} - \frac{dW}{dn} U' \right) d\omega'$$

étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la face φ. Je désigne, bien entendu, par $\frac{dU'}{dn} dn$ et $\frac{dW}{dn} dn$ les accroissements que subissent les fonctions U' et W quand le point M' subit une déplacement dn, normalement à la face φ.

Il est clair que J est une fonction harmonique des x et des y, sauf quand le point M se trouve sur la face φ ou sur l'une de ses transformées par l'addition d'une période. Et en effet quand le point M coïncide avec le point M' (qui est sur la face φ) ou avec l'un des points M'', (c'est à dire avec un des transformés de M' par l'addition d'une période), la fonction W devient infinie.

La face φ jointe à ses transformées par l'addition d'une période forme une suite indéfinie de variétés planes à $2p - 1$ dimensions, parallèles et équidistantes. Soient S ces variétés.

Alors la fonction J est analytique, sauf quand on franchit l'un des S. Qu'arrive-t-il maintenant quand le point M franchit l'un des S? Soit N'' un point de l'un des S, et N' le point correspondant de φ. Déformons alors légèrement la face φ dans la partie voisine du point N' et soit φ' le résultat de la déformation. Nous pourrons supposer que N' n'est pas sur φ', et que toute la partie de φ qui n'est pas voisine de N' n'a pas subi de déformation et coïncide par conséquent avec la partie correspondante de φ'.

Alors entre φ et φ' il y aura un petit domaine Δ dont la frontière se composera de la partie de φ qui n'appartient pas à φ' et de la partie de φ' qui n'appartient pas à φ.

Nous considérerons également les transformés de φ, de φ' et de Δ par l'addition d'une période. Le point N'' se trouve sur l'un des transformés de φ, mais non pas sur l'un des transformés de φ'; il est donc sur la frontière de l'un des transformés de Δ, que j'appellerai Δ'.

Cela posé, considérons l'intégrale J' qui est formée comme J, mais étendue à φ' et non plus à φ. Elle sera analytique sauf quand le point M sera sur φ' ou sur l'un de ses transformés.

La différence des deux intégrales est égale à

$$J - J' = \int \left(W \frac{dU'}{dn} - \frac{dW}{dn} U' \right) d\omega'$$

l'intégration étant étendue à la frontière du domaine Δ. Elle reste analytique sauf quand le point M est sur la frontière de Δ ou de l'un de ses transformés. Voyons par exemple ce qui se passe quand le point M est voisin de la frontière de Δ' et plus particulièrement voisin de N''.

Quand le point M vient en N'' et le point M' en N', la fonction $W = \Sigma\tau$ devient infinie mais un seulement des termes de la somme $\Sigma\tau$ devient infini; soit ρ_1^{2-2p} le ρ^{2-2p} correspondant. Alors $W - \rho_1^{2-2p}$ reste finie. Posons:

$$W - \rho_1^{2-2p} = H.$$

Nous aurons:

$$J - J' = K + K_1$$

avec

$$K = \int \left(H \frac{dU'}{dn} - U' \frac{dH}{dn} \right) d\omega',$$

$$K_1 = \int \left(\rho_1^{2-2p} \frac{dU'}{du} - U' \frac{d\rho_1^{2-2p}}{dn} \right) d\omega'$$

les deux intégrales étant étendues à la frontière de Δ.

La fonction H est une fonction harmonique, des x' et des y' (nous avons déjà vu qu'elle est harmonique par rapport aux x et aux y, mais

je la considère maintenant comme fonction des x' et des y'). Elle reste analytique à l'intérieur de Δ, que le point M soit intérieur ou extérieur à Δ' ou qu'il soit sur la frontière de Δ', pourvu toutefois que ce point M, restant voisin de Δ' comme nous le supposons, ne soit intérieur à aucun des autres transformés de Δ.

De même la fonction U' est harmonique et analytique à l'intérieur de Δ. Dans ces conditions le théorème de Green nous enseigne que l'intégrale K est nulle. En ce qui concerne l'intégrale K_1, ce même théorème nous enseigne qu'elle est nulle si le point M est extérieur à Δ'. Si le point M est intérieur à Δ', notre intégrale K_1 est égale, toujours d'après le même théorème, à

$$\alpha U_0,$$

α étant un coefficient numérique qui ne dépend que du nombre $2p$ des dimensions et U_0 la valeur que prend U' quand la distance ρ_1 s'annule.

Or quand la distance ρ_1 s'annule, c'est que le point M' vient au point de l'intérieur de Δ qui correspond à la position du point M à l'intérieur de Δ'. Or soit $a'_k = b'_k + ic'_k$ la période dont l'addition transforme le point N' en N'' et Δ en Δ'. Quand les points M et M' occuperont les positions que j'ai dites, on aura

$$x_k = x'_k + b'_k, \qquad y_k = y'_k + c'_k;$$

on aura donc

$$U_0 = U(x_k - b'_k, y_k - c'_k)$$

et

$$K_1 = \alpha U(x_k - b'_k, y_k - c'_k).$$

Donc quand M est extérieur à Δ', on a

$$J = J'.$$

Quand le point M franchit la coupure S dans le voisinage de N'', pour pénétrer dans Δ, l'intégrale J n'est pas continue, mais l'intégrale J' l'est. Donc J' est la continuation analytique de J au delà de la coupure S.

Quand M est intérieur à Δ', on a:

$$J' = J - \alpha U(x_k - b'_k, y_k - c'_k).$$

Donc la continuation analytique de J au delà de la coupure est

$$J - \alpha U(x_k - b'_k, y_k - c'_k).$$

C'est la conclusion finale à laquelle je voulais arriver.

Le prismatoïde a $2p$ couples de faces opposées, φ_1 et ψ_1, φ_2 et $\psi_2, \ldots, \varphi_{2p}$ et ψ_{2p}. Soient U_q et J_q la fonction analogue à U et l'intégrale analogue à J, relatives à la face φ_q.

Soit Φ une fonction qui dans le prismatoïde H est égale à

$$\log |P(v_i)|$$

et qui dans le prismatoïde H' transformé de H par l'addition de la période $a'_k = b'_k + ic'_k$ est égale à:

$$\log |P(v_i - a_i)|.$$

La fonction Φ est donc harmonique dans chacun des prismatoïdes, sauf aux points pour lesquels F s'annule ou devient indéterminée. Mais elle est discontinue quand on passe d'un prismatoïde dans l'autre. De plus elle est périodique par définition.

Si nous désignons par a_{iq} la période fondamentale qui correspond à la face φ_q et par b_{iq} et c_{iq} ses parties réelle et imaginaire, nous voyons d'abord que quand le point M franchit la face φ_q pour sortir de H, la fonction Φ subit un saut brusque égal à

$$\log |P(v_i - a_{iq})| - \log |P(v_i)| = U_q(v_i).$$

Lorsque le point M franchit la transformée de la face φ_q par l'addition de la période a'_i, la fonction Φ subit un saut brusque égal à

$$\log |P(v_i - a'_i - a_{iq})| - \log |P(v_i - a'_i)| = U_q(v_i - a'_i).$$

Considérons maintenant la fonction

$$\Omega = \Phi + \frac{1}{\alpha}(J_1 + J_2 + \ldots + J_{2p}).$$

Nous voyons tout de suite que cette fonction est harmonique sauf en deux sortes de points:

1° Ceux où F s'annule; en ces points ce n'est pas Ω, mais

$$\Omega - \log |P(v_i)| \quad \text{ou} \quad \Omega - \log |P(v_i - a'_i)|$$

qui est harmonique.

2° Ceux qui sont sur la frontière de deux ou plusieurs prismatoïdes, points pour lesquels les fonctions Φ et J subissent une discontinuité analytique.

Parmi ces points nous distinguerons 1° ceux qui n'appartiennent qu'à 2 prismatoïdes et qui forment des variétés à $2p - 1$ dimensions, variétés qui ne sont autre chose que les faces φ_q et leurs transformés; et 2° ceux qui appartiennent à plus de 2 prismatoïdes et qui forment des variétés à $2p - 2$ dimensions ou à moins de $2p - 2$ dimensions.

En ce qui concerne les premiers, on voit tout de suite que la fonction Ω reste analytique, et en effet Φ subit un saut brusque égal à U_q, J_q un saut brusque égal à $-\alpha U_q$; de sorte que le saut est nul pour $\Phi - \frac{1}{\alpha} J_q$ et par conséquent pour Ω, et que Ω coïncide avec son prolongement analytique.

Il est aisé d'en conclure qu'il en est encore de même en ce qui concerne les autres points qui font partie de plus de 2 prismatoïdes.

Soit en effet A l'un de ces points; il appartiendra également à plusieurs de faces φ_q ou de leurs transformées. Reprenons l'intégrale

$$J = \int \left(W \frac{dU'}{dn} - \frac{dW}{dn} U' \right) d\omega'$$

étendue à la face φ. D'après l'hypothèse, le point A appartient à plusieurs des transformées de φ, par exemple aux transformées de φ par l'addition des périodes $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \ldots, a_i^{(m)}$, transformées que je désignerai par $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(m)}$. Si je représente alors par $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(m)}$ les points qui se déduisent de A par la soustraction des périodes $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \ldots, a_i^{(m)}$, ces m points seront tous sur φ, ou plutôt sur la frontière de la face φ.

Quand le point M viendra en A et le point M' en $A^{(k)}$, celle des expressions ρ^{2-2p} qui correspond à la période $a_i^{(k)}$ et que je représenterai par ρ_k^{2-2p} deviendra infinie. Nous avons donc m de ces expressions à savoir

$$\rho_1^{2-2p}, \rho_2^{2-2p}, \ldots, \rho_m^{2-2p}$$

qui peuvent devenir infinies quand M est en A et que M' est sur la face φ ou sur la frontière de cette face. Toutes les autres expressions ρ^{2-2p} restent finies.

Posons alors:

$$\rho_1^{2-2p} + \rho_2^{2-2p} + \ldots + \rho_m^{2-2p} = w,$$

$$W = W^* + w; \qquad J = J^* + j,$$

$$J^* = \int \left(W^* \frac{dU'}{dn} - \frac{dW^*}{dn} U' \right) d\omega',$$

$$j = \int \left(w \frac{dU'}{dn} - \frac{dw}{dn} U' \right) d\omega'.$$

Comme la fonction W^* reste régulière, quelle que soit la position de M' sur φ, quand le point M est voisin de A, nous devons conclure que l'intégrale J^* est régulière dans le voisinage de A.

Quant à j, elle est égale à l'intégrale

$$\int \left(r^{2-2p} \frac{dU'}{dn} - \frac{dr^{2-2p}}{dn} U' \right) d\omega' \tag{4}$$

étendue, non plus à φ, mais à l'ensemble des transformées $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(m)}$. Soit E cet ensemble. Il est clair que le point A appartient à la variété E et qu'il n'est pas sur la frontière de E (car dans ce dernier cas, il y aurait de l'autre côté de cette frontière une transformée de φ dont A devrait faire partie et d'après notre hypothèse $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(m)}$ sont *toutes* les transformées de φ dont A fait partie).

L'intégrale (4) est une fonction holomorphe des x et des y, sauf quand le point M est sur E. Quand le point M vient en A, la fonction j éprouve donc une discontinuité analytique. Soit maintenant E' une autre variété à $2p - 1$ dimensions, ayant même frontière que E, de telle façon que E et E' limitent un domaine δ. Comme A n'appartient pas à la frontière de E, nous pouvons supposer que A ne fait pas partie de E'.

Soit j' l'intégrale analogue à l'intégrale (4) étendue à E'. Ce sera une fonction holomorphe des x et des y sauf quand M est sur E'. *Elle sera donc holomorphe dans le voisinage du point A.*

Or en vertu du théorème de Green, les deux intégrales j et j' sont égales entre elles en dehors du domaine δ. *Donc l'intégrale j, et par conséquent aussi l'intégrale J, est susceptible d'être prolongée analytiquement au delà de la coupure dans le voisinage du point A.*

C'est là ce que je voulais d'abord démontrer.

Revenons maintenant à la fonction Ω. D'après ce qui précède, cette fonction pourrait admettre pour coupures les diverses transformées des faces φ_q; mais elle est toujours susceptible d'être prolongée analytiquement au delà de ces coupures, même dans le voisinage de A. De plus nous avons vu que quand on franchit l'une de ces coupures, la fonction Ω coincide avec son prolongement analytique. La fonction Ω reste donc analytique et harmonique en A.

Il y aurait exception évidemment si au point A la fonction F s'annulait; ce serait alors $\Omega - \log|P(v_i)|$ ou $\Omega - \log|P(v_i - a_i')|$ qui serait analytique et harmonique.

La fonction Ω jouissant des mêmes propriétés que la fonction χ du paragraphe précédent et la fonction V du tome 22, pages 169 sqq, pourra jouer le même rôle.

D'après la définition même de la fonction W, ses dérivées secondes sont des fonctions périodiques des x et des y. Soit en effet DW une des dérivées secondes de W par rapport aux variables x et y; plus généralement D sera un signe de dérivation par rapport aux x et aux y, et D' sera la dérivée correspondante prise par rapport aux variables x' et y'.

Si alors D est une dérivée seconde, nous aurons

$$DW = \sum D\tau, \qquad D\rho^{2-2p} = D\sigma + D\tau.$$

Comme σ est un polynôme du 2^d degré, $D\sigma$ se réduit à une constante; d'autre part comme ρ est une fonction des différences $x - x'$, $y - y'$, nous aurons:

$$D\rho^{2-2p} = D'\rho^{2-2p}.$$

Comme τ ne contient que des termes du 3^e degré au moins, $D\tau$ est du 1^{er} degré au moins et s'annule avec les x et les y; nous avons:

$$D'\rho^{2-2p} = D\sigma + D\tau.$$

Soit ρ_0 ce que devient ρ quand les x et les y s'annulent. La formule précédente devient donc pour $x = y = 0$:

$$D'\rho_0^{2-2p} = D\sigma.$$

Comme nous savons que $D\sigma$ est une constante, cette formule nous donne la valeur de $D\sigma$ et nous pouvons écrire:

$$D\tau = D'\rho^{2-2p} - D'\rho_0^{2-2p}.$$

La série

$$DW = \sum (D'\rho^{2-2p} - D'\rho_0^{2-2p})$$

est absolument convergente. Quand x et y augmentent d'une période l'expression ρ^{2-2p} se transforme en une autre expression ρ'^{2-2p}. Quand x' et y' diminuent de la même période ρ^{2-2p} se change encore en ρ'^{2-2p}, mais en même temps ρ_0^{2-2p} se change en $\rho_0'^{2-2p}$. Nous pouvons écrire:

$$DW = \sum (D'\rho'^{2-2p} - D'\rho_0'^{2-2p})$$

car les deux séries ne diffèrent que par l'ordre des termes.

Si maintenant x et y augmentent de la période en question, alors DW devient

$$\sum (D'\rho'^{2-2p} - D'\rho_0^{2-2p})$$

donc DW a augmenté de

$$\sum (D'\rho_0'^{2-2p} - D'\rho_0^{2-2p}).$$

Cette série est absolument convergente, et il est aisé de vérifier que la somme en est nulle. Donc DW est une fonction périodique.

C. Q. F. D

Si DW est périodique, il en sera de même de

$$DJ = \int \left(DW \frac{dU'}{dn} - U' \frac{dDW}{dn}\right) d\omega'.$$

D'ailleurs $D\Phi$ est périodique par définition et il doit en être de même de

$$D\Omega = D\Phi + \frac{1}{a} \Sigma DJ_q.$$

Ainsi les dérivées secondes de $D\Omega$ sont des fonctions périodiques des x et des y.

Nous allons introduire une autre fonction analogue à Ω et que j'appellerai Ω'. A cet effet je commence par définir une intégrale analogue à J et que j'appelle

$$J' = \int \left(W \frac{dV'}{dn} - \frac{dW}{dn} V'\right) d\omega'.$$

Cette intégrale diffère de J parce que U' y est remplacé par V'; V' est

la valeur de la fonction V au point M', et je rappelle que V est la partie imaginaire de la fonction

$$\log P(v_i - a_i) - \log P(v_i)$$

dont U est la partie réelle.

On voit que dans le voisinage du champ d'intégration envisagé, la fonction V reste holomorphe.

Je définirai la fonction Φ' comme il suit; dans le prismatoïde Π' (vide supra) elle sera égale à

$$\arg.\ P(v_i - a'_i).$$

Elle ne sera donc définie qu'à un multiple près de 2π.

Je poserai

$$\Omega' = \Phi' + \frac{1}{\alpha} \Sigma J'_q;$$

et il est clair que la fonction Ω' jouira des mêmes propriétés que la fonction Ω, à cette différence près qu'elle ne sera déterminée qu'à un multiple près de 2π.

Quelles relations aurons-nous maintenant entre Ω et Ω'; la fonction J étant analytique et harmonique sauf sur les coupures, et ayant pour prolongement analytique:

$$J - \alpha U(x_k - b'_k),$$

la dérivée DJ sera analytique et harmonique sauf sur les coupures et aura pour prolongement analytique

$$DJ - \alpha DU(x_k - b'_k).$$

De même la dérivée DJ' sera analytique et harmonique sauf sur les coupures et aura pour prolongement analytique

$$DJ' - \alpha DV(x_k - b'_k).$$

Mais U et V sont les parties réelle et imaginaire d'une même fonction analytique des variables complexes v. On en conclut que chacune des dérivées secondes de U est égale à une des dérivées secondes de V. On aura par exemple

$$DU = D_1 V.$$

Comparons maintenant DJ et D_1J'. Toutes deux sont harmoniques et analytiques sauf sur les coupures et elles ont respectivement pour prolongement analytique

$$DJ - \alpha DU(x_k - b'_k)\ ,\ D_1J' - \alpha D_1V(x_k - b'_k) = D_1J' - \alpha DU(x_k - b'_k).$$

Ainsi la différence $DJ - D_1J'$ reste analytiquement continue sur les coupures; elle est donc analytique et harmonique dans tout l'espace.

De plus DJ de même que D_1J' est périodique; notre différence est donc analytique, harmonique et périodique dans tout l'espace; *c'est dire qu'elle se réduit à une constante.* (Cf Appell, Acta, tome 3.)

Il résulte de là que les dérivées de DJ sont égales aux dérivées correspondantes de D_1J'

$$(4) \qquad \frac{d}{dx_k}DJ = \frac{d}{dx_k}D_1J'; \qquad \frac{d}{dy_k}DJ = \frac{d}{dy_k}D_1J'.$$

Quelle est maintenant la signification des équations

$$(5) \qquad DH = D_1H',$$

H et H' désignant deux fonctions quelconques des x et des y. Pour nous en rendre compte formons explicitement nos équations:

$$(6) \qquad DU = D_1V.$$

Nous avons:

$$\frac{dU}{dx_k} = \frac{dV}{dy_k}, \qquad \frac{dU}{dy_k} = -\frac{dV}{dx_k}$$

d'où:

$$\frac{d^2U}{dx_kdx_j} = \frac{d^2V}{dy_kdx_j}, \quad \frac{d^2U}{dx_kdy_j} = \frac{d^2V}{dy_kdy_j}, \quad \frac{d^2U}{dy_kdx_j} = -\frac{d^2V}{dx_kdx_j}, \quad \frac{d^2U}{dy_kdy_j} = -\frac{d^2V}{dx_kdy_j}.$$

Ce sont là nos équations (6). Pour avoir les équations (5), il suffit de remplacer U et V par H et H'. Ces équations peuvent donc s'écrire:

$$(7) \qquad \frac{d}{dx_k}\frac{dH}{dx_j} = \frac{d}{dy_k}\frac{dH'}{dx_j}, \qquad \frac{d}{dy_k}\frac{dH}{dx_j} = -\frac{d}{dx_k}\frac{dH'}{dx_j}$$

avec les équations qu'on en déduirait en remplaçant x_j par y_j.

Ces équations signifient que

$$\frac{dH}{dx_j} + \sqrt{-1}\,\frac{dH'}{dx_j}, \qquad \frac{dH}{dy_j} + \sqrt{-1}\,\frac{dH'}{dy_j},$$

c'est à dire les dérivées premières de $H + \sqrt{-1}\,H'$, sont des fonctions analytiques des variables complexes v.

Nos équations (4) qui peuvent s'écrire:

$$D\frac{dJ}{dx_k} = D_1\frac{dJ'}{dx_k}, \qquad D\frac{dJ}{dy_k} = D_1\frac{dJ'}{dy_k}$$

signifient alors que *les dérivées secondes de $J + \sqrt{-1}\,J'$ sont des fonctions analytiques des variables complexes v.*

Donc $J + \sqrt{-1}\,J'$ sera égal à une fonction analytique des v, plus un polynôme du second degré par rapport aux x et aux y.

Comme $\Phi + \sqrt{-1}\,\Phi'$ est par définition une fonction analytique de v, nous devons conclure que $\Omega + \sqrt{-1}\,\Omega'$ est égal à une fonction analytique des v, plus un polynôme du 2[d] degré par rapport aux x et aux y; toutefois cette fonction devient logarithmiquement infinie aux points où F s'annule.

Soit ϖ le polynôme du 2[d] degré dont il vient d'être question; alors:

$$\Omega + \sqrt{-1}\,\Omega' - \varpi \quad \text{et} \quad \theta = e^{\Omega + \sqrt{-1}\,\Omega' - \varpi}$$

sont des fonctions analytiques des variables complexes v; la dernière θ est une fonction entière; en effet elle ne pourrait cesser d'être holomorphe qu'aux points où F s'annule, en ces points

$$\Omega + \sqrt{-1}\,\Omega' - \varpi - \log P(v_i - a'_i) = A$$

est holomorphe et par conséquent

$$\theta = P(v_i - a'_i)e^A$$

est holomorphe également.

Les dérivées secondes de $\Omega + \sqrt{-1}\,\Omega' - \varpi$ sont périodiques; nous l'avons vu pour Ω; nous le verrions de la même manière pour Ω', et les dérivées secondes de ϖ se réduisent à des constantes.

Il résulte immédiatement de là que θ se reproduit multiplié par une exponentielle dont l'exposant est un polynôme du 1[er] degré, quand les variables augmentent d'une période.

C'est une »fonction intermédiaire» pour employer l'expression assez mal justifiée de BRIOT et BOUQUET. Notre fonction F est donc le quotient de deux fonctions intermédiaires.

§ 5. *Des fonctions intermédiaires.*

L'étude des fonctions abéliennes se trouve ainsi naturellement ramenée à celle des »fonctions intermédiaires», c'est à dire des fonctions entières qui se reproduisent par l'addition d'une période, à un *multiplicateur* près qui est une exponentielle du 1^{er} degré.

C'est principalement dans le tome 8 de l'American Journal of Mathematics (1886), que se trouvent exposées mes recherches sur ces fonctions intermédiaires.

On reconnaît tout de suite que les périodes et les multiplicateurs ne peuvent pas être quelconques.

Supposons que quand v'_i, augmentant d'une période, se change en $v'_i + a_{ik}$, le logarithme de la fonction intermédiaire augmente de

$$P_k = \Sigma \alpha_{ik} v_i + \beta_k$$

de telle façon que le multiplicateur correspondant à la période a_{ik} soit e^{P_k}; on voit que le nombre:

$$M_{kj} = \sum_{i=1}^{p} (\alpha_{ij} a_{ik} - \alpha_{ik} a_{ij})$$

doit être égal à un entier multiplié par $2\pi\sqrt{-1}$. Il suffit pour s'en rendre compte d'exprimer que l'on obtient le même résultat en ajoutant d'abord la période a_{ik}, puis la période a_{ij}, ou en ajoutant ces deux mêmes périodes dans l'ordre invers.

Ces nombres M_{kj} et les relations précédentes ont été étudiées par M. FROBENIUS dans le tome 97 de Crelle dans son mémoire sur les fonctions Jacobiennes. J'ai repris cette étude à un autre point de vue dans le mémoire cité de l'American Journal.

Les fonctions intermédiaires se ramènent immédiatement aux fonctions θ; c'est à dire à celles où tous les nombres (pour un choix convenable des périodes) M_{kj} sont nuls, sauf p d'entre eux qui sont d'ailleurs tous égaux entre eux. En général cette réduction ne peut pas se faire de

plusieurs manières essentiellement différentes; mais il n'en est pas de même quand les fonctions abéliennes considérées peuvent par une transformation convenable être ramenées soit aux fonctions elliptiques, soit à des fonctions abéliennes de rang moindre, c'est à dire dans les cas de réduction dont je parlerai plus loin.

Depuis M. Humbert a reconnu qu'il existe d'autres systèmes de périodes pour lesquelles, bien qu'on ne soit pas dans un des cas de réduction, il existe des fonctions intermédiaires singulières réductibles de plusieurs manières aux fonctions θ. Les fonctions de M. Humbert ont une grande importance.

Il est aisé de voir quelle est la signification de ces nombres M_{kj}.

Prenons le prismatoïde des périodes Π; c'est un domaine de l'espace à $2p$ dimensions. A chacune des

$$\frac{\underline{|2p}}{\underline{|q}\,\underline{|(2p-q)}}$$

combinaisons des $2p$ périodes q à q, correspond un système de polyèdres en forme de »parallélotopes» ou de »prismatoïdes» de l'espace à q dimensions, qui sont tous parallèles et égaux entre elles et qui sont au nombre de:

$$2^{2p-q}.$$

C'est ainsi que dans l'espace ordinaire ($2p = 3$), un parallélépipède a six faces ($q = 2$) parallèles deux à deux ($2^{2p-q} = 2$) et réparties par conséquent en 3 systèmes $\left(\frac{\underline{|2p}}{\underline{|q}\,\underline{|2p-q}} = 3\right)$, et que d'autre part il a 12 arêtes ($q = 1$) parallèles quatre à quatre ($2^{2p-q} = 4$) et réparties par conséquent en 3 systèmes $\left(\frac{\underline{|2p}}{\underline{|q}\,\underline{|2p-q}} = 3\right)$.

Parmi ces variétés nous avons considéré dans les paragraphes précédents celles qui correspondent à $q = 2p - 1$ et que nous avons appelées les *faces* du prismatoïde. Nous envisagerons maintenant plus particulièrement celles qui correspondent à $q = 1$ et que nous appellerons les *arêtes*, et celles qui correspondent à $q = 2$ et que nous appellerons, non pas les faces, mais les *parallélogrammes* (en abrégé prlg) du prismatoïde.

A chaque arête correspond donc une période, à chaque prlg un des nombres M_{kj}.

Soit alors θ une fonction intermédiaire quelconque et considérons l'intégrale

$$\int d \log \theta$$

que nous prendrons le long du périmètre de l'un de nos prlg., correspondant par exemple au nombre M_{kj}.

Le long du 1$^{\text{er}}$ côté, l'intégrale sera:

$$\Sigma \alpha_{ik} v_i^0 + \beta_k$$

si les coordonnées du 1$^{\text{er}}$ sommet sont v_i^0; le long du 2$^{\text{d}}$ côté, elle sera

$$\Sigma \alpha_{ij}(v_i^0 + a_{ik}) + \beta_j$$

le long du 3$^{\text{e}}$

$$-\Sigma \alpha_{ik}(v_i^0 + a_{ij}) - \beta_k$$

et enfin le long du 4$^{\text{e}}$:

$$-\Sigma \alpha_{ij} v_i^0 - \beta_j.$$

L'intégrale totale est donc

$$\Sigma(\alpha_{ij} a_{ik} - \alpha_{ik} a_{ij}) = M_{kj}.$$

Nous pouvons décomposer la surface de notre prlg en une infinité de contours plans fermés infiniment petits; la somme des intégrales

$$\int d \log \theta$$

prises le long de ces différents contours sera égale à M_{kj}. Comme la quantité sous le signe $\int$ est une différentielle exacte, l'intégrale prise le long de l'un de ces contours sera nulle à moins que la fonction sous le signe $\int$ ne devienne infinie à l'intérieur du contour, c'est à dire que θ ne s'annule à l'intérieur du contour.

Nous sommes donc conduits à rechercher les zéros de θ situés sur la surface des prlg; c'est à dire les intersections de la variété à $2p - 2$ dimensions $\theta = 0$ avec le plan du prlg.

Je supposerai que nous n'avons que des intersections simples, c'est à dire que ce plan et la variété $\theta = 0$ ne sont pas tangents l'un à l'autre. Il est clair que sauf des cas exceptionnels, il suffira de déplacer d'une façon convenable le prismatoïde parallèlement à lui-même pour qu'un pareil

contact n'ait pas lieu. D'ailleurs dans ces cas exceptionnels, où ce contact ne peut-être évité, les résultats que je vais démontrer s'appliquent encore, grâce à une généralisation presque immédiate.

Quelle est la condition pour que ce contact ait lieu? Soient θ_0 et θ_1 les parties réelle et imaginaire de θ, x_i et y_i celles de v_i; alors θ_0 et θ_1 sont des fonctions des x et des y; soient b_{ik} et c_{ik} celles de a_{ik}.

La condition cherchée peut s'écrire:

$$D_{kj} = \sum_i \left(b_{ik}\frac{d\theta_0}{dx_i} + c_{ik}\frac{d\theta_0}{dy_i}\right) \sum_i \left(b_{ij}\frac{d\theta_1}{dx_i} + c_{ij}\frac{d\theta_1}{dy_i}\right)$$
$$- \sum_i \left(b_{ij}\frac{d\theta_0}{dx_i} + c_{ik}\frac{d\theta_0}{dy_i}\right) \sum_i \left(b_{ik}\frac{d\theta_1}{dx_i} + c_{ik}\frac{d\theta_1}{dy_i}\right) = 0.$$

Nous supposerons donc que l'expression D n'est pas nulle en même temps que θ à l'intérieur du prlg. Considérons donc un des zéros de θ à l'intérieur de notre prlg. Notre intégrale prise le long d'un contour entourant ce zéro sera évidemment égale à

$$\pm 2\pi\sqrt{-1}.$$

Quant au signe il dépendra évidemment de celui de D_{kj}. Nous pouvons faire des conventions telles que ce signe soit celui de D_{kj}.

Nous sommes ainsi amenés à distinguer les zéros pour lesquels D_{kj} est positif de ceux pour lesquels D_{kj} est négatif; je les appellerai pour abréger les *zéros positifs* et *les zéros négatifs;* et j'arrive à cette conclusion que le *nombre entier*

$$\frac{M_{kj}}{2\pi\sqrt{-1}}$$

est égal à l'excès du nombre des zéros positifs sur celui des zéros négatifs. Quand on permute les indices k et j, le nombre M_{kj} change de signe; il en est de même de D_{kj}; le prlg reste le même, mais il est parcouru en sens contraire.

Ce résultat est le même que celui que j'avais obtenu par une tout autre voie dans le tome 9 des Acta mathematica, pages 369 sqq.

Considérons un segment de droite quelconque dont la projection sur l'axe des x_i soit ξ_i et dont la projection sur l'axe des y_i soit η_i. Posons

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{2p} \mu_k b_{ik}; \qquad \eta_i = \sum_{k=1}^{2p} \mu_k c_{ik};$$

les coëfficients μ ainsi définis pourront s'appeler les *coëfficients caractéristiques* du segment considéré.

La longueur du segment est la racine carrée de

$$\sum \xi^2 + \sum \eta^2 = \psi(\mu),$$

$\psi(\mu)$ étant une forme quadratique définie positive par rapport à $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2p}$.

Lorsque les μ sont entiers, le segment représente en grandeur, direction et sens une période, $\Sigma\mu_k a_{ik}$, et les quantités α correspondantes seront $\Sigma\mu_k \alpha_{ik}$.

Cela posé, envisageons deux segments ayant respectivement pour coefficients caractéristiques μ_k et μ'_k, et pour projections sur les axes ξ_i, η_i et ξ'_i, η'_i. La surface du parallélogramme construit sur ces deux segments sera la racine carrée de:

$$\Omega(\mu\,,\,\mu') = \psi(\mu)\psi(\mu') - \frac{1}{4}\left(\sum \mu'_k \frac{d\psi}{d\mu_k}\right)^2.$$

Si les μ et les μ' sont des entiers, et que les deux segments soient des périodes, nous pouvons nous proposer de calculer le nombre M correspondant; pour cela dans l'expression de M_{kj}. il faut remplacer

$$a_{ik}\ ,\ \alpha_{ik}\ ,\ a_{ij}\ ,\ \alpha_{ij}$$

par

$$\Sigma\mu_k a_{ik}\ ,\ \Sigma\mu_k \alpha_{ik}\ ,\ \Sigma\mu'_i a_{ik}\ ,\ \Sigma\mu'_i \alpha_{ik}.$$

On trouve ainsi:

$$M(\mu\,,\,\mu') = \Sigma M_{kj}(\mu_k\mu'_j - \mu'_k\mu_j),$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons des deux indices k et j. On voit que M est une forme bilinéaire par rapport aux coefficients μ et μ'.

De même pour calculer le nombre D correspondant à notre parallélogramme il faut dans l'expression de D_{kj} remplacer b_{ik}, c_{ik}, b_{ij}, c_{ij} par

$$\Sigma\mu_k b_{ik}\ ,\ \Sigma\mu_k c_{ik}\ ,\ \Sigma\mu'_k b_{ik}\ ,\ \Sigma\mu'_k c_{ik},$$

ce qui donne:

$$D(\mu\,,\,\mu') = \Sigma D_{kj}(\mu_k\mu'_j - \mu'_k\mu_j).$$

Si nous distinguons encore les zéros positifs ou négatifs suivant le signe

de $D(\mu, \mu')$, nous verrons que l'excès du nombre des zéros positifs sur le nombre des zéros négatifs, est sur notre parallélogramme:

$$\frac{M(\mu, \mu')}{2\pi\sqrt{-1}}.$$

Considérons maintenant une aire quelconque dans le plan de ce parallèlogramme qui soit limitée par des segments représentant des périodes en grandeur et direction. Cette aire sera décomposable en un certain nombre n de parallélogrammes égaux, et on aura:

$$n = \frac{S}{\sqrt{\Omega(\mu, \mu')}},$$

S étant la surface de l'aire.

L'excès du nombre des zéros positifs sur les zéros négatifs sera:

$$n\frac{M(\mu, \mu')}{2\pi\sqrt{-1}} = \frac{S}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{M(\mu, \mu')}{\sqrt{\Omega(\mu, \mu')}}.$$

On remarquera que le rapport

$$\frac{M(\mu, \mu')}{\sqrt{\Omega(\mu, \mu')}}$$

ne change pas, ni quand on multiplie tous les μ par un même facteur constant, ni quand on multiplie tous les μ' par un même facteur constant. Il ne change pas non plus quand on fait subir à μ_1 et à μ_1' une substitution linéaire, et en même temps à μ_k et μ_k' la même substitution linéaire.

Ce rapport dépend donc seulement au moins en valeur absolue de la direction du plan du parallélogramme; cependant il changerait de signe si la substitution linéaire dont je viens de parler avait un déterminant négatif.

Considérons maintenant une aire qui ne soit plus plane, mais qui soit limitée par des segments de droite représentant en grandeur et direction des périodes.

Considérons les zéros de Θ qui sont sur cette aire; nous distinguerons les zéros positifs et négatifs d'après le signe de $D(\mu, \mu')$, en appelant μ_k et μ_k' les coefficients caractéristiques de deux droites menées dans le plan tangent à l'aire au point envisagé. Nous remarquerons que $D(\mu, \mu')$ ne change pas quand on fait subir à μ_1 et à μ_1' une substitution linéaire de déterminant $+1$, et en même temps à μ_k et μ_k' la *même* substitution linéaire.

Je me propose alors de démontrer que l'excès N du nombre des zéros positifs sur celui des zéros négatifs est égal à

$$N = \int \frac{d\sigma}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{M(\mu, \mu')}{\sqrt{\Omega(\mu, \mu')}}, \tag{2}$$

$d\sigma$ représentant un élément de l'aire, et μ et μ' les coefficients caractéristiques de deux droites menées dans le plan tangent.

Je diviserai la démonstration en trois parties:

1° Je suppose d'abord que l'aire se décompose en un certain nombre de parallélogrammes construits sur des périodes; la formule est alors une conséquence immédiate de celle que nous venons d'établir.

2° Je suppose que l'aire soit fermée.

Dans ce cas je remarque d'abord que N est nul. En effet l'aire étant fermée peut être considérée comme la frontière complète d'une variété V à 3 dimensions. Les points de cette variété où $\theta = 0$ formeront une ligne; les points où cette ligne percera la frontière pour entrer dans V seront les zéros positifs, ceux où elle percera la frontière pour sortir de V seront les zéros négatifs. Il en résulte immédiatement que le nombre des zéros des 2 espèces est le même.

D'autre part, je dis que l'intégrale double du second membre est nulle; on peut l'écrire en effet:

$$\sum \frac{M_{kj}}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\mu_k^0 d\mu_j^0$$

en désignant par μ_k^0 les coefficients caractéristiques du vecteur qui va de l'origine au centre de gravité de l'élément $d\sigma$.

L'aire étant fermée, on voit aisément que chacune des intégrales $\int d\mu_k^0 d\mu_j^0$ est nulle.

3° Je suppose enfin que l'aire A soit quelconque, mais limitée par des segments représentant des périodes.

Dans ce cas je puis construire une aire A' ayant même frontière que A et décomposable en parallélogrammes construits sur des périodes. Le théorème est vrai pour A', il est vrai pour l'aire totale $A + A'$ qui est fermée; il est donc vrai pour A.

Supposons enfin que l'aire A soit tout à fait quelconque et ne soit plus limitée par des segments représentant des périodes. Dans quelle mesure

l'équation (2) restera-t-elle vraie? Supposons que l'aire A soit très-grande, que par exemple ses dimensions linéaires soient des infinis grands du 1[e] ordre et sa surface un infini du 2[d] ordre. Je dis alors que l'égalité (2) dont les deux membres sont des infinis grands du 2[d] ordre, reste vraie à des quantités près infiniment grandes du 1[er] ordre.

Nous pouvons en effet construire une ligne brisée fermée, composée de segments représentant des périodes, et s'écartant peu du périmètre de l'aire A; je veux dire par là que la distance de cette ligne brisée à ce périmètre restera plus petite que la plus grande diagonale du prismatoïde II. Nous pourrons alors construire une aire A', limitée d'une part par le périmètre de A, d'autre part par cette ligne brisée, et dont la surface sera du même ordre que le périmètre de A, c'est à dire du 1[er] ordre.

Soient alors N et J la valeur des deux membres de l'égalité (2), (c'est à dire de l'excès de l'intégrale double) pour l'aire A, soient N' et J' les deux quantités correspondantes pour l'aire A'; $N+N'$ et $J+J'$ les deux quantités correspondantes pour l'aire $A+A'$.

Comme l'aire $A+A'$ est limitée par des segments représentant des périodes, on a

$$N+N'=J+J'.$$

D'autre part N' et J' sont du même ordre que la surface de A' c'est à dire du 1[er] ordre. Donc

$$N=J$$

aux quantités près du 1[er] ordre. C. Q. F. D.

Si en particulier l'aire A est plane, mais quelconque, on aura aux quantités près du 1[er] ordre

$$N=\frac{S}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{M(\mu,\mu')}{\sqrt{\Omega(\mu,\mu')}}.$$

Les μ_k et les μ'_k sont les coefficients caractéristiques de deux droites quelconques du plan; nous n'avons plus besoin de supposer qu'ils sont entiers ou même commensurables.

Mais parmi les plans possibles, nous distinguerons ceux qui sont papallèles à un plan P donné par les équations:

$$\frac{v_1}{\beta_1}=\frac{v_2}{\beta_2}=\ldots=\frac{v_p}{\beta_p} \tag{3}$$

les β étant des coefficients *complexes* quelconques.

Soient γ_i et δ_i les parties réelle et imaginaire de β_i, nous pourrons envisager en particulier deux droites du plan P parallèles respectivement aux deux droites:

$$\frac{x_i}{\gamma_i} = \frac{x_k}{\gamma_k} = \frac{y_i}{\delta_i} = \frac{y_k}{\delta_k}, \qquad \frac{x_i}{-\delta_i} = \frac{x_k}{-\delta_k} = +\frac{y_i}{\gamma_i} = +\frac{y_k}{\delta_k}.$$

Ce sont les coefficients caractéristiques de ces deux droites que nous appellerons respectivement μ_k et μ'_k de sorte que nous aurons:

$$(4) \qquad \left| \begin{array}{ll} \gamma_i = \Sigma b_{ik}\mu_k, & \delta_i = \Sigma c_{ik}\mu_k, \\ -\delta_i = \Sigma b_{ik}\mu'_k, & +\gamma_i = \Sigma c_{ik}\mu'_k \end{array} \right.$$

et par conséquent:

$$D = \sum \left(\gamma_i \frac{d\theta_0}{dx_i} + \delta_i \frac{d\theta_0}{dy_i}\right) \sum \left(-\delta_i \frac{d\theta_1}{dx_i} + \gamma_i \frac{d\theta_1}{dy_i}\right)$$
$$- \sum \left(\gamma_i \frac{d\theta_1}{dx_i} + \delta_i \frac{d\theta_1}{dy_i}\right) \sum \left(-\delta_i \frac{d\theta_0}{dx_i} + \gamma_i \frac{d\theta_0}{dy_i}\right).$$

Or il est aisé de voir que

$$\sum \beta_i \frac{d\theta}{dv_i}$$

a pour partie réelle:

$$\sum \left(\gamma_i \frac{d\theta_0}{dx_i} + \delta_i \frac{d\theta_0}{dy_i}\right) = \sum \left(-\delta_i \frac{d\theta_1}{dx_i} + \gamma_i \frac{d\theta_1}{dy_i}\right)$$

et pour partie imaginaire

$$\sum \left(\gamma_i \frac{d\theta_1}{dx_i} + \delta_i \frac{d\theta_1}{dy_i}\right) = - \sum \left(-\delta_i \frac{d\theta_0}{dx_i} + \gamma_i \frac{d\theta_0}{dy_i}\right)$$

de sorte que

$$D = \left| \sum \beta_i \frac{d\theta}{dv_i} \right|^2$$

est essentiellement positif.

Il n'y a plus alors que des zéros positifs.

Le rapport $\frac{N}{S}$ représente alors la *densité moyenne* des zéros dans un plan parallèle à P, c'est à dire la limite vers laquelle tend le rapport du

nombre des zéros contenus dans une aire située dans ce plan, à la surface de cette aire, quand cette surface croît indéfiniment. Cette densité moyenne est donc égale à

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{M(\mu\,,\,\mu')}{\sqrt{\Omega}},$$

les coefficients μ et μ' étant déterminées par les équations (4).

Il résulte de là que pour ces valeurs des μ et des μ', l'expression

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}M(\mu\,,\,\mu')$$

est essentiellement positive.

Ce résultat peut se mettre encore sous d'autres formes.

Posons

$$\xi_i = \Sigma b_{ik}\mu_k, \qquad \xi_{i+p} = \Sigma c_{ik}\mu_k,$$

$$\xi'_i = \Sigma b_{ik}\mu'_k, \qquad \xi'_{i+p} = \Sigma c_{ik}\mu'_k,$$

alors notre expression

$$\frac{M(\mu\,,\,\mu')}{2\pi\sqrt{-1}}$$

deviendra une forme bilinéaire des ξ et des ξ' que je puis écrire:

$$\Sigma A_{kj}(\xi_j\xi'_k - \xi_k\xi'_j).$$

Cette forme devra être essentiellement positive si l'on y fait:

$$\xi_i = \gamma_i, \qquad \xi_{i+p} = \delta_i, \qquad \xi'_i = -\delta_i, \qquad \xi'_{i+p} = \gamma_i.$$

Or par cette substitution notre forme doit devenir une forme quadratique par rapport aux γ et aux δ; cette forme quadratique doit être définie positive.

Posons maintenant:

$$\mu_k + \sqrt{-1}\,\mu'_k = x_k, \qquad \mu_k - \sqrt{-1}\,\mu'_k = x^0_k,$$

les équations (4) nous donneront:

$$\Sigma a_{ik}x_k = 0, \qquad \Sigma a_{ik}x^0_k = 2\beta_i.$$

Il vient alors:

$$\mu_k\mu'_j - \mu_j\mu'_k = (x_kx^0_j - x_jx^0_k)\frac{-1}{2\sqrt{-1}}$$

de sorte que:

$$\frac{M}{2\pi\sqrt{-1}} = \frac{1}{4\pi}\Sigma M_{kj}(x_k x_j^0 - x_j x_k^0).$$

La forme à variables conjuguées qui figure dans le 2^d membre est donc essentiellement positive, si $\Sigma a_{ik}x_k$ est assujetti à être nul.

On reconnaît là l'inégalité de Riemann, généralisée par Frobenius (Crelle, tome 97, page 21). Mais la voie par laquelle nous y sommes parvenus diffère beaucoup à la fois de celle de Riemann et de celle de Frobenius.

Je crois que les considérations qui précèdent sont de nature à mieux faire comprendre la signification des nombres M_{kj}, et les relations de ces nombres avec la répartition des zéros des fonctions θ.

§ 6. *Cas de réduction.*

Dans quels cas une intégrale abélienne appartenant à une courbe de genre p peut-elle être réduite à une intégrale abélienne appartenant à une courbe de genre moindre?

Dans quels cas une courbe de genre p admettra-t-elle q intégrales abéliennes de 1^ère espèce, admettant seulement $2q$ périodes? Ou, ce qui revient au même, dans quels cas une intégrale abélienne appartenant à une courbe de genre p peut-elle être calculée à l'aide de systèmes de fonctions abéliennes de *rang* moindre que p, c'est à dire admettant moins de p variables?

Enfin dans quels cas des fonctions abéliennes de rang p peuvent-elles être réduites à des fonctions abéliennes de rang moindre?

Telles sont les questions qui ont occupé d'abord Weierstrass et M. Picard et que j'ai abordées à mon tour, d'abord dans le Bulletin de la Société Mathématique de France (tome 12), puis dans le tome 8 de l'American Journal.

Nous trouvons d'abord le cas où la fonction θ peut être regardée comme le produit de p fonctions θ elliptiques. C'est ce que j'appelle le *cas singulier elliptique.*

Puis nous avons le cas où la fonction θ est le produit de plusieurs fonctions θ abéliennes de rang moindre. C'est ce que j'appelle le *cas singulier abélien.*

Nous avons ensuite les cas, qui par une transformation d'ordre convenable, peuvent être ramenés soit au cas singulier elliptique, soit au cas singulier abélien.

Il n'y a pas d'autres cas de réduction.

Mais, circonstance remarquable, un système quelconque de périodes, diffère toujours infiniment peu d'une infinité de systèmes correspondant à des cas de réduction, de la même façon qu'un nombre réel quelconque diffère toujours infiniment peu d'une infinité de nombres rationnels.

Enfin si un système de fonctions abéliennes peut *de deux manières différentes* être ramené par une transformation, au cas singulier elliptique, cette réduction peut se faire *d'une infinité de manières différentes.* C'est ce qu'avait déjà remarqué M. Picard dans certains cas particuliers.

Je me borne à énoncer succinctement ces résultats; mais je dois cependant expliquer le parti qu'on en peut tirer pour l'étude des fonctions abéliennes les plus générales.

On peut les utiliser de 3 manières différentes:

1° On peut résoudre un problème dans le cas singulier elliptique, et montrer ensuite que le résultat ne peut être différent dans ce cas singulier de ce qu'il est dans le cas général.

C'est ainsi par exemple que j'ai déterminé le nombre des zéros communs à p fonctions θ; et M. Wirtinger a également tiré un grand parti de ce procédé.

2° On peut profiter de cette circonstance signalée plus haut qu'étant donnée une fonction abélienne quelconque, on peut toujours trouver une infinité de fonctions abéliennes réductibles qui en diffèrent aussi peu qu'on le veut.

C'est comme cela que j'ai déterminé la somme des zéros communs à p fonctions θ.

3° On peut étudier spécialement les cas qui diffèrent peu du cas singulier elliptique, ou du cas singulier abélien.

C'est ce que j'ai fait dans le Journal de Liouville 1895 quand j'ai voulu étudier les conditions auxquelles une fonction θ de rang p doit satisfaire pour être une fonction θ spéciale, c'est à dire une fonction θ de Riemann engendrée par une courbe algébrique de genre p.

Enfin c'est sur l'étude des cas de réduction qu'est fondée la démonstration du théorème B qui a été imaginée d'abord par Weierstrass

et que nous avons retrouvée, M. Picard et moi, et publiée dans les Comptes-Rendus.

§ 7. *Zéros des fonctions θ.*

Les fonctions intermédiaires peuvent toujours se ramener aux fonctions θ, soit immédiatement, soit après un changement de périodes. J'appelle fonctions θ les fonctions intermédiaires pour lesquelles p des multiplicateurs se réduisent à des constantes, et les p autres à des exponentielles. La plupart des auteurs ont attribué une importance prépondérante et presque exclusive à celles de ces fonctions où les nombres appelés caractéristiques sont des entiers. J'ai toujours trouvé beaucoup plus commode de m'affranchir de cette restriction et d'attribuer à ces caractéristiques des valeurs quelconques. En revanche j'ai supposé le plus souvent que les p premiers multiplicateurs étaient égaux à 1, ce qui ne restreint pas la généralité d'une façon essentielle.

Quoi qu'il en soit, on sait que le nombre des fonctions θ d'ordre m, linéairement indépendantes et ayant mêmes multiplicateurs est égal à m^p; si on les regarde comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à $m^p - 1$ dimensions, ce point engendrera une variété à p dimensions. J'ai étudié cette variété principalement dans le Journal de Liouville 1895 et j'ai en particulier déterminé son degré de deux manières différentes.

Le nombre des zéros communs à p fonctions θ d'ordre

$$m_1, m_2, \ldots, m_p$$

est égal à

$$m_1 m_2 \ldots m_p . p'. \tag{1}$$

C'est ce que j'ai démontré dans le tome 10 du Bulletin de la Société Mathématique de France.

Dans le Journal de Liouville, j'ai abordé un problème qui contient à la fois comme cas particulier celui dont je viens d'énoncer la solution, et une question résolue autrefois par Riemann.

Soit un système de fonctions abéliennes *spéciales* au sens du paragraphe précédent. Soient $\theta_1(v_i)$, $\theta_2(v_i)$, ..., $\theta_q(v_i)$ q fonctions θ. Soit

$u_i(x)$ l'intégrale abélienne de $1^{\text{ère}}$ espèce qui sur la courbe de genre p qui engendre ces fonctions θ correspond à la variable v_i. Combien les équations

$$\theta_k[u_i(x_1) + u_i(x_2) + \ldots + u_i(x_q)] = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,q)}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_q$ sont les inconnues, admettent-elles de solutions?

La solution de cette question est donnée par une formule qui contient comme cas particuliers la formule (1) et celle de RIEMANN.

§ 8. *Fonctions spéciales.*

Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction abélienne soit spéciale?

RIEMANN a démontré que pour les fonctions spéciales, la variété à $p - 1$ dimensions:

$$\theta = 0$$

est une «variété doublement de translation».

SOPHUS LIE a établi ensuite que cette condition n'est pas seulement nécessaire mais qu'elle est aussi suffisante pour qu'une fonction θ soit spéciale.

J'ai donné dans le Bulletin de la Société Mathématique de France (1901) une nouvelle démonstration du théorème de LIE qui me semble plus simple et plus synthétique que celle de ce géomètre.

D'autre part j'ai cherché dans le Journal de LIOUVILLE 1895 à approfondir cette condition.

J'ai cherché à l'exprimer en fonction des périodes, et dans les cas voisins du cas singulier elliptique je suis parvenu à former les premiers termes du développement de la fonction des périodes qui, égalée à zéro, exprime que cette condition est remplie.

J'ai d'ailleurs étudié la courbe qui engendre cette variété de translation; cette courbe satisfait à $p - 1$ équations de la forme:

$$\theta(v_i - e_{ik}) = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p-1)}$$

les e étant des constantes. Mais ces équations ne suffisent pas pour déterminer cette courbe; elles définissent une courbe *décomposable* dont la

courbe envisagée n'est qu'une composante. Tous ces points étant presque évidents, j'ai cherché à me rendre compte des circonstances de cette décomposition.

§ 9. *Somme des zéros.*

Dans le tome 8 de l'American Journal, j'ai démontré, en m'appuyant sur une généralisation du théorème d'Abel, que la somme des zéros communs à p fonctions intermédiaires est une constante, et ne dépend que des multiplicateurs de ces fonctions.

J'ai ensuite, en remarquant qu'on est toujours infiniment près d'un cas de réduction, déterminé la valeur de cette constante.

Je voudrais déduire de là une conséquence.

Soient

$$\theta\,,\ \theta_1\,,\ \theta_2\,,\ \ldots,\ \theta_p$$

$p+1$ fonctions θ ayant mêmes multiplicateurs.

Considérons maintenant les zéros communs aux p dernières fonctions; ces zéros seront donnés par les équations

$$\theta_1(v_i) = \theta_2(v_i) = \ldots = \theta_p(v_i) = 0. \tag{1}$$

Soit

$$v_i = g_{ik}$$

une de ces solutions; l'indice i varie de 1 à p, l'indice k de 1 à N,

$$N = m^p \underline{|p}$$

étant le nombre des solutions des équations (1) et m l'ordre des fonctions θ considérées.

Formons maintenant les équations suivantes:

$$\theta_1(v_i) + \varepsilon_1\theta(v_i) = \theta_2(v_i) + \varepsilon_2\theta(v_i) = \ldots = \theta_p(v_i) + \varepsilon_p\theta(v_i) = 0 \tag{2}$$

les ε étant des constantes. Ces équations auront N solutions; soit

$$v_i = g'_{ik}$$

l'une de ces solutions. Les fonctions $\theta_k + \varepsilon_k\theta$ ont mêmes multiplicateurs que les fonctions θ_k. On aura donc

$$\Sigma g_{ik} = \Sigma g'_{ik}. \tag{3}$$

Si les ε sont très petits, nous pourrons poser

$$g'_{ik} - g_{ik} = \partial g_{ik}$$

et les ∂g_{ik} seront très petits de l'ordre des ε; on aura donc en négligeant les quantités de l'ordre de ε^2:

$$\theta_1(g'_{ik}) = \theta_1(g_{ik}) + \sum \partial g_{jk} \frac{d\theta_1}{dv_j} = \sum \partial g_{jk} \frac{d\theta_1}{dv_j},$$

$$\varepsilon_1 \theta(g'_{ik}) = \varepsilon_1 \theta(g_{ik}).$$

Dans les dérivées $\frac{d\theta_1}{dv_j}$, les v_i doivent être remplacés par g_{ik}.

Les équations (2) peuvent donc s'écrire:

$$\sum \partial g_{jk} \frac{d\theta_q}{dv_j} + \varepsilon_q \theta(g_{ik}) = 0. \tag{4}$$

Soit $\Delta(v_i)$ le déterminant des $\frac{d\theta_q}{dv_i}$, c'est à dire le déterminant fonctionnel des θ_q par rapport aux v. Soit $\Delta_{qj}(v_i)$ le mineur de ce déterminant correspondant à l'élément $\frac{d\theta_q}{dv_j}$; les équations (4) nous donnent:

$$-\frac{\theta(g_{ik})}{\Delta(g_{ik})} \Sigma \varepsilon_q \Delta_{qj}(g_{ik}).$$

En vertu de l'équation (3) on a $\Sigma \partial g_{ik} = 0$; on aura donc aussi quels que soient les indices q et j:

$$\sum \theta(g_{ik}) \frac{\Delta_{qj}(g_{ik})}{\Delta(g_{ik})} = 0. \tag{5}$$

La sommation doit être étendue aux N solutions des équations (1).

Pour nous rendre compte de la signification de ce théorème, voyons ce qu'il devient dans le cas des fonctions elliptiques ($p = 1$); on a alors:

$$\Delta_{qj} = 1, \qquad \Delta(v_1) = \theta'_1(v_1)$$

et notre équation devient:

$$\sum \frac{\theta(g_{1k})}{\theta'_1(g_{1k})} = 0. \tag{6}$$

La fonction

$$\frac{\theta}{\theta_1}$$

est alors une fonction doublement périodique admettant pour pôles les points g_{1k}; le résidu correspondant est précisément

$$\frac{\theta(g_{1k})}{\theta_1'(g_{1k})}.$$

L'équation (6) exprime donc le théorème bien connu d'après lequel la somme des résidus d'une fonction doublement périodique est nulle.

A ce point de vue, *l'équation* (5) *peut être regardée comme la généralisation du théorème des résidus.*

Nous avons supposé jusqu'ici que les $p+1$ fonctions $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ avaient mêmes multiplicateurs. Supposons maintenant que θ et θ_1 aient mêmes multiplicateurs; mais ne supposons plus que les autres fonctions aient mêmes multiplicateurs, ni même qu'elles soient de même ordre.

Reprenons les équations (1) et (2) mais en faisant

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_p = 0.$$

Les fonctions

$$\theta_1 + \varepsilon_1 \theta, \ \theta_2, \ \ldots, \ \theta_p$$

ayant mêmes multiplicateurs que

$$\theta_1, \ \theta_2, \ \ldots, \ \theta_p$$

les équations (3) subsistent, et par conséquent aussi l'équation (5), *mais pour* $q = 1$ *seulement.*

Soit

$$F = \frac{\theta}{\theta_1}.$$

Regardons F comme une fonction de v_j, les autres v étant supposés exprimés en fonctions de v_j par les équations

$$\theta_2 = \theta_3 = \ldots = \theta_p = 0.$$

Notre fonction F admettra comme infinis

$$v_j = g_{jk}.$$

Quel sera le résidu correspondant? C'est la limite de:

$$H = (v_j - g_{jk})F$$

quand v_j tend vers g_{jk}, de façon que $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_p$ restent nuls.

Soit

$$\delta v_i = v_i - g_{ik}$$

nous aurons

$$\sum \delta v_i \frac{d\theta_q}{dv_i} = 0, \qquad (q=2, 3, \ldots, n)$$

$$\theta_1 = \sum \delta v_i \frac{d\theta_1}{dv_i} = \frac{H}{\theta} \delta v_j.$$

De cette équation nous tirons:

$$\Delta' = 0$$

Δ' étant le déterminant fonctionnel Δ où $\dfrac{d\theta_1}{dv_i}$ est remplacé par $\dfrac{d\theta_1}{dv_j} - \dfrac{H}{\theta}$. De là nous tirons:

$$H = \theta(v_i) \frac{\Delta_{1j}(v_i)}{\Delta(v_i)}$$

et à la limite pour le résidu:

$$\theta(g_{ik}) \frac{\Delta_{1j}(g_{ik})}{\Delta(g_{ik})}.$$

L'équation (5) exprime donc bien que *la somme des résidus* (entendus au sens que nous venons de préciser) *est nulle.*

ÜBER DIE THEORIE DER RELATIV-ABEL'SCHEN ZAHLKÖRPER[1]

VON

DAVID HILBERT

in GÖTTINGEN.

§ 1.

In der Theorie der relativ-Abel'schen Zahlkörper nehmen zunächst die Körper vom *zweiten* Relativgrade unser Interesse in Anspruch.

Es sei ein beliebiger Zahlkörper k vom Grade n als Rationalitätsbereich zu Grunde gelegt; unsere Aufgabe ist es dann, die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper $K(\sqrt{\mu})$, d. h. derjenigen Körper zu begründen, die durch die Quadratwurzel aus einer beliebigen ganzen Zahl μ des Körpers k bestimmt sind. Die »disquisitiones arithmeticae» von GAUSS sind als der einfachste Fall in jenem Problem enthalten. Wir können unsern Gegenstand auch als die Theorie der quadratischen Gleichungen oder Formen bezeichnen, deren Coefficienten Zahlen des vorgelegten Rationalitätsbereiches k sind.

Die Theorie des relativquadratischen Körpers führte mich zur Entdeckung eines allgemeinen Reciprocitätsgesetzes für quadratische Reste,

---

[1] Mit geringen Änderungen abgedruckt aus den Nachrichten der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen 1898.

Inzwischen sind folgende auf diesen Gegenstand bezügliche Inaugural-Dissertationen in Göttingen erschienen: *Das quadratische Reciprocitätsgesetz im quadratischen Zahlkörper mit der Classenzahl* 1. von H. DÖRRIE 1898, *Tafel der Klassenanzahlen für kubische Zahlkörper* von L. W. REID 1899, *Das allgemeine quadratische Reciprocitätsgesetz in ausgewählten Kreiskörpern der* $2^{h\text{ten}}$ *Einheitswurzeln* von K. S. HILBERT 1900, *Quadratische Reciprocitätsgesetze in algebraischen Zahlkörpern* von G. RÜCKLE 1901. Insbesondere die letzte Dissertation enthält zahlreiche und interessante Beispiele zu der hier entwickelten Theorie.

welches das gewöhnliche Reciprocitätsgesetz zwischen rationalen Primzahlen nur als ein vereinzeltes Glied in einer Kette sehr interessanter und mannigfaltiger Zahlenbeziehungen erscheinen lässt.

In meiner Abhandlung *Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers* [1] habe ich die Theorie der quadratischen Relativkörper innerhalb eines algebraischen Grundkörpers k vollständig für den Fall entwickelt, dass der Grundkörper k nebst seinen sämmtlichen conjugirten Körpern imaginär ist und überdies eine ungerade Klassenanzahl besitzt. Die wichtigsten der in der genannten Abhandlung aufgestellten Sätze sind das Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste in k und der Satz, demzufolge in einem relativquadratischen Körper in Bezug auf k stets die Hälfte aller denkbaren Charakterensysteme wirklich durch Geschlechter vertreten sind. Ich habe in jener Abhandlung zu zeigen versucht, welch ein Reichthum an arithmetischen Wahrheiten in diesen Sätzen enthalten ist; dennoch offenbart sich die volle Bedeutung der genannten Sätze erst, wenn wir ihre Gültigkeit auf *beliebige* algebraische Grundkörper k ausdehnen. In einem auf der Mathematiker-Vereinigung zu Braunschweig gehaltenen Vortrage [2] habe ich einige kurze Bemerkungen über den Fall gemacht, dass der Grundkörper k reell ist, bez. reelle conjugirte Körper aufweist oder die Klassenanzahl 2 besitzt. In der gegenwärtigen Arbeit beabsichtige ich, die wichtigsten Sätze aus der Theorie der quadratischen Relativkörper innerhalb eines beliebigen Grundkörpers k aufstellen und zugleich die Abänderungen anzugeben, welche die Beweise in meiner zu Anfang genannten Abhandlung erfahren müssen, wenn man für den Grundkörper k die dort gemachten beschränkenden Annahmen beseitigen will.

Endlich habe ich im letzten Paragraph (§ 16) der gegenwärtigen Arbeit für relativ-Abel'sche Zahlkörper von beliebigem Relativgrade und mit der Relativdiscriminante 1 eine Reihe von allgemeinen Sätzen vermutungsweise aufgestellt; es sind dies Sätze von wunderbarer Einfachheit und krystallener Schönheit, deren vollständiger Beweis und gehörige Verallgemeinerung auf den Fall einer beliebigen Relativdiscriminante mir als das Endziel der rein arithmetischen Theorie der relativ-Abel'schen Zahlkörper erscheint.

[1] Mathematische Annalen Bd. 51, S. 1—127.

[2] Jahresbericht der Mathematiker-Vereinigung VI, 1897, S. 88—94.

§ 2.

Es sei k ein beliebiger Zahlkörper; der Grad dieses Körpers k heisse m und die $m-1$ zu k conjugirten Zahlkörper mögen mit $k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ bezeichnet werden. Die Anzahl der Idealklassen des Körpers k werde h genannt. Wir übertragen das bekannte Symbol aus der Theorie der rationalen Zahlen auf den hier zu behandelnden Fall, wie folgt: [1]

Es sei $\mathfrak{p}$ ein in 2 nicht aufgehendes Primideal des Körpers k und α eine beliebige zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k: dann bedeute das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ den Werth $+1$ oder -1, je nachdem α dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{p}$ congruent ist oder nicht. Ist ferner $\mathfrak{a}$ ein beliebiges zu 2 primes Ideal in k und hat man $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{q} \ldots \mathfrak{w}$, wo $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots, \mathfrak{w}$ Primideale in k sind und ist α eine zu $\mathfrak{a}$ prime ganze Zahl in k, so möge das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)$ durch die folgende Gleichung definirt werden:

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{q}}\right) \cdots \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{w}}\right).$$

Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ beliebige zu 2 prime Ideale in k und α eine zu $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ prime ganze Zahl in k, so gilt offenbar die Gleichung

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right).$$

Bezeichnet μ irgend eine ganze Zahl in k, die nicht gleich dem Quadrat einer Zahl in k ist, so bestimmt $\sqrt{\mu}$ zusammen mit den Zahlen des Körpers k einen Körper vom Grade $2m$, welcher relativquadratisch in Bezug auf den Körper k ist und mit $K(\sqrt{\mu})$ oder auch kurz mit K bezeichnet werde. Sind in Bezug auf k mehrere relativquadratische Körper vorgelegt, so heissen dieselben *von einander unabhängig*, sobald keiner derselben als Unterkörper in demjenigen Körper enthalten ist, der aus den übrigen durch Zusammensetzung entsteht.

[1] Vergl. meine Abhandlung *Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers*, Definition 1 und 5.

Ein relativquadratischer Körper K heisse *unverzweigt* in Bezug auf k, wenn die Relativdiscriminante von K in Bezug auf k gleich 1 ausfällt oder, was das Nämliche bedeutet, wenn es in k kein Primideal giebt, das gleich dem Quadrat eines Primideals in K wird.

§ 3.

Wir machen zunächst über den zu Grunde gelegten Körper k solche zwei Annahmen, unter denen die Theorie des relativquadratischen Körpers bereits in meiner Abhandlung ausführlich entwickelt worden ist; es sind dies folgende Annahmen:

1. Der Körper k vom m^{ten} Grade sei nebst allen conjugirten Körpern $k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ imaginär.
2. Die Anzahl h der Idealklassen im Körper k sei gleich 1.

Wegen der späteren Ausführungen wiederholen wir hier die hauptsächlichsten in Frage kommenden Definitionen und Resultate in einer Fassung, die von der in meiner Abhandlung gegebenen Darstellung ein wenig abweicht.

Definition 1. Ein solches zu 2 primes Ideal $\mathfrak{a}$ des Körpers k, in Bezug auf das für jede Einheit ξ in k

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right) = +1$$

ausfällt, heise ein *primäres Ideal*.

Definition 2. Eine solche zu 2 prime ganze Zahl α des Körpers k, welche congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 2^2 ausfällt, heisse eine *primäre Zahl* des Körpers k.

Wir können dann den wesentlichen Inhalt des *ersten* Ergänzungssatzes zum Reciprocitätsgesetz wie folgt aussprechen:

Satz 1. Wenn $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal in k ist, so giebt es stets eine primäre Zahl α, so dass $\mathfrak{a} = (\alpha)$ wird, und umgekehrt: wenn α eine primäre Zahl in k ist, so ist das Ideal $\mathfrak{a} = (\alpha)$ stets ein primäres Ideal.

Wir zerlegen nun die Zahl 2 im Körper k in Primideale wie folgt:

$$2 = \mathfrak{l}_1^{l_1} \mathfrak{l}_2^{l_2} \ldots \mathfrak{l}_z^{l_z},$$

wo $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_z$ die von einander verschiedenen Primfactoren der Zahl 2 in k und $l_1, l_2, \ldots, l_z$ die Potenzexponenten bedeuten, zu denen bez. jene Primideale in der Zahl 2 aufgehen.

Definition 3. Ein solches zu 2 primes Ideal $\mathfrak{a}$ des Körpers k, in Bezug auf das nicht nur für jede Einheit ξ in k, sondern auch für jede in 2 aufgehende ganze Zahl λ des Körpers k

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right) = +1, \qquad \left(\frac{\lambda}{\mathfrak{a}}\right) = +1$$

ausfällt, heisse ein *hyperprimäres Ideal.*

Definition 4. Eine solche zu 2 prime Zahl α des Körpers k, welche congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}\mathfrak{l}_2^{2l_2+1}\ldots\mathfrak{l}_z^{2l_z+1}$ ausfällt, heisse eine *hyperprimäre Zahl* des Körpers k.

Wir können dann den wesentlichen Inhalt des *zweiten* Ergänzungssatzes zum Reciprocitätsgesetz wie folgt aussprechen:

Satz 2. Wenn $\mathfrak{a}$ ein hyperprimäres Ideal in k ist, so giebt es stets eine hyperprimäre Zahl α, so dass $\mathfrak{a} = (\alpha)$ wird, und umgekehrt: wenn α eine hyperprimäre Zahl in k ist, so ist das Ideal $\mathfrak{a} = (\alpha)$ stets ein hyperprimäres Ideal.

Der wesentliche Inhalt des allgemeinen Reciprocitätsgesetzes für quadratische Reste im Körper k lautet wie folgt:

Satz 3. Wenn ν, μ, ν', μ' irgend welche zu zwei prime ganze Zahlen in k sind derart, dass die beiden Producte $\nu\nu'$ und $\mu\mu'$ primär ausfallen und ν zu μ, ν' zu μ' prim ist, so ist stets

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = \left(\frac{\nu'}{\mu'}\right)\left(\frac{\mu'}{\nu'}\right).$$

Wenn die Klassenanzahl h des Körpers k nicht gleich 1, sondern eine beliebige ungerade Zahl ist, so wird nur eine geringfügige und aus meiner Abhandlung leicht zu entnehmende Abänderung im Ausdrucke der Sätze 1—3 nothwendig.

Satz 4. Jede Einheit in k, welche primär (eine primäre Zahl) ist, ist das Quadrat einer Einheit in k.

Satz 5. Es giebt in Bezug auf k keinen relativquadratischen unverzweigten Körper.

Die beiden letzten Sätze gelten unverändert für den Fall, dass die Klassenanzahl h des Körpers k eine beliebige ungerade Zahl ist.

§ 4.

Wir legen nunmehr für den Körper k folgende Annahmen zu Grunde:

1. Unter den m conjugirten Körpern $k, k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ gebe es eine beliebige Anzahl s (> 0) reeller Körper; seien dies die Körper $k, k', k'', \ldots, k^{(s-1)}$.

2. Die Anzahl h der Idealklassen im Körper k sei gleich 1.

Bei diesen Annahmen wird die Definition 1 des primären Ideals unverändert beibehalten, dagegen wird es nöthig, den Begriff einer primären Zahl enger zu fassen.

Definition 5. Eine Zahl α des Körpers k heisst *total positiv in* k, falls die s zu α conjugirten bez. in $k, k', \ldots, k^{(s-1)}$ gelegenen Zahlen sämtlich positiv sind. Wenn eine zu 2 prime Zahl α des Körpers k congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 2^2 ausfällt und wenn ausserdem α total positiv in k ist, so heisse α eine *primäre Zahl* des Körpers k.

Bei Anwendung der so festgesetzten Bezeichnungsweise gilt der erste Ergänzungssatz 1 und das allgemeine Reciprocitätsgesetz 3 wiederum genau in der früheren Fassung und, wenn man in entsprechender Weise den Begriff der hyperprimären Zahl enger fasst, so bleibt auch der zweite Ergänzungssatz 2 in der früheren Fassung gültig.

§ 5.

Wir erörtern ferner die Frage, ob es unter den in § 4 für den Körper k zu Grunde gelegten Annahmen relativquadratische unverzweigte Körper in Bezug auf k giebt. Zu dem Zwecke setzen wir zunächst allgemein fest, dass, wenn ε irgend eine Einheit in k bedeutet, stets $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots, \varepsilon^{(s-1)}$ die zu ε conjugirten bez. in $k', k'', \ldots, k^{(s-1)}$ gelegenen Einheiten bezeichnen sollen.

Nunmehr nehmen wir $\varepsilon_1 = -1$: wie die Einheit ε_1 fallen offenbar alle zu ε_1 conjugirten Einheiten negativ aus. Ferner möge es in k eine Einheit ε_2 geben, welche in k positiv ist, während mindestens eine der

conjugirten Einheiten $\varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_2^{(s-1)}$ negativ ausfällt; es sei etwa die in k' gelegene Einheit ε_2' negativ. Sodann möge es in k eine Einheit ε_3 geben, welche positiv ist und für welche auch ε_3' positiv wird, während mindestens eine der conjugirten Einheiten $\varepsilon_3'', \varepsilon_3''', \ldots, \varepsilon_3^{(s-1)}$ negativ ausfällt; es sei etwa die in k'' gelegene Einheit ε_3'' negativ. In dieser Weise fahren wir fort; wir mögen schliesslich eine Einheit ε_p $(p \leq s)$ erhalten von der Beschaffenheit, dass $\varepsilon_p, \varepsilon_p', \varepsilon_p'', \ldots, \varepsilon_p^{(p-2)}$ sämmtlich positiv sind, dagegen $\varepsilon_p^{(p-1)}$ negativ ausfällt und nun soll das eingeschlagene Verfahren sein Ende erreicht haben, d. h. wenn irgend eine Einheit ε in k nebst ihren $p - 1$ conjugirten Einheit $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots, \varepsilon^{(p-1)}$ positiv ausfällt, so sei nunmehr auch stets jede der übrigen $s - p$ conjugirten Einheiten $\varepsilon^{(p)}, \ldots, \varepsilon^{(s-1)}$ positiv.

Die Zahl $s - p$ erhält eine besonders einfache Bedeutung, wenn wir dem Äquivalenz- und Klassenbegriff eine engere Fassung ertheilen, als bisher geschehen ist. Wir wollen nämlich fortan zwei Ideale $\mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ des Körpers k nur dann als äquivalent bezeichnen, wenn $\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{k}} = \alpha$ gesetzt werden kann, so dass α eine ganze oder gebrochene Zahl in k ist, die selbst nebst den sämmtlichen bez. in $k', k'', \ldots, k^{(s-1)}$ gelegenen zu α conjugirten Zahlen $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(s-1)}$ positiv ausfällt, d. h., die total positiv in k ist. Rechnen wir alle solchen Ideale des Körpers k, die in diesem engeren Sinne untereinander äquivalent sind, zu einer Klasse, so besitzt der Körper k, wie leicht ersichtlich ist, genau $\bar{h} = 2^{s-p}$ Idealklassen.

Nach diesen Vorbereitungen findet die oben aufgeworfene Frage nach den unverzweigten Körpern in Bezug auf k in folgender Weise ihre Beantwortung:

Satz 6. Für den Körper k giebt es ein System von $s - p$ unabhängigen relativquadratischen unverzweigten Körpern in Bezug auf k. Durch Zusammensetzung dieser $s - p$ Körper entsteht ein Körper Kk vom Relativgrade $\bar{h} = 2^{s-p}$ in Bezug auf k, der sämmtliche unverzweigten Körper in Bezug auf k als Unterkörper enthält und der *Klassenkörper* von k heissen möge. Die Anzahl $\bar{H}$ der Idealklassen dieses Körpers Kk ist, auch wenn wir den Klassenbegriff in der vorhin (für k) angegebenen engeren Fassung nehmen, stets eine ungerade Zahl.

Eine der merkwürdigsten Eigenschaften des Klassenkörpers Kk besteht darin, dass die Primideale des Körpers k, welche einer und der nämlichen Idealklasse von k im engeren Sinne angehören, im Klassenkörper Kk stets

die nämliche Zerlegung in Primideale dieses Körpers Kk erfahren d. h. so dass die Anzahl der verschiedenen Primideale und ihre Grade die gleichen sind; die Zerlegung eines Primideals $\mathfrak{p}$ des Körpers k im Körper Kk hängt somit nur von der Klasse ab, der das Primideal $\mathfrak{p}$ im Körper k angehört.

§ 6.

Um die genannten Thatsachen zu beweisen und unter den in § 4 gemachten Annahmen die Theorie des relativquadratischen Körpers in Bezug auf k vollständig aufzubauen, bedürfen wir eines Symbols, welches ich bereits in meinem in Braunschweig gehaltenen Vortrage erklärt habe.

Definition 6. Es sei $\mathfrak{w}$ irgend ein Primideal in k, und es seien ν, μ beliebige ganze Zahlen in k, nur dass μ nicht gleich dem Quadrat einer Zahl in k ausfällt; wenn dann ν nach $\mathfrak{w}$ der Relativnorm einer ganzen Zahl des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ congruent ist und wenn ausserdem auch für jede höhere Potenz von $\mathfrak{w}$ stets eine solche ganze Zahl A im Körper $K(\sqrt{\mu})$ gefunden werden kann, dass $\nu \equiv N(A)$ nach jener Potenz von $\mathfrak{w}$ ausfällt, so setze ich

$$\left(\frac{\nu\,,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1;$$

in jedem anderen Falle dagegen

$$\left(\frac{\nu\,,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = -1.$$

Fällt μ gleich dem Quadrat einer ganzen Zahl ($\neq 0$) in k aus, so werde stets

$$\left(\frac{\nu\,,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1$$

gesetzt. Ferner definiren wir noch die s Symbole

$$\left(\frac{\nu\,,\,\mu}{\mathfrak{l}}\right), \left(\frac{\nu\,,\,\mu}{\mathfrak{l}'}\right), \ldots, \left(\frac{\nu\,,\,\mu}{\mathfrak{l}^{(s-1)}}\right);$$

wir setzen stets

$$\left(\frac{\nu\,,\,\mu}{\mathfrak{l}}\right) = +1,$$

wenn wenigstens eine der beiden Zahlen ν, μ positiv ausfällt; dagegen setzen wir

$$\left(\frac{\nu\,,\,\mu}{1}\right) = -1,$$

wenn jede der beiden Zahlen ν, μ negativ ausfällt. Ferner bezeichnen wir allgemein die in $k^{(i)}$ gelegenen zu ν, μ conjugirten Zahlen bez. mit $\nu^{(i)}$, $\mu^{(i)}$ und setzen

$$\left(\frac{\nu\,,\,\mu}{1'}\right) = \left(\frac{\nu',\,\mu'}{1}\right), \quad \left(\frac{\nu\,,\,\mu}{1''}\right) = \left(\frac{\nu'',\,\mu''}{1}\right), \ldots, \left(\frac{\nu\,,\,\mu}{1^{(s-1)}}\right) = \left(\frac{\nu^{(s-1)},\,\mu^{(s-1)}}{1}\right).$$

Ist nun ein bestimmter relativquadratischer Körper $K(\sqrt{\mu})$ in Bezug auf k vorgelegt, so wird eine naturgemässe Definition des Geschlechtsbegriffes aus der Definition 12 meiner Abhandlung gewonnen, wenn man sich des verallgemeinerten Symbols $\left(\frac{\nu\,,\,\mu}{\omega}\right)$ bedient, wo ω die in der Relativdiskriminante von $K(\sqrt{\mu})$ aufgehenden Primideale und überdies diejenigen Zeichen $1^{(i)}$ durchläuft, wofür die in $k^{(i)}$ gelegene zu μ conjugirte Zahl $\mu^{(i)}$ negativ ausfällt. Es gelingt dann ohne erhebliche Schwierigkeit die ganze in meiner Abhandlung entwickelte Theorie der relativquadratischen Körper auf den hier in Rede stehenden Fall, dass der Körper k die in § 4 gemachten Annahmen erfüllt, auszudehnen.

Das Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste im Körper k erhält mit Benutzung des erweiterten Symbols $\left(\frac{\nu\,,\,\mu}{\omega}\right)$ die folgende einfache Fassung:

Satz 7. Wenn ν, μ beliebige ganze Zahlen $\neq 0$ in k sind, so ist stets

$$\prod_{(\omega)} \left(\frac{\nu\,,\,\mu}{\omega}\right) = +1,$$

wo das Product über sämmtliche Primideale $\omega = \mathfrak{w}$ in k und über die s Zeichen $\omega = 1, 1', 1'', \ldots, 1^{(s-1)}$ erstreckt werden soll.

Auch die Sätze 41, 64, 65, 67 in meiner Abhandlung lassen sich mit Hülfe des erweiterten Symbols $\left(\frac{\nu\,,\,\mu}{\omega}\right)$ unmittelbar auf den Fall des hier betrachteten Grundkörpers k übertragen.

Wenn die in ursprünglichem Sinne verstandene Klassenzahl h des Körpers k nicht 1, sondern irgend eine ungerade Zahl ist, so bedürfen die Sätze in § 4—§ 6 nur einer geringen und aus meiner Abhandlung leicht zu entnehmenden Abänderung.

§ 7.

Wenn für den Körper k insbesondere $s-p=0$ ausfällt, so wird $\bar{h}=1$ und Satz 6 lehrt dann, dass es keinen unverzweigten Körper in Bezug auf k giebt. Wir wollen den nächst einfachen Fall $s-p=1$, $\bar{h}=2$ betrachten und vor Allem die am Schluss von § 5 angedeuteten Gesetze der Zerlegung der Primideale in k näher erörtern. Es mögen daher fortan für den Grundkörper k folgende speciellere Annahmen gelten:

1. Unter den m conjugirten Körpern $k, k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ gebe es eine beliebige Anzahl s (>0) reelle Körper; es seien dies die Körper $k, k', k'', \ldots, k^{(s-1)}$.

2. Die Anzahl h der Idealklassen des Körpers k, im ursprünglichen weiteren Sinne verstanden, sei gleich 1; die Anzahl $\bar{h}$ der Idealklassen des Körpers k, im engeren Sinne verstanden, sei gleich 2.

Unter diesen Annahmen ist der in § 5 erwähnte Klassenkörper Kk relativquadratisch und besitzt folgende Eigenschaften:

Satz 8a. Der Klassenkörper Kk hat in Bezug auf k die Relativdiskriminante 1; d. h. er ist unverzweigt in Bezug auf k.

Satz 8b. Die Klassenanzahl $\bar{H}$ des Klassenkörpers Kk, in engerem Sinne verstanden, ist ungerade.

Satz 8c. Diejenigen Primideale in k, welche in k Hauptideale im engeren Sinne sind, zerfallen in Kk in das Product zweier Primideale. Diejenigen Primideale in k, welche in k nicht Hauptideale im engeren Sinne sind, bleiben in Kk Primideale.

Von diesen drei Eigenschaften 8a, 8b, 8c charakterisirt jede für sich allein bei unseren Annahmen über den Körper k in eindeutiger Weise den Klassenkörper Kk.

Zum Beweise der Existenz des Klassenkörpers Kk ist es erforderlich zu zeigen, dass es unter den hier gemachten Annahmen stets eine Einheit ε in k giebt, die congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl nach dem Modul 2^2 ausfällt, ohne dass sie das Quadrat einer Einheit in k wird. Der verlangte Klassenkörper Kk ist dann der Körper $K(\sqrt{\varepsilon})$. Der Beweis für die Existenz einer solchen Einheit ε lässt sich durch eine ähnliche Schluss-

weise führen, wie sie im § 9 beim Beweise der Sätze 9a, 9b, 9c angewandt werden wird.

§ 8.

Im weiteren Verlaufe dieser Untersuchung wollen wir für einige andere Fälle die Gesetze der Zerlegung der Primideale des Grundkörpers k im Klassenkörper Kk genau erörtern und die Beweise der aufgestellten Behauptungen erbringen. Es mögen in diesem Paragraphen für den Grundkörper k folgende specielle Annahmen gelten:

1. Unter den m conjugirten Körpern $k, k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ gebe es eine beliebige Anzahl s reeller Körper; es seien dies die Körper $k, k', k'', \ldots, k^{(s-1)}$.

2. Die Anzahl h der Idealklassen des Körpers k, im ursprünglichen weiteren Sinne, stimme mit der im engeren Sinne verstandenen Klassenanzahl $\bar{h}$ überein und sei gleich 2.

Unter diesen Annahmen ist der Klassenkörper Kk relativquadratisch und besitzt folgende Eigenschaften:

Satz 9a. Der Klassenkörper Kk ist unverzweigt in Bezug auf k, d. h. er hat die Relativdiskriminante 1 in Bezug auf k.

Satz 9b. Die Klassenanzahl H und $\bar{H}$ des Klassenkörpers Kk, im weiteren sowie im engeren Sinne verstanden, sind ungerade ($H = \bar{H}$).

Satz 9c. Diejenigen Primideale in k, welche in k Hauptideale sind, zerfallen in Kk in das Product zweier Primideale. Diejenigen Primideale in k, welche in k nicht Hauptideale sind, bleiben in Kk Primideale; sie werden jedoch in Kk Hauptideale.

Von diesen drei Eigenschaften 9a, 9b, 9c charakterisirt jede für sich allein bei unseren Annahmen über den Körper k in eindeutiger Weise den Klassenkörper Kk; wir haben somit die Sätze:

Satz 10a. Es giebt ausser Kk keinen anderen relativquadratischen Körper, der in Bezug auf k unverzweigt ist.

Satz 10b. Wenn ein zu k relativquadratischer Körper eine ungerade Klassenanzahl hat, so stimmt derselbe mit dem Klassenkörper Kk überein.

Satz 10c. Wenn alle Primideale in k, die in k Hauptideale sind, in einem relativquadratischen Körper zerfallen, oder wenn alle Primideale

in k, die in k nicht Hauptideale sind, in einem relativquadratischen Körper Primideale bleiben, so folgt jedesmal, dass dieser relativquadratische Körper kein anderer als der Klassenkörper Kk ist.

§ 9.

Um die Existenz des Klassenkörpers Kk und sodann die Sätze 9a, 9b, 9c zu beweisen, machen wir der Kürze halber die Annahme, dass der Grundkörper k und seine sämmtlichen conjugirten Körper imaginär sind und nennen dann wie in § 3 eine ganze Zahl in k primär, wenn sie zu 2 prim ist und dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 2^2 congruent ausfällt.

Wir bestimmen jetzt ein System von Grundeinheiten in k und bezeichnen dieselben mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}-1}$; ferner sei $\mathfrak{r}$ ein zu 2 primes Primideal des Körpers k, welches nicht der Hauptklasse in k angehört, und es werde $\mathfrak{r}^2 = (\rho)$ gesetzt, wo ρ eine gewisse ganze Zahl in k bedeutet. Fügen wir sodann den obigen $\frac{m}{2} - 1$ Einheiten noch folgende Zahlen hinzu

$$\varepsilon_{\frac{m}{2}} = -1, \qquad \varepsilon_{\frac{m}{2}+1} = \rho,$$

so bilden die $\frac{m}{2} + 1$ Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}$ ein System von Zahlen dieser Beschaffenheit: jede ganze Zahl ξ in k, welche das Quadrat eines Ideals in k ist, lässt sich in der Gestalt

$$\xi = \varepsilon_1^{x_1} \varepsilon_2^{x_2} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}^{x_{\frac{m}{2}+1}} \alpha^2$$

darstellen, wo die Exponenten $x_1, x_2, \ldots, x_{\frac{m}{2}+1}$ gewisse Werthe 0, 1 haben und α eine ganze oder gebrochene Zahl in k bedeutet.

Endlich bestimmen wir mit Hinblick auf Satz 18 meiner Abhandlung ein System von Primidealen $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$ in k, die zu 2 prim sind, so dass

$$(1) \qquad \left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right) = -1, \qquad \left(\frac{\varepsilon_j}{\mathfrak{q}_i}\right) = +1, \qquad (i \neq j)$$
$$\left(i, j = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}+1\right)$$

ausfällt und zu diesen solche Exponenten $w_1, \ldots, w_{\frac{m}{2}+1}$ mit Werthen $0, 1$, dass die Producte

$$\mathfrak{q}_1 \mathfrak{r}^{w_1}, \mathfrak{q}_2 \mathfrak{r}^{w_2}, \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1} \mathfrak{r}^{w_{\frac{m}{2}+1}}$$

Hauptideale in k werden; es sei etwa

$$\mathfrak{q}_1 \mathfrak{r}^{w_1} = (\varkappa_1), \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1} \mathfrak{r}^{w_{\frac{m}{2}+1}} = \left(\varkappa_{\frac{m}{2}+1}\right),$$

wo $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\frac{m}{2}+1}$ gewisse ganze Zahlen in k sind.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir den Ausdruck

$$(2) \qquad \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}^{u_{\frac{m}{2}+1}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}+1}^{v_{\frac{m}{2}+1}};$$

derselbe stellt, wenn man rechter Hand für die Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}+1}$ beliebige Werthe $0, 1$ und für die Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+1}$ irgend welche der Congruenzbedingung

$$(3) \qquad v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_{\frac{m}{2}+1} w_{\frac{m}{2}+1} \equiv 0, \qquad (2)$$

genügende Werthe $0, 1$ nimmt, im Ganzen 2^{m+1} Zahlen dar. Rechnet man jetzt allgemein zwei ganze zu 2 prime Zahlen ω_1, ω_2 in k zu derselben Art, wenn ihr Product $\omega_1 \omega_2$ eine primäre Zahl ist, so lehrt die Betrachtung am Schlusse von § 21 meiner Abhandlung, dass es im Körper k genau 2^m verschiedene Arten von Zahlen giebt und es müssen also unter den Zahlen von der Gestalt (2) nothwendig wenigstens zwei Zahlen vorhanden sein, die derselben Art angehören. Das Product zweier solcher Zahlen ist eine primäre Zahl von der Gestalt

$$(4) \qquad \omega = \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}^{u_{\frac{m}{2}+1}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}+1}^{v_{\frac{m}{2}+1}} \alpha^2,$$

wo die Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}+1}$, $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+1}$ gewisse Werthe $0, 1$ haben aber nicht sämmtlich gleich 0 sind und α eine ganze Zahl in k bedeutet.

Wenn in dem Ausdrucke (4) für die Zahl ω die Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+1}$ sämmtlich sich gleich o herausstellten, so wäre nach Satz 4 und 5 meiner Abhandlung der Körper $K(\sqrt{\omega})$ ein in Bezug auf k unverzweigter relativquadratischer Körper und somit der verlangte Beweis für die Existenz des Klassenkörpers mit der Eigenschaft 9a erbracht.

Wir nehmen nun im Gegentheil an, es habe wenigstens einer der Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+1}$ den Werth 1 und zwar sei t deren genaue Anzahl; es sei etwa $v_{i_1}=1$, $v_{i_2}=1, \ldots, v_{i_t}=1$, wo die Indices $i_1, i_2, \ldots, i_t$ gewisse t Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, \frac{m}{2}+1$ bedeuten. Bei dieser Annahme müssen die t Primideale $\mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{q}_{i_t}$ in der Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt{\omega})$ aufgehen; wegen der Bedingung (3) und da ω primär ist, folgt ferner, dass es ausser diesen t Primidealen kein weiteres giebt, welches in der Relativdiskriminante von $K(\sqrt{\omega})$ enthalten wäre. Die genannten t Primideale des Körpers k werden bez. die Quadrate gewisser t ambiger Primideale des Körpers $K(\sqrt{\omega})$, und die Anzahl aller ambigen Ideale des Körpers $K(\sqrt{\omega})$ fällt daher genau gleich 2^t aus. Auch die weiteren Bezeichnungen des Satzes 22 in § 15 meiner Abhandlung benutzen wir: es möge der Körper k genau 2^{v^*} Einheitenverbände besitzen, die aus Relativnormen von Einheiten in $K(\sqrt{\omega})$ entspringen, und es sei 2^{a^*} die Anzahl der ambigen Klassen, in denen ambige Ideale des Körpers $K(\sqrt{\omega})$ enthalten sind.

Was das Verhalten der Ideale des Körpers k im Körper $K(\sqrt{\omega})$ betrifft, so sind hier die folgenden zwei Fälle möglich:

I. Die Ideale des Körpers k, welche in k nicht Hauptideale sind, werden in $K(\sqrt{\omega})$ Hauptideale.

II. Die Ideale des Körpers k, welche in k nicht Hauptideale sind, werden auch in $K(\sqrt{\omega})$ nicht Hauptideale.

Indem wir das Verfahren, welches ich in meiner Abhandlung beim Beweise des Satzes 22 angewendet habe, auf der Körper $K(\sqrt{\omega})$ übertragen, finden wir leicht im Falle I die Gleichung

$$a^* = t + v^* - \frac{m}{2} \tag{5}$$

und im Falle II die Gleichung

$$a^* = t + v^* - \frac{m}{2} - 1. \tag{6}$$

§ 10.

Wir wollen ferner für die Zahl v^* eine obere von t und m abhängige Grenze ableiten. Zu dem Zweck mögen $x_1, \ldots, x_{\frac{m}{2}}$ irgend welche Exponenten $0, 1$ bedeuten; soll dann die Einheit

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{x_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{x_{\frac{m}{2}}}$$

die Relativnorm einer Einheit in $K(\sqrt{\omega})$ sein, so müssen nothwendig die t Bedingungen

$$(8) \qquad \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{q}_{i_1}}\right) = +1, \ldots, \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{q}_{i_t}}\right) = +1$$

erfüllt sein.

Wir stellen nun der Reihe nach folgende Hülfssätze auf, welche für beide Fälle I, II gelten:

Hülfssatz 1. Jede Einheit ε des Körpers k, die den Bedingungen (7) genügt, ist nothwendig die Relativnorm einer Einheit des Relativkörpers $K(\sqrt{\omega})$.

Zum Beweise dieses Hülfssatzes unterscheiden wir, ob unter den Indices $i_1, \ldots, i_t$ die Zahl $\frac{m}{2}+1$ vorkommt oder nicht. Im ersteren Falle sei $i_t = \frac{m}{2}+1$. Wir schliessen dann aus (7) mit Rücksicht auf (1), dass gewiss die Gleichungen

$$x_{i_1} = 0, \ldots, x_{i_{t-1}} = 0$$

bestehen müssen, und hieraus entnehmen wir, dass die Anzahl v^* der voneinander unabhängigen Einheitenverbände, welche aus den Relativnormen von Einheiten in $K(\sqrt{\omega})$ entspringen, höchstens gleich $\frac{m}{2} - t + 1$ ist.

Kommt andererseits unter den Indices $i_1, \ldots, i_t$ die Zahl $\frac{m}{2}+1$ nicht vor, so schliessen wir auf die nämliche Weise

$$x_{i_1} = 0, \ldots, x_{i_t} = 0$$

und mithin ist die Anzahl v^* der von einander unabhängigen Einheitenverbände, welche aus den Relativnormen von Einheiten in $K(\sqrt{\omega})$ entspringen, in diesem Falle höchstens gleich $\frac{m}{2} - t$.

Wir erkennen leicht, dass im Falle I unter den Indices $i_1, \ldots, i_t$ die Zahl $\frac{m}{2} + 1$ nicht vorkommen kann. Wäre nämlich im Gegentheil das Primideal $\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$ in der Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt{\omega})$ enthalten und bezeichnet P die ganze Zahl in $K(\sqrt{\omega})$, welche das Ideal $\mathfrak{r}$ darstellt, so muss die Relativnorm dieser Zahl P gleich einer Zahl in k von der Gestalt $\varepsilon\rho$ werden, wo ε eine Einheit in k bezeichnet und $\rho = \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}$ die früher festgesetzte Bedeutung hat. Die hieraus folgende Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{\varepsilon\rho}{\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}}\right) = \left(\frac{\varepsilon\,\varepsilon_{\frac{m}{2}+1}}{\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}}\right)$$

steht im Widerspruch mit der in (1) getroffenen Festsetzung für das Primideal $\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$.

Die bisherigen Überlegungen führen im Falle I zu der Ungleichung

$$v^* \leqq \frac{m}{2} - t \tag{8}$$

und im Falle II zu der Ungleichung

$$v^* \leqq \frac{m}{2} - t + 1. \tag{9}$$

Die Gleichungen (5), (6) und die Ungleichungen (8), (9) zeigen, dass in beiden Fällen I und II die Ungleichung $a^* \leqq 0$ gilt und da gewiss auch $a^* \geqq 0$ sein muss, so folgt nothwendig $a^* = 0$, d. h. es ist im Falle I

$$v^* = \frac{m}{2} - t \tag{10}$$

und im Falle II

$$v^* = \frac{m}{2} - t + 1. \tag{11}$$

Nunmehr können wir auch einsehen, dass im Falle II das Primideal $\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$ in der Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt{\omega})$ vorkommen muss. Wäre nämlich im Gegentheil die Zahl $\frac{m}{2}+1$ unter den Indices $i_1, \ldots, i_t$ nicht enthalten, so müsste, wie die vorhin angestellte Überlegung zeigt, die Ungleichung (8) gelten, was der Gleichung (11) widerspricht.

Wir sehen mit Rücksicht hierauf, dass die Einheiten ε in k, welche den Bedingungen (7) genügen, im Falle I genau $\frac{m}{2}-t$ und im Falle II genau $\frac{m}{2}-t+1$ von einander unabhängige Einheitenverbände ausmachen. Da diese Zahl wegen (10), (11) in beiden Fällen I, II gleich v^* ausfällt, so liefern jene Einheiten ε im ganzen 2^{v^*} Einheitenverbände; dieselben müssen daher mit denjenigen Einheitenverbänden übereinstimmen, deren Einheiten Relativnormen von Einheiten in $K(\sqrt{\omega})$ sind, d. h. in beiden Fällen I, II ist jede Einheit ε in k, die den Bedingungen (7) genügt, nothwendig die Relativnorm einer Einheit in $K(\sqrt{\omega})$ und damit ist Hülfssatz 1 bewiesen.

Hülfssatz 2. Wenn $\mathfrak{J}$ ein Ideal in $K(\sqrt{\omega})$ ist, dessen Quadrat einem Ideal in k äquivalent ausfällt, so ist auch $\mathfrak{J}$ stets einem Ideal in k äquivalent.

Beim Beweise verstehen wir unter S die Relativsubstitution $(\sqrt{\omega} : -\sqrt{\omega})$ und unter N die Relativnorm einer Zahl oder eines Ideals in $K(\sqrt{\omega})$. Da die Relativnorm des Ideals $\mathfrak{J}$

$$N(\mathfrak{J}) = \mathfrak{J} \cdot S\mathfrak{J}$$

jedenfalls ein Ideal in k ist und nach Voraussetzung $\mathfrak{J}^2$ einem Ideal in k äquivalent sein soll, so folgt, dass auch der Idealquotient $\frac{\mathfrak{J}}{S\mathfrak{J}}$ einem Ideal $\mathfrak{j}$ in k äquivalent sein muss.

Im Falle I ist $\mathfrak{j}$ gewiss in $K(\sqrt{\omega})$ ein Hauptideal. Wir beweisen andererseits, dass im Falle II das Ideal $\mathfrak{j}$ im Körper k Hauptideal ist. Wäre nämlich $\mathfrak{j}$ in k nicht Hauptideal, so wäre $\mathfrak{j}\mathfrak{r} \sim 1$, wo $\mathfrak{r}$ die früher festgesetzte Bedeutung hat; setzen wir dann

$$\frac{\mathfrak{J}}{S\mathfrak{J}}\mathfrak{r} = A,$$

wo A eine gebrochene Zahl in $K(\sqrt{\omega})$ ist, so folgt offenbar, indem wir auf beiden Seiten die Relativnorm bilden,

$$\varepsilon\rho = N(A), \tag{12}$$

wo ε eine Einheit und $\rho = \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}$ die früher bestimmte Zahl in k bezeichnet. Da das Primideal $\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$ im Falle II in der Relativdiskriminante von $K(\sqrt{\omega})$ vorkommt, so erhalten wir wegen (12) die Gleichung

$$\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_{\frac{m}{2}+1}}{\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}}\right) = +1,$$

und diese widerspricht der in (1) getroffenen Festsetzung für das Primideal $\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$.

Wir haben somit erkannt, dass in beiden Fällen I, II der Idealquotient $\frac{\mathfrak{J}}{S\mathfrak{J}}$ in $K(\sqrt{\omega})$ äquivalent 1 ausfällt; wir setzen demgemäss

$$\frac{\mathfrak{J}}{S\mathfrak{J}} = A, \tag{13}$$

wo A eine ganze oder gebrochene Zahl in $K(\sqrt{\omega})$ ist. Bilden wir dann die Relativnorm

$$\varepsilon = N(A), \tag{14}$$

so ist ε eine Einheit in k, die den Bedingungen (7) genügen muss und diese Einheit ε wird daher nach dem oben bewiesenen Hülfssatz 1 gleich der Relativnorm einer Einheit in $K(\sqrt{\omega})$; wir setzen

$$\varepsilon = N(E^{-1}), \tag{15}$$

wo E eine Einheit in $K(\sqrt{\omega})$ ist. Aus (14) und (15) folgt

$$N(AE) = 1. \tag{16}$$

Setzen wir

$$B = 1 + S(AE),$$

(bez. $B = 1$, wenn etwa $AE = -1$ ist), so wird wegen (16)

$$\frac{SB}{B} = EA \quad (\text{bez.} = 1),$$

und hieraus entnehmen wir mit Rücksicht auf (13) die Gleichung für Ideale

$$\frac{S(B\mathfrak{J})}{B\mathfrak{J}} = 1,$$

d. h. $B\mathfrak{J}$ ist das Product eines ambigen Ideals des Körpers $K(\sqrt{\omega})$ in ein Ideal des Körpers k. Da nun für beide Fälle I, II früher die Gleichung $a^* = 0$ bewiesen worden ist und folglich alle ambigen Ideale in $K(\sqrt{\omega})$ Hauptideale sind, so folgt, dass auch das Ideal $\mathfrak{J}$ einem Ideal des Körpers k äquivalent sein muss. Hiermit ist der Beweis für den Hülfssatz 2 erbracht.

Hülfssatz 3. Wenn $\mathfrak{J}$ irgend ein Ideal in $K(\sqrt{\omega})$ ist, so giebt es stets einen ungeraden Exponenten u, so dass $\mathfrak{J}^u$ einem Ideal in k äquivalent ist.

In der That, ist H die Klassenanzahl des Körpers $K\sqrt{\omega})$ und setzen wir $H = 2^a u$, wo a einen gewissen Exponenten und u eine ungerade Zahl bedeutet, so folgt, dass $\mathfrak{J}^{2^a u} \sim 1$ sein muss und hieraus schliessen wir mit Rücksicht auf Hülfssatz 2 der Reihe nach, dass die Ideale $\mathfrak{J}^{2^{a-1}u}$, $\mathfrak{J}^{2^{a-2}u}$, ..., $\mathfrak{J}^{2u}$, $\mathfrak{J}^u$ gewissen Idealen in k äquivalent ausfallen.

Hülfssatz 4. Wenn $\mathfrak{p}$ ein Primideal des Körpers k bedeutet, für welches

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right) = +1 \tag{17}$$

ausfällt, so ist $\mathfrak{p}$ stets im Körper k ein Hauptideal.

Zum Beweise bedenken wir, dass wegen der Voraussetzung (17) das Primideal $\mathfrak{p}$ im Körper $K(\sqrt{\omega})$ zerlegbar sein muss; wir setzen

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \,.\, S\mathfrak{P},$$

wo $\mathfrak{P}$, $S\mathfrak{P}$ zu einander relativconjugirte Ideale in $K(\sqrt{\omega})$ sind und verstehen dann mit Rücksicht auf Hülfssatz 3 unter u einen solchen ungeraden Potenzexponenten, dass $\mathfrak{P}^u$ einem Ideal $\mathfrak{j}$ in k äquivalent wird. Hieraus folgt offenbar

$$\mathfrak{p}^u \sim \mathfrak{j}^2 \sim 1, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{p} \sim 1.$$

§ 11.

Der gewünschte Nachweis für die Existenz der Klassenkörper mit den Eigenschaften 9a, 9b, 9c gelingt mittelst der folgenden Schlüsse. Wir

wählen an Stelle der in § 9 bestimmten den Bedingungen (1) genügenden Primideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$ irgend $\frac{m}{2}+1$ andere zu 2 prime Primideale $\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_{\frac{m}{2}+1}$ mit den entsprechenden Eigenschaften

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}'_i}\right) = -1, \qquad \left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}'_j}\right) = +1, \qquad (i \neq j)$$

$$\left(i, j = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}+1\right)$$

und wählen wiederum die Exponenten $w'_1, \ldots, w'_{\frac{m}{2}+1}$ in geeigneter Weise so, dass

$$\mathfrak{q}'_1 \mathfrak{r}^{w'_1} = (\varkappa'_1), \ \ldots, \ \mathfrak{q}'_{\frac{m}{2}+1} \mathfrak{r}^{w'_{\frac{m}{2}+1}} = \left(\varkappa'_{\frac{m}{2}+1}\right)$$

und darin $\varkappa'_1, \ldots, \varkappa'_{\frac{m}{2}+1}$ ganze Zahlen in k sind; sodann denken wir uns die sämmtlichen Schlussfolgerungen in § 9—§ 10 für das neue System von Primidealen $\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_{\frac{m}{2}+1}$ wiederholt. Auf diese Weise gelangen wir zu einem Ausdruck

$$\omega' = \varepsilon' \varkappa_1'^{v'_1} \ldots \varkappa'^{v'_{\frac{m}{2}+1}}_{\frac{m}{2}+1}, \tag{18}$$

in dem ε' eine gewisse Einheit in k und $v'_1, \ldots, v'_{\frac{m}{2}+1}$ gewisse Exponenten 0, 1 bedeuten; falls wir wie vorhin annehmen, dass die Exponenten $v'_1, \ldots, v'_{\frac{m}{2}+1}$ nicht sämmtlich gleich 0 ausfallen, folgern wir wiederum für den Körper $K(\sqrt{\omega})$ die Gültigkeit der Hülfssätze 1—4, und entsprechend dem Hülfssatz 4 ist mithin jedes Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers k, für welches

$$\left(\frac{\omega'}{\mathfrak{p}}\right) = +1$$

ausfällt, stets nothwendig ein Hauptideal des Körpers k.

Wir bezeichnen nun kurz mit $\mathfrak{w}_\omega$ alle diejenigen Primideale in k, für welche

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{w}_\omega}\right) = +1$$

ist, und mit $\mathfrak{w}_{\omega\omega'}$ diejenigen Primideale in k für welche zugleich

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{w}_{\omega\omega'}}\right) = -1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\omega'}{\mathfrak{w}_{\omega\omega'}}\right) = +1$$

ausfällt, ferner mit $\mathfrak{w}^{(+)}$ diejenigen Primideale des Körpers k, welche Hauptideale in k sind, dagegen mit $\mathfrak{w}^{(-)}$ diejenigen Primideale des Körpers k, welche nicht Hauptideale in k sind.

Da die Zahlen ω, ω' sicher nicht Quadrate von ganzen Zahlen in k sind und bei unseren Annahmen wegen der Verschiedenheit der Primideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}, \mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_{\frac{m}{2}+1}$ das Nämliche auch für das Produkt $\omega\omega'$ gilt, so folgen aus Satz 17 meiner Abhandlung die Gleichungen

$$(19) \quad \begin{cases} \sum\limits_{(\mathfrak{w}_\omega)} \dfrac{1}{n(\mathfrak{w}_\omega)^s} = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1}{s-1} + f_\omega(s), & (s>1) \\ \sum\limits_{(\mathfrak{w}_{\omega\omega'})} \dfrac{1}{n(\mathfrak{w}_{\omega\omega'})^s} = \dfrac{1}{4}\log\dfrac{1}{s-1} + f_{\omega\omega'}(s); & (s>1) \end{cases}$$

hier sind die unendlichen Summen über alle Primideale $\mathfrak{w}_\omega$ bez. $\mathfrak{w}_{\omega\omega'}$ zu erstrecken und $f_\omega(s)$, $f_{\omega\omega'}(s)$ bedeuten Functionen der reellen Veränderlichen s, welche stets zwischen endlichen Grenzen bleiben, wenn s sich dem Werthe 1 nähert; n bezeichnet stets die Norm im Körper k.

Die Primideale $\mathfrak{w}_\omega$ sind offenbar sämmtlich von den Primidealen $\mathfrak{w}_{\omega\omega'}$ verschieden und da nach dem vorhin Bewiesenen die Primideale $\mathfrak{w}_\omega$, $\mathfrak{w}_{\omega\omega'}$ sämmtlich unter den Primidealen $\mathfrak{w}^{(+)}$ vorkommen, so haben wir

$$\sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} \geqq \sum_{(\mathfrak{w}_\omega)} \frac{1}{n(\mathfrak{w}_\omega)^s} + \sum_{(\mathfrak{w}_{\omega\omega'})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}_{\omega\omega'})^s} \qquad (s>1)$$

und folglich wegen (19)

$$(20) \qquad \sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} \geqq \frac{3}{4}\log\frac{1}{s-1} + f_\omega(s) + f_{\omega\omega'}(s);$$

hier sind die unendlichen Summen wiederum über alle Primideale mit den betreffenden Eigenschaften zu erstrecken.

Die Primideale $\mathfrak{w}^{(+)}$, $\mathfrak{w}^{(-)}$ erschöpfen offenbar die sämmtlichen Primideale $\mathfrak{w}$ in k, und es ist daher

$$(21) \qquad \sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} + \sum_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(-)})^s} = \sum_{(\mathfrak{w})} \frac{1}{n(\mathfrak{w})^s} = \log\frac{1}{s-1} + f(s),$$

wo die Summe $\sum\limits_{(\mathfrak{w})}$ über sämmtliche Primideale $\mathfrak{w}$ in k erstreckt werden soll und $f(s)$ wiederum eine für Werte $s > 1$, die sich dem Werte 1 nähern, zwischen endlichen Grenzen bleibende Grösse bezeichnet. Aus (20) und (21) zusammen folgt die Ungleichung

$$(22) \qquad \sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} - \sum_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(-)})^s} \geqq \frac{1}{2} \log \frac{1}{s-1} + 2f_\omega(s) + 2f_{\omega\omega'}(s) - f(s).$$

Nunmehr stellen wir folgenden Hülfssatz über die Ideale des Körpers k auf:

Hülfssatz 5. Wenn in dem Ausdrucke

$$\sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})} - \sum_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(-)})^s}, \qquad (s>1)$$

die erste Summe über alle Primideale $\mathfrak{w}^{(+)}$ und die zweite Summe über alle Primideale $\mathfrak{w}^{(-)}$ erstreckt wird, so stellt dieselbe eine solche Function der reellen Veränderlichen s dar, welche stets unterhalb einer *positiven* endlichen Grenze bleibt, wenn die reelle Veränderliche s sich der Grenze 1 nähert.

Der Beweis dieses Satzes wird durch die nämliche Schlussweise geführt, wie sie beim Beweise des Satzes 31 in meiner Abhandlung angewandt worden ist.

Wir erkennen, dass die Ungleichung (22) unmittelbar einen Widerspruch gegen den Hülfssatz 5 enthält, und mithin ist unsere ursprüngliche Annahme zu verwerfen, d. h. es müssen in der Gleichung (4) die Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+1}$ oder das zweite Mal in der entsprechenden Gleichung (18) die Exponenten $v'_1, \ldots, v'_{\frac{m}{2}+1}$ sämmtlich 0 sein; in der Zahl ω bez. ω' haben wir also eine Zahl des Körpers k, welche als Ideal das Quadrat eines Ideals in k darstellt, die überdies congruent dem Quadrat einer Zahl in k nach dem Modul 2^2 wird und doch nicht das Quadrat einer Zahl in k ist.

Der Körper $K(\sqrt{\omega})$ bez. $K(\sqrt{\omega'})$ ist der gesuchte Klassenkörper Kk zum Grundkörper k, da er die in Satz 9a ausgesprochene Eigenschaft besitzt. Damit ist die schwierigste Aufgabe in der hier erörterten Theorie gelöst.

§ 12.

Der Beweis für den Satz 9b sowie für die zweite Aussage des Satzes 9c ist aus den bisherigen Entwickelungen leicht zu entnehmen. Nicht so einfach gelingt der Nachweis für die erste Aussage des Satzes 9c, wonach jedes Primideal des Körpers k, das in k der Hauptklasse angehört, im Klassenkörper Kk, der jetzt $K(\sqrt{\omega})$ ist, weiter zerlegbar sein muss. Wir führen diesen Nachweis in folgender Weise:

Nach dem in § 11 Bewiesenen ist die Zahl ω von der Gestalt (4):

$$\omega = \varepsilon_1^{u_1}\varepsilon_2^{u_2}\ldots\varepsilon_{\frac{m}{2}+1}^{u_{\frac{m}{2}+1}},$$

wo die Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}+1}$ gewisse Werthe $0, 1$ haben, aber nicht sämmtlich gleich 0 sind: es sei etwa $u_i = 1$; dann bezeichnen wir die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i+1}, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}}, \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}$ bez. mit $\overset{*}{\varepsilon}_1, \ldots, \overset{*}{\varepsilon}_{\frac{m}{2}}$ und bestimmen $\frac{m}{2}$ von $\mathfrak{r}$ verschiedene Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\frac{m}{2}}$ in k derart, dass

$$\left(\frac{\overset{*}{\varepsilon}_h}{\mathfrak{p}_h}\right) = -1, \qquad \left(\frac{\overset{*}{\varepsilon}_h}{\mathfrak{p}_k}\right) = +1,$$

$$\left(h, k = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}\right)$$

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}_h}\right) = +1, \qquad \left(h = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}\right) \tag{23}$$

wird. Wegen (23) sind nach der zweiten Aussage des Satzes 9c diese Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\frac{m}{2}}$ sämmtlich Hauptideale in k; wir setzen

$$\mathfrak{p}_1 = (\pi_1), \ldots, \mathfrak{p}_{\frac{m}{2}} = \left(\pi_{\frac{m}{2}}\right),$$

wo $\pi_1, \ldots, \pi_{\frac{m}{2}}$ ganze Zahlen in k bedeuten. Nunmehr wollen wir zeigen, dass ein Ausdruck von der Gestalt

$$\omega^* = \overset{*}{\varepsilon}_1^{u_1^*}\ldots\overset{*}{\varepsilon}_{\frac{m}{2}}^{u^*_{\frac{m}{2}}}\pi_1^{v_1}\ldots\pi_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}}, \tag{24}$$

$$\left(u_1^*, \ldots, u^*_{\frac{m}{2}}, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}} = 0, 1\right)$$

nur dann eine primäre Zahl in k darstellen kann, wenn die Exponenten $u_1^*, \ldots, u^*_{\frac{m}{2}}, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$ sämmtlich den Werth 0 haben. In der That, wäre ω^* primär und wenigstens einer dieser Exponenten gleich 1, so beweisen wir wie oben durch Hülfssatz 4, dass alle Primideale in k, welche in $K(\sqrt{\omega^*})$ zerlegbar werden, in k Hauptideale sind, d. h. es müssten dann alle Primideale $\mathfrak{w}$, nach welchen $\mathfrak{w}^*$ quadratischer Rest ist, Hauptideale in k sein. Die Thatsache, dass zugleich auch alle Primideale $\mathfrak{w}$, nach denen ω quadratischer Rest ist, Hauptideale in k sind, führt uns wie früher in § 11 auf einen Widerspruch.

Aus der soeben erkannten Thatsache, dass der Ausdruck (24) ausser der Zahl 1 niemals eine primäre Zahl darstellen kann, ziehen wir leicht durch ein ähnliches Schlussverfahren, wie wir es früher angewandt haben, diese Folgerung: wenn $\varkappa$ eine beliebige zu 2 prime ganze Zahl in k ist, so lässt sich stets ein System von Exponenten $u_1^*, \ldots, u^*_{\frac{m}{2}}, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$ finden derart dass der Ausdruck

$$(25) \qquad \varkappa \varepsilon_1^{u_1^*} \cdots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{u^*_{\frac{m}{2}}} \pi_1^{v_1} \cdots \pi_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}}$$

eine primäre Zahl in k darstellt.

Es sei nun $\mathfrak{q}$ irgend ein Primideal der Hauptklasse in k; wir setzen $\mathfrak{q} = (\varkappa)$, wo $\varkappa$ eine ganze Zahl in k bedeutet und nehmen entgegen der zu beweisenden Behauptung an, es sei $\mathfrak{q}$ in $K(\sqrt{\omega})$ unzerlegbar. Wir bilden für die Zahl $\varkappa$ den Ausdruck (25) und bezeichnen denselben mit α. Endlich bestimmen wir in k ein von $\mathfrak{r}$ verschiedenes Primideal $\bar{\mathfrak{r}}$, welches in k nicht Hauptideal ist, und eine Zahl σ in k, so dass $\sigma = \mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}$ wird; wir setzen $\bar{\omega} = \frac{\omega\sigma^2}{\rho^2}$ oder $\bar{\omega} = \omega$, jenachdem ω den Faktor $\mathfrak{r}^2$ enthält oder nicht.

Da nach Satz 9b der Körper $K(\sqrt{\bar{\omega}})$ eine ungerade Klassenanzahl besitzt, so gilt mit Rücksicht darauf, dass α primär ist, nach dem in meiner Abhandlung für diesen Fall bewiesenen quadratischen Reciprocitätsgesetz die Formel

$$(26) \qquad \left\{\frac{\alpha}{\sqrt{\bar{\omega}}}\right\} = \left\{\frac{\sqrt{\bar{\omega}}}{\alpha}\right\};$$

hierbei habe die geschwungene Klammer für den Körper $K(\sqrt{\bar{\omega}})$ die entsprechende Bedeutung des quadratischen Restcharakters, wie die gewöhnliche

Klammer für den Körper k. Das Hauptideal $\sqrt{\bar{\omega}}$ im Körper $K(\sqrt{\omega})$ ist entweder gleich 1 oder gleich dem Primideal $\mathfrak{r}$. Fällt nun $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\right) = +1$ aus, so ist gewiss auch $\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\right\} = +1$. Ist $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\right) = -1$, so wird wegen $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{r}}\right) = -1$ nothwendig $\left(\frac{\alpha\omega}{\mathfrak{r}}\right) = +1$ und umsomehr $\left\{\frac{\alpha\omega}{\mathfrak{r}}\right\} = +1$. Andererseits ist wegen $\omega = (\sqrt{\bar{\omega}})^2$ nothwendig $\left\{\frac{\omega}{\mathfrak{r}}\right\} = +1$ und folglich auch $\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\right\} = +1$. Wir haben also in jedem Falle gewiss $\left\{\frac{\alpha}{\sqrt{\bar{\omega}}}\right\} = +1$ und wegen (26) folgt hieraus

$$\left\{\frac{\sqrt{\bar{\omega}}}{\alpha}\right\} = +1. \tag{27}$$

Wenn A irgend eine ganze zu $\mathfrak{q}$ prime Zahl in $K(\sqrt{\omega})$ bedeutet, so gelten nach dem Primideal $\mathfrak{q}$ des Körpers k, das auch in $K(\sqrt{\omega})$ Primideal bleiben sollte, folgende Congruenzen

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{q}}\right\} \equiv A^{\frac{n(\mathfrak{q})^2-1}{2}}, \qquad (\mathfrak{q})$$

$$\left(\frac{NA}{\mathfrak{q}}\right) \equiv (NA)^{\frac{n(\mathfrak{q})-1}{2}}, \qquad (\mathfrak{q})$$

und da

$$SA \equiv A^{n(\mathfrak{q})}, \qquad NA \equiv A^{n(\mathfrak{q})+1}, \qquad (\mathfrak{q})$$

ausfällt, so wird mithin

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{q}}\right\} = \left(\frac{NA}{\mathfrak{q}}\right).$$

Nehmen wir insbesondere $A = \sqrt{\bar{\omega}}$, so erhalten wir

$$\left\{\frac{\sqrt{\bar{\omega}}}{\chi}\right\} = \left(\frac{-\bar{\omega}}{\chi}\right). \tag{28}$$

Andererseits ist wegen (23) allgemein das Primideal $\mathfrak{p}_h$ in $K(\sqrt{\bar{\omega}})$ zerlegbar; wir setzen

$$\mathfrak{p}_h = \mathfrak{P}_h \cdot S\mathfrak{P}_h, \qquad \left(h=1,2,\ldots,\tfrac{m}{2}\right)$$

wo $\mathfrak{P}_h$ ein Primideal in $K(\sqrt{\omega})$ bedeutet. Da

$$\left\{\frac{\sqrt{\bar{\omega}}}{\mathfrak{p}_h}\right\} = \left\{\frac{\sqrt{\bar{\omega}}}{\mathfrak{P}_h}\right\}\left\{\frac{\sqrt{\bar{\omega}}}{S\mathfrak{P}_h}\right\}, \qquad \left\{\frac{\sqrt{\bar{\omega}}}{\mathfrak{P}_h}\right\} = \left\{\frac{-\sqrt{\bar{\omega}}}{S\mathfrak{P}_h}\right\}$$

wird, so haben wir

$$(29)\qquad \left\{\frac{\sqrt{\varpi}}{\mathfrak{p}_h}\right\} = \left\{\frac{-1}{\mathfrak{P}_h}\right\} = \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}_h}\right).$$

Wegen (27), (28), (29) ist mit Rücksicht auf die Bedeutung von α

$$\left(\frac{-\varpi}{\varkappa}\right)\left(\frac{-1}{\pi_1}\right)^{e_1}\cdots\left(\frac{-1}{\pi_{\frac{m}{2}}}\right)^{e_{\frac{m}{2}}} = +1$$

und folglich

$$(30)\qquad \left(\frac{-1}{\alpha}\right)\left(\frac{\varpi}{\varkappa}\right) = +1.$$

Da die Zahl α primär ist, d. h. dem Quadrat einer ganzen Zahl in k congruent nach 2^2 ausfällt, so folgt leicht, dass $n(\alpha) \equiv 1$ nach 2^2 und mithin

$$\left(\frac{-1}{\alpha}\right) = (-1)^{\frac{n(\alpha)-1}{2}} = +1$$

sein muss; wir erhalten mithin aus (30) die Gleichung

$$\left(\frac{\varpi}{\varkappa}\right) = +1 \quad \text{und somit auch} \quad \left(\frac{\omega}{\varkappa}\right) = +1,$$

welche der Annahme widerspricht, wonach $\mathfrak{q}$ in k unzerlegbar sein sollte; diese Annahme ist somit als unzutreffend erkannt, d. h. jedes Primideal des Körpers k, welches der Hauptklasse in k angehört, zerfällt in $K(\sqrt{\omega})$ in das Product zweier Primideale, wie Satz 9c in seinem ersten Theile aussagt.

§ 13.

Wir erörtern jetzt die Reciprocitätsgesetze für quadratische Reste im Körper k unter den besonderen Annahmen $h = \bar{h} = 2$, wie sie in § 8 über den Körper k gemacht worden sind. Der erste Ergänzungssatz lässt sich wieder genau wie früher in der Form des Satzes 1 aussprechen, sobald wir dem Begriff »primäres Ideal« die folgende engere Fassung geben: wir nennen in dem zu Grunde gelegten Körper k ein zu 2 primes Ideal $\mathfrak{a}$ dann *primär*, wenn für dasselbe

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right) = +1$$

ausfällt — nicht nur für alle Einheiten ξ, sondern auch für diejenigen ganzen Zahlen ξ in k, die Quadrate von Idealen sind, d. h. wenn

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{a}}\right) = +1, \quad \left(\frac{\varepsilon_2}{\mathfrak{a}}\right) = +1, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\varepsilon_{\frac{m}{2}+1}}{\mathfrak{a}}\right) = +1$$

wird. Indem wir in entsprechender Weise den Begriff eines hyperprimären Ideals in dem zu Grunde liegenden Körper k enger fassen, gilt auch der zweite Ergänzungssatz in der früher aufgestellten Form des Satzes 2 und ebenso auch das allgemeine Reciprocitätsgesetz in der Fassung des Satzes 3.

Um den Beweis für diese Reciprocitätsgesetze zu führen, bedenken wir, dass der Klassenkörper $K(\sqrt{\omega})$ eine ungerade Klassenanzahl hat. Für einen solchen Körper habe ich das Reciprocitätsgesetz in meiner Abhandlung bereits bewiesen. Aus diesem Reciprocitätsgesetz für den Körper $K(\sqrt{\omega})$ gewinnen wir sodann ohne Schwierigkeit durch ein geeignetes Schlussverfahren die eben genannten Reciprocitätsgesetze für den Körper k.

In meiner Abhandlung habe ich unter den in § 3 der vorliegenden Arbeit gemachten Annahmen gezeigt, wie die Idealklassen eines beliebigen in Bezug auf k relativquadratischen Körpers in Geschlechter einzutheilen sind. Unter der gegenwärtigen Annahme $h = \bar{h} = 2$, die wir im § 8 für den Körper k gemacht haben, theilen wir die Idealklassen eines beliebigen relativquadratischen Körpers $K(\sqrt{\mu})$ in Bezug auf k auf folgende Weise in Geschlechter ein. Es sei $\mathfrak{J}$ ein beliebiges Ideal des relativquadratischen Körpers $K(\sqrt{\mu})$. Wir definiren zunächst wie in dem Falle, den meine Abhandlung betrifft, das Charakterensystem einer Zahl des Körpers k. Sodann verstehen wir unter $\mathfrak{r}$ ein bestimmtes zu 2 primes Ideal, welches nicht der Hauptklasse in k angehört, und wählen dann den Exponenten $u = 0, 1$ derart, dass im Körper k das Product der Relativnorm von $\mathfrak{J}$ dem Ideal $\mathfrak{r}^u$ äquivalent wird: es sei etwa

$$N(\mathfrak{J})\mathfrak{r}^u = (\iota),$$

wo ι eine geeignete ganze Zahl in k bedeutet. Endlich bilden wir das Charakterensystem für die Zahl ι und fügen diesem noch die Einheit $(-1)^u$ hinzu. Das so erhaltene System von Einheiten ± 1 heisse das Charakterensystem des Ideals $\mathfrak{J}$. Alle Ideale, die dasselbe Charakterensystem besitzen, bilden ein Geschlecht. *Es gilt wiederum der Fundamen-*

talsatz, dass stets genau die Hälfte aller möglichen Charakterensysteme wirklich durch Geschlechter in $K(\sqrt{\mu})$ vertreten sind.

Wenn für einen Körper k der Werth der Klassenanzahl h im ursprünglichen Sinne und der Klassenanzahl $\bar{h}$ im engeren Sinne zusammenfallen und nicht gleich 2, sondern das Doppelte irgend einer ungeraden Zahl sind, so bedürfen die in § 8—§ 13 ausgesprochenen Sätze nur einer geringen und aus meiner Abhandlung leicht zu entnehmenden Abänderung.

§ 14.

Es möge endlich kurz die Annahme behandelt werden, dass der Grundkörper k die Klassenanzahl $h = \bar{h} = 4$ besitzt; wir haben dann zwei Fälle zu unterscheiden:

A. Es giebt eine Klasse C in k derart, dass C, C^2, C^3, $C^4 = 1$ die 4 Klassen des Körpers k darstellen.

B. Es giebt zwei Klassen C_1, C_2 in k derart, dass $C_1, C_2, C_1C_2 = C_3$, $C_1^2 = C_2^2 = 1$ die 4 Klassen des Körpers k darstellen.

Im Falle A. ist der Klassenkörper Kk des Körpers k relativcyklisch vom Relativgrade 4 in Bezug auf k und weist folgende fundamentale Eigenschaften auf:

Satz 11 a. Der Klassenkörper Kk hat in Bezug auf k die Relativdiskriminante 1.

Satz 11 b. Die Klassenanzahl $H, \bar{H}$ des Klassenkörpers Kk im ursprünglichen bez. im engeren Sinne ist eine ungerade Zahl. Der Klassenkörper Kk besitzt einen und nur einen relativquadratischen Unterkörper UKk. Die Klassenanzahl von UKk ist das Doppelte einer ungeraden Zahl.

Satz 11 c. Diejenigen Primideale in k, welche in k Hauptideale sind, d. h. der Klasse 1 angehören, zerfallen in Kk in das Product von 4 Primidealen. Diejenigen Primideale in k, welche der Klasse C^2 angehören, zerfallen in UKk in das Product zweier solcher Primideale, die im Körper Kk unzerlegbar bleiben. Diejenigen Primideale in k, welche der Klasse C oder C^3 angehören, bleiben in Kk unzerlegbar; sämtliche Ideale in k werden in Kk Hauptideale.

Von diesen 3 Eigenschaften 11 a, 11 b, 11 c charakterisirt jede für sich allein bei unserer Annahme über den Körper k in eindeutiger Weise den Klassenkörper Kk; wir haben somit insbesondere folgende Sätze:

Satz 12a. Wenn ein relativquadratischer Körper die Relativdiskriminante 1 in Bezug auf k besitzt, so stimmt derselbe mit UKk überein. Wenn ein relativ-Abel'scher Körper vom Relativgrade 4 in Bezug auf k die Relativdiskriminante 1 besitzt, so stimmt er mit Kk überein.

Satz 12b. Wenn ein relativquadratischer Körper in Bezug auf k eine Klassenanzahl besitzt, die das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, so stimmt dieser Körper mit UKk überein.

Satz 12c. Wenn ein relativ-Abel'scher Körper vom Relativgrade 4 in Bezug auf k eine ungerade Klassenanzahl besitzt, so stimmt er mit Kk überein.

Im Falle B. ist der Klassenkörper Kk des Körpers k relativ-Abel'sch vom Relativgrade 4 und weist folgende fundamentale Eigenschaften auf:

Satz 13a. Der Klassenkörper Kk hat in Bezug auf k die Relativdiskriminante 1.

Satz 13b. Die Klassenanzahl des Körpers Kk ist ungerade. Der Klassenkörper Kk besitzt drei relativquadratische Unterkörper UKk_1, UKk_2, UKk_3 in Bezug auf k. Die Klassenanzahl eines jeden dieser drei Unterkörper ist gleich dem Doppelten einer ungeraden Zahl.

Satz 13c. Diejenigen Primideale in k, welche in k Hauptideale sind, d. h. der Klasse 1 angehören, zerfallen in Kk in das Product von vier Primidealen. Diejenigen Primideale in k, welche der Klasse C_1 angehören, zerfallen in einem jener drei Unterkörper, etwa in UKk_1, in das Product von zwei Primidealen und sind in jedem der beiden anderen Unterkörper, also in UKk_2, UKk_3 unzerlegbar. Diejenigen Primideale in k, welche der Klasse C_2 bez. C_3 angehören, zerfallen etwa in UKk_2 bez. UKk_3 in das Product von zwei Primidealen und sind in UKk_1, UKk_3 bez. in UKk_1, UKk_2 unzerlegbar. *Sämtliche Ideale des Körpers k werden in jedem der drei relativquadratischen Körper UKk_1, UKk_2, UKk_3 Hauptideale.*

Von diesen Eigenschaften charakterisirt wiederum jede für sich vollständig den Klassenkörper Kk und die drei Unterkörper UKk_1, UKk_2, UKk_3.

Die eben aufgestellten Sätze 11a, 11b, 11c, 12a, 12b, 12c, 13a, 13b, 13c bestätigen, wie wir leicht erkennen, unter der gegenwärtigen Annahme $h = \bar{h} = 4$ sowohl im Falle A. wie im Falle B. die Gültigkeit der weiter unten in § 16 aufgestellten allgemeinen Sätze 14 und 15.

Zum Beweise der Sätze 11, 12, 13 ist vor Allem nöthig, zu zeigen,

dass für den Grundkörper k bei der gemachten Annahme stets wenigstens ein relativquadratischer Körper mit der Relativdiskriminante 1 existirt. Sodann hat man in Bezug auf diesen noch einen weiteren relativquadratischen Körper mit der Relativdiskriminante 1 zu construiren, was auf Grund des schon bewiesenen Satzes 9a stets möglich ist.

Wenn für einen Körper k der gemeinsame Werth der Klassenanzahl h im ursprünglichen Sinne und der Klassenanzahl $\bar{h}$ im engeren Sinne nicht gleich 4, sondern das Vierfache irgend einer ungeraden Zahl ist, so bedürfen die hier ausgesprochenen Sätze nur einer geringen und aus meiner Abhandlung leicht zu entnehmenden Abänderung.

§ 15.

Die im Vorstehenden bewiesenen und im folgenden Paragraph (§ 16) allgemein ausgesprochenen Sätze zeigen, dass für die vollständige Untersuchung der arithmetischen Eigenschaften eines beliebig vorgelegten Grundkörpers k vor Allem die Kenntniss des zu k gehörigen Klassenkörpers Kk erforderlich ist. Unsere Entwickelungen setzen uns in den Stand, in jedem besonderen Falle auf arithmetischem Wege den Klassenkörper Kk wirklich zu finden. Im Folgenden wollen wir auf eine transcendente Bestimmungsweise des Klassenkörpers hinweisen, die der bekannten von Dirichlet ersonnenen Methode der transcendenten Bestimmung der Klassenanzahl entspricht.

Wir machen für den Grundkörper k die besondere Annahme $h = \bar{h} = 2$ und bezeichnen mit $\varkappa$ die in meinem Berichte *Über die Theorie der algebraischen Zahlkörper*[1] im § 24 definirte, dem Körper k eigenthümliche Zahl; ferner mögen H die Klassenanzahl des Klassenkörpers Kk und K die entsprechend definirte Zahl für den Klassenkörper Kk bezeichnen: dann gilt die folgende Formel

$$(31)\qquad \underset{s=1}{\mathrm{L}}\left\{\sum_{(\mathfrak{j}^{(+)})}\frac{1}{n(\mathfrak{j}^{(+)})^s}-\sum_{(\mathfrak{j}^{(-)})}\frac{1}{n(\mathfrak{j}^{(-)})^s}\right\}=\frac{H\mathsf{K}}{h\varkappa}, \qquad (s>1)$$

worin die Summe $\sum\limits_{(\mathfrak{j}^{(+)})}$ über alle Hauptideale $\mathfrak{j}^{(+)}$ in k und die Summe $\sum\limits_{(\mathfrak{j}^{(-)})}$

[1] Vgl. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung IV, 1894—95, S. 229.

über alle diejenigen Ideale $\mathfrak{j}^{(-)}$ erstreckt werden soll, die nicht Hauptideale in k sind. Der Ausdruck K enthält in gewisser Weise die Logarithmen der Einheiten des Klassenkörpers Kk, so dass durch denselben die erwünschte Bestimmung des Klassenkörpers ermöglicht ist.

Zum Beweise der Formel (31) betrachten wir das Product

$$\zeta(s) = \prod_{(\mathfrak{w})} \frac{1}{1 - n(\mathfrak{w})^{-s}}, \tag{32}$$

in welchem $\mathfrak{w}$ alle Primideale des Körpers k durchläuft; dasselbe convergirt für reelle Werthe von $s > 1$ und es ist

$$\underset{s=1}{\mathrm{L}} \{(s-1)\zeta(s)\} = h\varkappa. \tag{33}$$

Das entsprechende Product für den Körper Kk lautet

$$Z(s) = \prod_{(\mathfrak{W})} \frac{1}{1 - nN(\mathfrak{W})^{-s}}, \qquad (s>1)$$

wo rechter Hand $\mathfrak{W}$ alle Primideale von Kk durchläuft und nN die Norm der Relativnorm von $\mathfrak{W}$ in k, d. h. die Norm in Kk bedeutet. Es ist dann

$$\underset{s=1}{\mathrm{L}} \{(s-1)Z(s)\} = H\mathsf{K}. \tag{34}$$

Wir unterscheiden nun unter den Primidealen $\mathfrak{W}$ diejenigen die durch Zerlegung irgend eines Primideals in k entstehen, und diejenigen, die Primideale in k sind. Wegen Satz 9c fällt für die ersteren $N(\mathfrak{W})$ gleich einem Primideal $\mathfrak{w}^{(+)}$ der Hauptklasse in k aus; für die letzteren dagegen ist $N(\mathfrak{W})$ gleich dem Quadrat eines Primideals $\mathfrak{w}^{(-)}$ in k, welches nicht der Hauptklasse in k angehört. Mit Rücksicht hierauf wird

$$Z(s) = \prod_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{(1 - n(\mathfrak{w}^{(+)})^{-s})^2} \prod_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{1 - n(\mathfrak{w}^{(-)})^{-2s}}$$

und hieraus folgt wegen (32)

$$\frac{Z(s)}{\zeta(s)} = \prod_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{1 - n(\mathfrak{w}^{(+)})^{-s}} \prod_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{1 + n(\mathfrak{w}^{(-)})^{-s}} = \sum_{(\mathfrak{j}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{j}^{(+)})^s} - \sum_{(\mathfrak{j}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{j}^{(-)})^s};$$

diese Gleichung liefert, wenn wir zur Grenze $s = 1$ übergehen, mit Rücksicht auf (33), (34) den verlangten Beweis der Formel (31).

§ 16.

Es sei endlich k ein völlig beliebiger Zahlkörper. Wir treffen folgende Festsetzungen, in denen gar keine beschränkende Annahme für k liegt:

1. Unter den m conjugirten Körpern $k, k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ gebe es eine beliebige Anzahl s reeller Körper; es seien dies die Körper $k, k', k'', \ldots, k^{(s-1)}$.

2. Die Anzahl der Idealklassen des Körpers k, im engeren Sinne verstanden, sei eine beliebige Zahl $\bar{h}$.

Ein in Bezug auf k relativ-Abel'scher Körper K heisse *unverzweigt*, wenn die Relativdiskriminante von K in Bezug auf k gleich 1 ausfällt, oder, was das Nämliche bedeutet, wenn es in k kein Primideal giebt, das durch das Quadrat eines Primideals in K theilbar wird. Wir stellen dann folgende Theoreme auf, die im Vorstehenden für gewisse besondere Fälle bewiesen worden sind, deren vollständiger Beweis jedoch, wie ich überzeugt bin, auf Grund der von mir angegebenen Methoden gelingen muss:

Satz 14. *Es giebt in Bezug auf k stets einen völlig bestimmten relativ-Abel'schen unverzweigten Körper Kk vom Relativgrade $\bar{h}$; dieser Körper Kk heisse der Klassenkörper von k. Der Klassenkörper Kk enthält sämmtliche in Bezug auf k relativ-Abel'schen unverzweigten Körper als Unterkörper.*

Die Relativgruppe des Klassenkörpers Kk ist mit derjenigen Abel'schen Gruppe holoedrisch isomorph, die durch die Zusammensetzung der Idealklassen in k bestimmt wird. [1]

Diejenigen Primideale $\mathfrak{p}$ des Körpers k, welche der nämlichen Idealklasse von k, im engeren Sinne verstanden, angehören, erfahren im Klassenkörper Kk eine Zerlegung in Primideale der nämlichen Anzahl und der nämlichen Grade, so dass die weitere Zerlegung eines Primideals $\mathfrak{p}$ des Körpers k im Körper K nur von der Klasse abhängt, der das Primideal $\mathfrak{p}$ im Körper k angehört.

[1] Man vergleiche hierzu die Untersuchungen von H. WEBER, *Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern*, Mathematische Annalen, Bd. 48, S. 433 und Bd. 49, S. 83.

Definition 7. Eine ganze Zahl A des Klassenkörpers Kk heisse eine *Ambige* dieses Körpers Kk, wenn sie die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

a) Die ganze Zahl A sei total positiv (Vgl. Definition 5); d. h. das durch A dargestellte Ideal gehöre auch im engeren Sinne der Hauptklasse in k an.

b) Jede zu A relativconjugirte Zahl soll sich von A nur um einen Factor unterscheiden, welcher eine Einheit in Kk ist.

Eine Ambige heisse eine *Primambige*, wenn sie nicht eine Einheit ist und sich nicht als ein Product von zwei Ambigen darstellen lässt, von denen keine eine Einheit ist.

Satz 15. *Jede Ambige des Klassenkörpers Kk stellt ein Ideal des Grundkörpers k dar und umgekehrt jedes Ideal des Grundkörpers k lässt sich durch eine Ambige des Klassenkörpers Kk darstellen; diese ist abgesehen von einem Einheitsfactor durch jenes Ideal bestimmt.*

Jede Ambige des Klassenkörpers Kk ist mithin auf eine und nur auf eine Weise in ein Product von Primambigen zerlegbar, wenn man dabei von der Willkür der auftretenden Einheitsfactoren absieht.

Die in diesem Satze aufgestellte Eigenschaft kommt unter allen relativ-Abel'schen Körpern in Bezug auf k allein dem Klassenkörper Kk zu.

Das allgemeinste Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste drückt sich auch in dem beliebigen Körper k durch die Formel des Satzes 7 aus. Auch das Reciprocitätsgesetz für höhere Potenzreste gestattet eine ebenso einfache und allgemeingültige Fassung.[1]

Endlich sei noch bemerkt, dass die gehörige Verallgemeinerung dieser Entwickelungen zur Begründung einer Theorie der »Ringklassenkörper« führt, d. h. solcher relativ-Abel'scher Körper in Bezug auf k, die zu den Idealklassen eines Ringes in k in einem entsprechenden engen Zusammenhange stehen, wie der hier behandelte Klassenkörper Kk zu den gewöhnlichen Idealklassen des Körpers k.

---

[1] Vgl. die Preisaufgabe der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen für das Jahr 1901. Mathematische Annalen, Bd. 51, S. 159. Die preisgekrönte Arbeit von FURTWÄNGLER erscheint demnächst in den Abhandlungen der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen.

ÜBER EINIGE PROBLEME IN DER THEORIE DER ABEL'SCHEN FUNCTIONEN

VON

WILHELM WIRTINGER

in INNSBRUCK

Die vielen Anregungen, welche aus dem nach ABEL benannten Theorem hervorgegangen sind, erstrecken sich auf das ganze Gebiet der heutigen Algebra und Functionentheorie und, in Verbindung damit, auch der Geometrie und anderer Zweige der mathematischen Wissenschaften. Und doch ist die Bedeutung dieses Satzes noch nicht erschöpft. Ja es scheint, dass wir erst an denjenigen Functionen von mehr als einer Variablen, die uns allein genauer bekannt sind, den ABEL'schen, die Gesichtspunkte und Methoden inductiv erkennen müssen, welche uns den Weg zu einer ebenso eingehenden Erkenntniss dieser Gegenstände der Analysis zeigen, wie wir sie für eine Variable besitzen.

Schon JACOBI hatte bemerkt, dass die zur Darstellung der ABEL'schen Functionen führenden Thetareihen von selbst auf allgemeinere mehrfach periodische Functionen führen, als sie durch die Lösung des nach ihm benannten Umkehrproblems gegeben werden. RIEMANN und WEIERSTRASS haben die Theorie der so erklärten mehrfach periodischen Functionen eingehenden Studien unterworfen, jedoch leider nur einige wenige grundlegende Sätze, ohne Beweis veröffentlicht. Nur der Satz, dass eine endlich-vieldeutige analytische Function von n Variablen nicht mehr als $2n$ unabhängige Periodensysteme haben kann, ist auch mit seinem Beweis uns von beiden Forschern überliefert.

Über die Beziehungen dieser allgemeinen Functionen zur Theorie der algebraischen besitzen wir von WEIERSTRASS nur die kurzen Andeutungen

in den Berliner Berichten von 1869. Gerade diese Fragen aber waren es, die der Gegenstand meiner Bemühungen gewesen sind. Die Resultate, welche ich erreicht habe, geben für sich einen gewissen Abschluss und ich rechne es mir zur Ehre an, dass sie sich in einigen Punkten mit den auf ganz verschiedenem Wege erlangten eines so ausgezeichneten Mathematikers, wie Herrn Poincaré, berühren. Sie ergeben aber auch neue Gesichtspunkte für die überlieferte Theorie der Abel'schen Functionen von 2, 3, 4 Variablen, sowie überhaupt neue Problemstellungen für die zu einem algebraischen Gebilde erster Stufe gehörigen Abel'schen Functionen und Integrale.

Da aber diese Untersuchungen zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Stellen nicht immer unter ausdrücklicher Betonung des innern Zusammenhanges publiciert sind, so glaubte ich der ehrenden Einladung des Herrn Herausgebers folgen zu dürfen, eine Übersicht derselben an dieser dem Andenken Abel's gewidmeten Stelle vorzulegen. Ich bin dabei auch nach zwei Richtungen weiter gegangen, und habe zwei Probleme näher erörtert, bei denen ich über die Problemstellung nicht hinausgekommen bin, die mir aber bei der grossen Schwierigkeit und Bedeutung, welche ihnen innewohnt, doch nicht ohne Interesse zu sein scheinen.

1. *Die allgemeinen $2n$-fach periodischen Functionen von n Variablen.*

Den Ausgangspunkt der Theorie der eindeutigen $2n$-fach periodischen Functionen bilden die folgenden drei Sätze:

1) Sollen überhaupt solche Functionen existieren, welche im Endlichen durchaus den Charakter von rationalen haben, so müssen zwischen den Perioden gewisse Bilinearrelationen bestehen, deren Coefficienten ganze Zahlen sind.

2) Zwischen $n + 1$ solchen Functionen besteht dann eine algebraische Gleichung.

3) Alle Functionen dieser Art mit demselben Periodensystem sind rational durch geeignete $n + 1$ unter ihnen darstellbar.

Von den beiden ersten Sätzen ist jeder eine unmittelbare Folge des andern und diesen Zusammenhang haben Picard und Poincaré auseinandergesetzt. Die Beweise von Appell für zwei Variable und der spätere von Poincaré fussen wesentlich auf der Theorie der eindeutigen Functionen

mehrerer Variablen. Ich selbst suchte den Beweis zu gewinnen, indem ich von vornherein die Beziehungen zur Theorie der Abel'schen Integrale an die Spitze stelle, und bewies, *dass wenn auch nur eine einzige solche Function existirt, welche im endlichen durchaus den Charakter einer rationalen hat, dass es dann auch immer unendlich viele algebraische Gebilde erster Stufe giebt, unter deren Integralen erster Gattung sich n linear unabhängige befinden, deren Perioden sich aus den vorgelegten Perioden linear und ganzzahlig zusammensetzen lassen.*[1] Aus der Bilinearrelation zwischen den Perioden der Abel'schen Integrale folgt dann sofort die Existenz einer Bilinearrelation zwischen den vorgelegten Perioden und aus der Substitution von Summen von n solchen Integralen in die $2n$-fach periodischen Functionen deren Darstellbarkeit als algebraische, symmetrische Functionen von n Veränderlichen, und damit der zweite Satz. Dass man umgekehrt aus dem Erfülltsein der Bilinearrelationen und einer zugehörigen Ungleichung auf die Existenz von $2n$-fach periodischen Functionen der verlangten Beschaffenheit schliessen darf, geht dann aus den Untersuchungen von Frobenius[2] über allgemeine Jacobi'sche Functionen hervor.

Die Methode der Beweisführung hat sich dann auch später bei der Herleitung ähnlicher Sätze für die automorphen Functionen mehrerer Variablen[3] erfolgreich gezeigt, und ist auch noch weiterer Anwendungen fähig.

2. *Die Bilinearrelationen vom Standpunkt einer allgemeinen Theorie der Functionen mehrerer Variablen.*

Es ist nun nöthig auf den Inhalt der Bilinearrelationen näher einzugehen. Seien $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ die n Variablen, und seien die $2n$ Perioden der Variablen x_i bezeichnet mit ω_{ik} $(k = 1, \ldots, n)$. Die in Rede stehenden Relationen, $\frac{n(n-1)}{2}$ an der Zahl, lauten dann

$$(1) \qquad \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}(\omega_{i\alpha}\omega_{h\beta} - \omega_{i\beta}\omega_{h\alpha}) = 0 \qquad (\alpha > \beta;\ \alpha, \beta = 1 \ldots 2n)$$

wo die $c_{\alpha,\beta}$ ganze Zahlen bedeuten. Ich habe in der angeführten Ab

[1] Wiener Monatshefte, II, 1895.

[2] Journal für Mathematik, Bd. 97, 1884.

[3] Wiener Sitz.-ber. 1899. Abt. II a. November.

handlung gezeigt, dass man die zugehörigen Functionen algebraisch auf solche zurückführen kann, für welche die Bilinearrelationen dieselbe Gestalt wie in der Theorie der Abel'schen Integrale haben, nämlich

$$(2)\qquad \sum_{\alpha=1}^{n} (\omega_{i\alpha}\omega_{h,n+\alpha} - \omega_{h\alpha}\omega_{i,n+\alpha}) = 0$$

und wir wollen daher die folgenden Betrachtungen an diese Form der Relationen knüpfen.

Spaltet man die Variablen und die Perioden in ihre reellen und imaginären Bestandtheile und setzt also

$$x_h = y_{2h-1} + iy_{2h}, \qquad \omega_{h,k} = \eta_{2h-1,k} + i\eta_{2h,k}$$

so kann man die $2n$ Grössen y als gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten eines Punktes im Raum von $2n$ Dimensionen auffassen. Der Gesammtheit der Grössen

$$\sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \eta_{l,k} \qquad (l = 1 \ldots 2n, \ 0 \leqq \lambda_k < 1)$$

entspricht dann ein $2n$-fach ausgedehntes Gebiet, welches dem Periodenparallelogramm in der Theorie der elliptischen Functionen völlig analog ist und als Periodenparallelotop bezeichnet werden soll.

Jedes Werthesystem der y ist dann einem und nur einem Werthesystem im Innern oder an der Grenze dieses Parallelotopes nach den Perioden congruent. Die Bilinearrelationen sagen dann aus, dass ein solches Parallelotop durchaus nicht willkürlich angenommen werden darf, wenn es zugehörige $2n$-fach periodische Functionen der hier betrachteten Art geben soll. Würde man also im Sinne der Riemann'schen Functionentheorie ein solches Parallelotop als Fundamentalbereich auffassen wollen, so wären dazu nur solche Parallelotope brauchbar, welche bestimmten Relationen arithmetischen Charakters, eben den Relationen 1) oder 2) genügen würden. Dieser Umstand ist nun äusserst überraschend, und würde, wenn diese Erscheinung nicht auch unter einem andern Gesichtspunkt aufgefasst werden könnte, jede Hoffnung, die schöne und weittragende Auffassung Riemann's auf mehr als eine Variable zu übertragen, gänzlich zerstören. In der That, wir würden dann zu erwarten haben, dass jedesmal, wo wir vor einem Fundamentalbereich stehen, es von erst zu erforschenden arithmetischen Eigenschaften desselben abhängen würde, ob überhaupt zu diesem Bereich

gehörige Functionen existiren. Aber auch nach anderer Richtung wäre das Ergebnis dieser Überlegung entmuthigend. Die schöne und fruchtbare Verbindung zwischen elliptischen Functionen und quadratischen Formen, die ihren augenfälligen Ausdruck in der doppelten Auffassung eines parallelogrammatischen Punktgitters als eines Systems von Periodenparallelogrammen und als Repräsentant einer bestimmten Classe von quadratischen Formen findet, würde für mehr als eine Variable nur bei ganz beschränkten Formenclassen und für ganz beschränkte Parallelotope möglich sein.

Man kann der Ansicht sein, dass diese Gründe hinreichend sind, um die erwähnten Auffassungen, welche im Gebiete einer Variablen sich so fruchtbar gezeigt haben, zu verlassen und diese wenigstens für das Gebiet von mehr Variablen nicht mehr als naturgemäss anzusehen. Aber eine genauere Überlegung zeigt, dass noch ein Ausweg möglich ist. Bedenkt man nämlich, dass bei Angabe eines Fundamentalbereiches im Gebiete einer Variablen auch noch eine Massbestimmung gegeben sein muss, um für diesen Bereich die partiellen Differentialgleichungen der reellen und imaginären Theile der zugehörigen Functionen aufzustellen und zu discutiren, und sucht man diesen Gesichtspunkt auf mehr als eine Variable zu übertragen, so bemerkt man sofort, dass eine Massbestimmung allein, wie sie durch Zuordnung einer quadratischen Differentialform gegeben wird, nicht ausreicht, sondern dass noch weitere Angaben hinzutreten müssen, deren allgemeine analytische Formulirung mir vielleicht bei anderer Gelegenheit auseinanderzusetzen vergönnt ist. Im vorliegenden Fall lassen sich dieselben einfach und direct bezeichnen. Wenn nämlich einzig und allein ein Parallelotop gegeben ist mit einer gewöhnlichen euclidischen Massbestimmung, so ist dadurch noch in keiner Weise gesagt, welche Richtungen gerade diejenigen Coordinatenaxen haben müssen, welche wir zur Beziehung des Bereiches auf den $2n$-fach ausgedehnten Bereich von n complexen Veränderlichen wählen müssen, und wenn auch diese gegeben sind, in welcher Weise wir sie zu Paaren vereiniger müssen um complexe Variable zu bekommen. Im Gebiete einer complexen Variablen tritt diese Frage desshalb zurück, weil hier jede orthogonale Transformation des Coordinatensystems auch zu einer von der erstgewählten linear analytisch abhängigen Variablen führt. Das ist nun bei mehreren complexen Variablen keineswegs der Fall. Ist also irgend ein Parallelotop gegeben, mit gewöhnlicher euclidischer Massbestimmung, also analytisch durch Beziehung auf ein bestimmtes gewöhnliches Car-

tesisches Coordinatensystem, so entsteht die Frage ob man nicht durch passende Wahl eines andern Coordinatensystems das Parallelotop so darstellen kann, dass, wenn dieses neue System zur Beziehung der Punkte des Parallelotops auf das periodisch sich wiederholende Gebiet von n complexen Veränderlichen benützt wird, dieses letztere dann die Bilinearrelationen erfüllt. Das ist aber in der That möglich, wie sogleich gezeigt werden soll.

Bezeichnen wir nämlich wie früher mit $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ die n complexen Veränderlichen, zerlegen jede in ihren reellen und imaginären Bestandtheil, und verfahren ebenso mit den Perioden, so kommt unsere Frage darauf hinaus, eine ortogonale Substitution $(\alpha_{\lambda\mu})$ in den y anzugeben, so dass die transformirten Grössen

$$(1)\quad \begin{aligned} y'_k &= \sum_{\lambda=1}^{2n} \alpha_{k\lambda} y_\lambda, \\ \eta'_{\mu k} &= \sum_{\lambda=1}^{2n} \alpha_{\mu\lambda}\eta_{\lambda k}, \qquad \omega'_{hk} = \eta'_{2h-1,k} + i\eta'_{2h,k} = \sum_{\lambda=1}^{2n} (\alpha_{2h-1,\lambda} + i\alpha_{2h,\lambda})\eta_{\lambda k} \end{aligned}$$

die Relationen

$$(2)\quad \sum_{k=1}^{n} (\omega'_{\gamma,k}\omega'_{\delta,n+k} - \omega'_{\delta k}\omega'_{\gamma,n+k}) = 0$$

erfüllen.

Setzt man die Werte aus (1) in (2) ein, so erhält man

$$(3)\quad \sum_{\mu=1}^{2n}\sum_{\lambda=1}^{2n} (\alpha_{2\gamma-1,\lambda} + i\alpha_{2\gamma,\lambda})(\alpha_{2\delta-1,\mu} + i\alpha_{2\delta,\mu}) \sum_{k=1}^{n} (\eta_{\lambda,k}\eta_{\mu,n+k} - \eta_{\mu,k}\eta_{\lambda,n+k}) = 0.$$

Oder wenn man die Bezeichung einführt:

$$\sum_{k=1}^{n} (\eta_{\lambda k}\eta_{\mu,n+k} - \eta_{\mu,k}\eta_{\lambda,n+k}) = p_{\lambda,\mu} = -p_{\mu,\lambda}$$

und (3) in den reellen und imaginären Theil spaltet:

$$(4)\quad \begin{aligned} \sum_{\lambda,\mu=1}^{2n} (\alpha_{2\gamma-1,\lambda}\alpha_{2\delta-1,\mu} - \alpha_{2\delta,\mu}\alpha_{2\gamma,\lambda}) p_{\lambda,\mu} &= 0, \\ \sum_{\lambda,\mu=1}^{2n} (\alpha_{2\gamma-1,\lambda}\alpha_{2\delta,\mu} + \alpha_{2\gamma,\lambda}\alpha_{2\delta-1,\mu}) p_{\lambda,\mu} &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man weiter

$$(5)\quad \sum_{\lambda,\mu=1}^{2n} \alpha_{h\lambda}\alpha_{k\mu} p_{\lambda\mu} = P_{h,k} = -P_{k,h}$$

so besagen die Gleichungen (4)

$$
(6)\qquad \begin{aligned} P_{2\gamma-1,2\delta-1} &= P_{2\gamma,2\delta},\\ P_{2\gamma-1,2\delta} &= -P_{2\gamma,2\delta-1}. \end{aligned}
$$

Bezeichnet man daher mit X_h, Y_k zwei Reihen cogredienter Variabler und setzt

$$
(7)\qquad U_\lambda = \sum_{h=1}^{2n} X_h \alpha_{h\lambda}, \qquad V_\mu = \sum_{k=1}^{2n} Y_k \alpha_{k\mu}
$$

so ergeben die Gleichungen (5) nach Multiplication mit $X_h Y_k$ und Summation über alle Werte h, k

$$
(8)\qquad \sum_{\lambda,\mu=1}^{2n} p_{\lambda,\mu} U_\lambda V_\mu = \sum_{h,k=1}^{2n} P_{h,k} X_h Y_k.
$$

Wenn es also gelingt, die durch die $p_{\lambda,\mu}$ gegebene alternirende Bilinearform links in (8) durch eine orthogonale Transformation in die rechte Seite überzuführen, wobei die $P_{h,k}$ an die Bedingungen (6) gebunden sind, so ist das System der Coefficienten dieser Substitution $(\alpha_{\lambda\mu})$ ein solches, welches das ursprüngliche Coordinatensystem in ein neues überführt, und auf dieses System bezogen, also auf die complexen Veränderlichen $y'_{2h-1} + iy'_{2h}$, hat dann unser gegebenes Parallelotop die Eigenschaft, die Bilinearrelationen zu erfüllen, und bestimmt daher ein System $2n$-fach periodischer Functionen.

Eine solche orthogonale Substitution giebt es aber immer, denn wir können die Bilinearform links in (8) durch eine orthogonale Transformation auf ihre Normalform bringen [1] und diese schreiben

$$
(9)\qquad \sum_{\lambda,\mu=1}^{2n} p_{\lambda\mu} U_\lambda V_\mu = \sum_{\gamma=1}^{n} (X_{2\gamma-1} Y_{2\gamma} - X_{2\gamma} Y_{2\gamma-1}) a_\gamma.
$$

Die Relationen (6) sind hier erfüllt, es giebt also eine orthogonale Substitution von der verlangten Beschaffenheit.

Man kann also ein beliebig gegebenes Parallelotop als Fundamentalbereich eines Systems 2n-fach periodischer Functionen auffassen, wenn man nur die

---

[1] R. Lipschitz, Berl. Ber. 1890, I. pg 514 ff. Die dort benutzten Grössen $\beta_m^{(l)}$ sind complex ebenso wie die Variablen η_l, ζ_{-l}. Doch giebt eine einfache Rechnung, dass man auch nach Zerlegung in den reellen und imaginären Bestandtheil sowohl der $\beta_m^{(l)}$ als auch der η, ζ eine reelle orthogonale Substitution erhält.

complexen Variablen entsprechend darin orientirt, und zwar ohne an der Massbestimmung des Gebietes etwas zu ändern.

Ob es möglich ist, diese Wahl der complexen Variablen noch auf von der angegebenen wesentlich verschiedene Arten zu treffen, oder ob alle diese durch lineare Transformation der complexen Variablen aus einander hervorgehen ist eine sehr interessante Frage, ebenso welche Beziehungen eventuell zwischen den zu einem und demselben Parallelotop gehörigen Functionen bestehen. Damit ist auch gezeigt, dass man einer definiten quadratischen Form immer wenigstens ein System $2n$-fach periodischer Functionen zuordnen kann, wenn man eine solche Form als ein Punktgitter interpretirt, natürlich bei gerader Anzahl der Variablen der Form.

3. *Die mehrdeutigen Umkehrprobleme.*

Sei nun G eines von den unendlich vielen algebraischen Gebilden erster Stufe, auf welchen n Integrale erster Gattung existieren, so beschaffen, dass die Perioden derselben auf dem Gebilde G linear und homogen aus den Perioden ω_{ik} zusammengesetzt werden können, so wird G im allgemeinen von höherem Geschlechte als n sein, die Integrale auf G daher mehr als $2n$ linearunabhängige Periodenwege besitzen, und ausser den genannten Integralen erster Gattung werden noch andere auf dem Gebilde vorhanden sein.

Drückt man nun in den Riemann'schen Bilinearrelationen die Integralperioden durch die Perioden des vorgegebenen Systems $2n$-fach periodischer Functionen aus, so erhält man bei geeigneter Wahl dieser letzteren die Bilinearrelationen in der Gestalt:

$$N\sum_{a=1}^{n} d_a(\omega_{\lambda,a}\omega_{\mu,n+a} - \omega_{\mu,a}\omega_{\lambda,n+a}) = 0 \tag{10}$$

wo N einen gemeinsamen Theiler bedeutet, der für das folgende von Bedeutung ist, und jede der ganzen positiven Zahlen d_a durch die folgende theilbar ist. Man hat dann die Bilinearform in ihrer Normalform vor sich. Bezeichnet man die benützten Integrale erster Gattung mit t_a so kann man die Congruenzen ansetzen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int' dt_a \equiv x_a \text{ modd } \omega_{\sigma,1} \ldots \omega_{a,2n} \tag{11}$$

und sieht sogleich, dass diese im allgemeinen d. h. bei frei veränderlichen x_a nur durch eine endliche Anzahl von Werthsystemen der $z_1 \ldots z_\nu$ befriedigt werden, da ja die $2n$-fach periodischen Functionen algebraische Functionen der $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ sind und unter diesen gewiss n solche vorhanden sind, deren Functionaldeterminante nicht verschwindet. Man hat also hier eine Verallgemeinerung des JACOBI'schen Umkehrproblems vor sich, welche zwar nur auf besonderen Gebilden möglich ist, nicht alle Integrale erster Gattung heranzieht, aber im allgemeinen mehrdeutig ist. Wie viele Lösungssysteme nach den $z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots, z_n$ hat nun das System von Congruenzen (11)?

Ich habe die Anzahl L der Lösungen bestimmt,[1] indem ich untersuchte, wie oft das fundamentale Parallelotop von den $x_1, x_2, \ldots, x_n$ überdeckt wird, wenn die $z_1, z_2, \ldots, z_n$ unabhängig von einander das Gebilde G durchlaufen, und fand

$$L = N^n d_1 d_2 \ldots d_n. \tag{12}$$

Aber damit ist erst der erste Schritt für das Studium dieses Umkehrproblems gethan. Die nächste Frage wäre die nach dem Affect der in Frage kommenden Gleichung von dem in (12) angegebenen Grade.

Soll nun das Umkehrproblem eindeutig sein, so muss sowohl N als auch jedes d den Wert eins haben. Dann aber ergiebt sich in Verbindung mit einem Satz, den ich an anderer Stelle bewiesen habe, dass dann das Umkehrproblem nothwendig ein JACOBI'sches oder einer seiner Grenzfälle ist.

4. *Jacobi'sche Functionen und ihr Verhalten auf Gebilden G.*

Unter einer JACOBI'schen Function der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verstehen wir mit FROBENIUS eine ganze Function dieser Variablen, deren Logarithmus bei Vermehrung der x um ein System simultaner Perioden sich um eine lineare Function der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ändert. Durch geeignete Wahl der Variablen und der Perioden kann man ohne der Allgemein-

[1] Wiener Monatshefte, Bd. VII, pag. 20.

heit Abbruch zu thun, dieses Verhalten durch eine Gleichung von der Gestalt:

$$(13)\qquad \log\psi\Big(x_\alpha + \sum_{\beta=1}^{n}(a_\beta\varepsilon_{\alpha\beta} + a_{n+\beta}\tau_{\alpha\beta})\Big)$$
$$-R\bigg(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{n+\alpha}\Big(x_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{n} a_{n+\beta}\tau_{\alpha\beta}\Big)\bigg) + \log\psi(x_\alpha)$$

ausdrücken. Hier bedeutet R eine ganze Zahl, die Ordnung der Jacobi'schen Function, und es ist $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \neq \beta)$, $\varepsilon_{\alpha,\alpha} = d_\alpha^{-1}$. Dabei ist R durch jede der Zahlen d_α theilbar. Diese Functionen lassen sich auch durch Thetareihen mit R^{tel} Charakteristiken ausdrücken und es giebt $R^n \prod_{\alpha=1}^{n} d_\alpha^{-1}$ linearunabhängige Functionen dieser Art, durch welche sich alle der Functionalgleichung (13) genügenden ganzen Functionen linear und homogen mit constanten Coefficienten darstellen lassen.

Man kann nun einzelne solcher Functionen und auch ganze Systeme auf ihr Verhalten auf einem Gebilde G untersuchen, nachdem man vorher für die x_α Summen von Integralen t_α eingesetzt hat. Das wichtigste Hilfsmittel ist dabei die Ausführung der Integration über das logarithmische Differential Jacobi'scher Functionen oder Producte von solchen über die ganze Begrenzung des durch Querschnitte in ein einfach zusammenhängendes verwandelten Gebildes G, wie es von Riemann für die Theta eines algebraischen Gebildes und ein einzelnes Integral geschehen ist.

Das allgemeinste Resultat, zu welchem ich am angeführten Orte dabei gelangt bin, ist folgendes:

Werden in einem System von s Jacobischen Functionen $\psi_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ mit den Ordnungszahlen R_k in die ersten r derselben für die x die Ausdrücke substituirt

$$x_\alpha = \sum_{\rho=1}^{s-1}\int^{z_\rho} dt_\alpha - e_{\alpha,k} \qquad (k=1,\ldots,r)$$

in die übrigen $s - r$ dagegen

$$x_\alpha = \sum_{\rho=1}^{s-1}\int^{z_\rho} dt_\alpha + \int^{\zeta} dt_\alpha - e_{\alpha,k} \qquad (k=r+1, r+2, \ldots, s)$$

so hat das Gleichungssystem, welches entsteht, wenn man alle diese Jacobi'schen Functionen gleich Null setzt, nach z_s im allgemeinen

$$(3)\qquad R_1 R_2 \ldots R_s N^s \frac{\lfloor n}{\lfloor n-s+1} (s-r)(n-s+r+1)$$

Lösungen.

Ferner ist bis auf einen von den $e_{a,k}$ unabhängigen Summanden

$$(14)\qquad \sum_s \int^{s,\sigma} dt_a$$

$$= - R_1 R_2 \ldots R_s N^s \frac{s \lfloor n-1}{\lfloor n-s+1} \left\{ (s-r) \sum_{k=1}^{r} e_{ak} - (n-s+r+1) \sum_{r+1}^{s} e_{a,k} \right\}$$

wo die Summe links über alle Lösungen des Gleichungssystems nach z zu erstrecken ist.

Dieser Satz enthält die von Herrn Poincaré aufgestellten Sätze über die Lösung solcher Gleichungssysteme als Specialfall und liefert für $r = 0$ im Zusammenhang mit der früher bestimmten Anzahl für die Lösungen des vorher besprochenen mehrdeutigen Umkehrproblems auch den Satz, das ein System von n Jacobi'schen Gleichungen $\psi_k(x_a - e_{a,k}) = 0$ für die x_a im allgemeinen

$$(15)\qquad R_1 R_2 \ldots R_n \lfloor n (d_1 d_2 \ldots d_n)^{-1}$$

Lösungen hat, zwischen welchen die Relationen

$$(16)\qquad \sum_h x_a^{(h)} = R_1 R_2 R_3 \ldots R_n (d_1 d_2 \ldots d_n)^{-1} \lfloor n-1 \sum_{k-1}^{n} e_{a,k} + T'_a$$

bestehen.

Die Beweismethoden sind hier von denen des Herrn Poincaré gänzlich verschieden, da sie auf directer Bestimmung und nicht auf einem Schluss vom Besonderen auf Allgemeines beruhen.

5. *Die Thetafunctionen und die verallgemeinerte Kummer'sche Fläche.*

Der grosse Reichthum an Beziehungen und Formeln, welche zwischen den als Thetafunctionen bezeichneten Reihen besteht, insbesondere aber der

Umstand, dass gerade diese Functionen in der Theorie der Jacobi'schen Umkehrproblems auftreten, und die allgemeinsten $2n$-fach periodischen Functionen rational durch diese Reihen ausgedrückt werden können, hat das Interesse der Mathematiker immer gerade auf diese Functionen besonders hingelenkt. Insbesondere waren es die $2n$ Thetafunctionen

$$(17) \qquad \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g_1 g_2 \dots g_n \\ h_1 h_2 \dots h_n \end{smallmatrix}\right|}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{m_1 m_2 \dots m_n = -\infty, +\infty} e^{\pi i \sum\limits_{i,k}^{1 \dots n} \tau_{ik}\left(m_i + \frac{g_i}{2}\right)\left(m_k + \frac{g_k}{2}\right) + 2\pi i \sum\limits_{i=1}^{n}\left(v_i + \frac{h_i}{2}\right)\left(m_i + \frac{g_i}{2}\right)},$$

die eingehenden Untersuchungen auf die verschiedenen Verbindungen und Formeln zwischen ihnen unterworfen wurden. Dabei bezeichnen g_i, h_i, die Zahlen 0, 1, und das System dieser $2n$ Zahlen soll in der Folge kurz mit ε bezeichnet werden, die Function selbst aber mit $\vartheta_\varepsilon(v_i)$.

Die Quadrate dieser Functionen sind nach bekannten Sätzen sämmtlich durch $2n$ unter ihnen linear darstellbar. Für $n = 2$ war es seit langem bekannt, dass man die Kummer'sche Fläche erhalte, wenn man vier passend gewählte Quadrate von Thetafunctionen den homogenen Punktcoordinaten des Raumes von drei Dimensionen proportional setzte und nun die v_1, v_2 alle Werthe innerhalb des Periodenparallelotops durchlaufen liess. Dabei wurde die Kummer'sche Fläche doppelt überdeckt. Klein hat diese und andere damit zusammenhängende Darstellungen vielfach mit der Theorie der hyperelliptischen Functionen in Zusammenhang gebracht, aber er hatte auch in Vorlesungen bereits dasjenige Gebilde in Betracht gezogen, welches entsteht, wenn man die homogenen Punktcoordinaten eines Raumes von $2^n - 1$ Dimensionen proportional setzt den 2^n linearunabhängigen Quadraten von Thetafunctionen und die Ordnung des so definirten Gebildes bestimmt. Auf eine genauere Untersuchung dieses Gebildes wurde ich von ihm seinerzeit hingewiesen. Diese ergab, dass die merkwürdigen Sätze über Collineationen und Correlationen, welche die Kummer'sche Fläche in sich überführen, auch auf dieses allgemeinere Gebilde sich ausdehnen lassen, und dass man es hier wie dort mit einer den 2^{2n} Thetafunctionen in bestimmter Weise zugeordneten Configuration von 2^{2n} Puncten, deren jeder ein 2^{n-1}-facher Punct des Gebildes, und 2^{2n} linearen R_{2^n-2}, deren jeder $2^{n-1}(2^n - 1)$ Puncte der Configuration enthält, zu thun habe.[1]

[1] Wiener Monatshefte, I, 1890. Dort auch weitere Nachweisungen über die im vorigen gestreifte Literatur für $n = 3$: Göttinger Nachrichten, 1889.

Dieses Gebilde, welches ich später als M_n^q bezeichnet habe, erscheint als der der Untersuchung zugänglichste Repräsentant der algebraischen Relationen zwischen den Thetafunctionen. Die Gesammtheit der algebraischen Relationen zwischen den linearunabhängigen Thetaquadraten kann als ein Modul im Sinne DEDEKIND's aufgefasst werden.

Ich bin nun, indem ich HILBERT's[1] charakteristische Function des Moduls heranzog, zu den folgenden Resultaten gelangt:[2]

1) *Die Ordnung des Gebildes ist* $q = \underline{|n}\, 2^{n-1}$.

Dies war schon früher auf Grund der POINCARÉ'schen Sätze von KLEIN angegeben, wird aber hier auf Grund der Relationen zwischen den Theta, also eigentlich des HERMITE'schen Satzes von der Anzahl linearunabhängiger Theta einer bestimmten Ordnung aufs neue bewiesen. Es folgt übrigens auch aus (15).

2) *Das Geschlecht eines vollständigen Schnittes der* M_n^q *mit* $n - 1$ *Mannigfaltigkeiten von* $2^n - 2$ *Dimensionen und den Ordnungszahlen* $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ *ist im allgemeinen, d. h. bei frei veränderlichen Coefficienten der Gleichungen dieser Mannigfaltigkeiten* $p = q_1 q_2 \dots q_{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} q_i \right) . \underline{|n}\, 2^{n-2} + 1$.

3) *Die Mannigfaltigkeit* M_n^q *ist durch die Relationen vierten Grades zwischen den Thetaquadraten vollständig und ohne etwaigen Restschnitt definirt.*

An anderer Stelle[3] habe ich die das Geschlecht betreffende Zahl auf einem ganz andern Wege abgeleitet, nämlich durch directe Aufstellung der zu einer solchen Curve gehörigen Integrale erster Gattung.

Damit war eine bestimmte algebraische Grundlage für die Untersuchung der M_n^q gewonnen, und wir kommen später noch auf ihre Verwerthung für die allgemeine Theorie der Thetafunctionen zurück.

6. *Der Modul der Relationen zwischen den Functionen* $\vartheta_\varepsilon(0, \tau_{ik})$.

Viel schwieriger, aber eben deshalb nicht weniger wichtig wäre es nun auch die algebraischen Relationen zu untersuchen, welche zwischen den

[1] Math. Annalen, 36.

[2] *Untersuchungen über allgemeine Thetafunctionen*, Leipzig, Teubner 1895.

[3] l. c. § 27.

Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente bestehen. Hier wären eben die Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Modulfunctionen zu schaffen. Ich bin nun allerdings hier nicht zu abschliessenden Resultaten gelangt, aber in Anbetracht der Schwierigkeit des Gegenstandes möge man entschuldigen, wenn ich den Ansatz hier widergebe, den ich im Jahre 1895 Herrn Minkowski brieflich mitgetheilt habe, weil derselbe die Zurückführung der Hauptfrage auf ein Problem der Zahlentheorie giebt, und da eine bemerkenswerthe Verallgemeinerung gewisser von Jacobi in der Theorie der binären quadratischen Formen und der Darstellung von Zahlen als Summen von Quadraten gestellter und gelöster Probleme aufweist.

Die Verhältnisse der Nullwerthe der geraden Theta von n Variablen lassen sich sämmtlich als algebraische Functionen von Parametern darstellen, zwischen welchen entweder gar keine oder nur algebraische Relationen bestehen.[1] Die Gesammtheit dieser Relationen zwischen den Thetanullwerthen welche man als durch Nullsetzen ganzer rationaler homogener Functionen derselben ausgedrückt denken kann, bilden daher einen Modul und dieser wird zugleich dasjenige Gebilde definiren, welches entsteht, wenn wir in den $\vartheta_\varepsilon(0, \tau_{ik})$ die τ_{ik} alle mit den Convergenzbedingungen der Thetareihen verträglichen Werthe annehmen lassen. Ja, dieses Gebilde wird dabei sogar unendlich oft überdeckt, indem diejenigen linearen Transformationen der τ_{ik} welche mod. 2 der Identität congruent sind, die einzelnen Theta im wesentlichen ungeändert lassen. Werthsysteme der τ_{ik}, welche durch eine solche Transformation auseinander hervorgehen, sollen als äquivalent gelten, so dass von solchen als von einem einzigen System gesprochen werden soll. Die erste und wichtigste Frage ist natürlich die nach der Ordnung eines solchen Gebildes. Anders formulirt heisst das, wir wollen wissen, wie viele nicht äquivalente Werthsysteme der τ_{ik} einem System von $\frac{1}{2}n(n+1)$ linearen Gleichungen zwischen den Thetanullwerthen genügen. Daran reihen sich andere Fragen, die sämmtlich darauf hinauslaufen, den algebraischen Zusammenhang der Thetanullwerthe unter sich zu erforschen.

Einen aussichtsreichen functionentheoretischen Ansatz zu machen ist mir nicht gelungen, weil wir zur Zeit noch keine deutliche Vorstellung

[1] *Untersuchungen über Thetafunctionen*, § 35, 36.

von dem Fundamentalbereich der τ_{ik} haben und auch, weil an den Grenzen dieses Bereiches Singularitäten im Verhalten der Theta auftreten, von denen wir noch keine Ahnung haben. Was geschieht z. B. mit den Theta von drei Variablen, wenn die definirende Curve vierter Ordnung unvermittelt in eine vierfach zählende Gerade übergeht?

Ich fasste daher den Plan den Modul der Relationen der Thetanullwerthe direct von ihrer analytischen Darstellung aus zu untersuchen, und wurde dadurch auf ein Problem geführt, welches als die natürliche Verallgemeinerung der Aufgabe erscheint die Darstellungen einer Zahl als Summe von Quadraten zu untersuchen.

Beginnen wir mit $n = 1$, also den elliptischen Functionen. Hier ist

$$(18)\qquad \vartheta_{00}(0\,,\tau) = \vartheta_{00} = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau n^2}, \qquad \vartheta_{01}(0\,,\tau) = \vartheta_{01} = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau n^2 + n\pi i},$$
$$\vartheta_{10}(0\,,\tau) = \vartheta_{10} = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{4}\pi i \tau (2n+1)^2}.$$

Bilden wir nun mit drei ganzen Zahlen λ_1, λ_2, λ_3 den Ausdruck

$$(19)\qquad \vartheta_{00}^{\lambda_1}\vartheta_{01}^{\lambda_2}\vartheta_{10}^{\lambda_3} = \sum_{n_i, n_k, n_l} e^{\frac{\pi i \tau}{4}\left[\sum_{i=1}^{\lambda_1}(2n_i)^2 + \sum_{k=1}^{\lambda_2}(2n_k)^2 + \sum_{e=1}^{\lambda_3}(2n_l+1)^2\right] + i\pi \sum_{k=1}^{\lambda_2} n_k}$$

so kann man denselben als Potenzreihe nach $e^{\frac{\pi i \tau}{4}}$ auffassen und schreiben

$$(20)\qquad \vartheta_{00}^{\lambda_1}\vartheta_{01}^{\lambda_2}\vartheta_{10}^{\lambda_3} = \sum_{\mu} A_{\mu}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} e^{\mu\pi i\frac{\tau}{4}}$$

wo $A_{\mu}^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}$ folgendermassen definirt ist: Es sei $D_{\mu}^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}$ die Anzahl der Darstellungen von μ in der Form

$$(21)\qquad \mu = \sum_{i=1}^{\lambda_1}(2n_i)^2 + \sum_{k=1}^{\lambda_2}(2n_k)^2 + \sum_{e=1}^{\lambda_3}(2n_l + 1)^2$$

bei welchen $\sum_{k=1}^{\lambda_2} n_k$ gerade ist, und analog $\Delta_{\mu}^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}$ die Anzahl der Darstellungen, für welche $\sum_{k=1}^{\lambda_3} n_k$ ungerade ist. Dann ist

$$(22)\qquad A_{\mu}^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} = D_{\mu}^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} - \Delta_{\mu}^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}.$$

Nun hat jede mögliche Relation N^{ten} Grades zwischen den Thetanullwerthen die Form

$$(23) \qquad \sum_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=N} C_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} \vartheta_{00}^{\lambda_1} \vartheta_{01}^{\lambda_2} \vartheta_{10}^{\lambda_3} = 0.$$

Daher besteht für jedes μ die Gleichung

$$(24) \qquad \sum_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=N} C_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} A_\mu^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} = 0.$$

Mit anderen Worten, die von μ unabhängigen linearen Relationen zwischen den $A_\mu^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}$ $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = N)$ liefern ohne weiters die Relationen zwischen den Thetanullwerten vom N^{ten} Grade.

Sei nun Z_N die Anzahl der linear unabhängigen unter den Relationen (24), dann ist

$$(25) \qquad \frac{(N+1)(N+2)}{2} - Z_N$$

die charakteristische Function des Moduls der Thetarelationen im Sinne Hilbert's. Hieraus kann man dann die Ordnung des Gebildes unmittelbar ablesen. Wegen der Relation

$$(26) \qquad \vartheta_{00}^4 - \vartheta_{01}^4 - \vartheta_{10}^4 = 0$$

ist nun hier das Gebilde, welches erster Stufe ist, schon vollständig definirt und jede solche Relation muss durch die linke Seite dieser Gleichung theilbar sein. Die charakteristische Function wird daher $4N - 2$ und daraus folgt rückwärts

$$(27) \qquad Z_N = \frac{(N+1)(N+2)}{2} - 4N + 2 = \frac{(N-2)(N-3)}{2}.$$

Dies ist also die Anzahl der Relationen, welche zwischen den Darstellungsanzahlen unabhängig von den μ bestehen. Man erhält diese Relationen selbst, wenn man bemerkt, dass die allgemeinste Thetarelation durch Multiplication eines beliebigen homogenen Polynoms $(N-4)^{\text{ten}}$ Grades mit der linken Seite von (26) erhalten wird. Sie lauten

$$(28) \qquad A_\mu^{\nu_1+4,\nu_2,\nu_3} - A_\mu^{\nu_1,\nu_2+4,\nu_3} - A_\mu^{\nu_1,\nu_2,\nu_3+4} = 0.$$

Um nun diese Fragestellung auf n Variable zu übertragen sei

$$(29)\qquad \vartheta_\varepsilon = \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{4}\sum\limits_{i,k}^{1\ldots n}\tau_{ik}(2n_i+g_i)(2n_k+g_k)+\frac{1}{2}\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}(2n_k+g_k)h_k}, \qquad (i=1\ldots)$$

wo die Zahlen g_i, h_i die Charakteristik der Thetafunction angeben, jedoch immer die Charakteristik eine gerade, also $\sum\limits_{i=1}^{n} g_i h_i \equiv 0 \mod. 2$ ist.

Die verschiedenen Charakteristiken zugehörigen Thetanullwerthe sollen durch den untern Index unterschieden werden. Die Anzahl der geraden Charakteristiken und Theta soll mit r bezeichnet werden, so dass $r = 2^{n-1}(2^n+1)$. Bildet man hier wieder den Ausdruck

$$(30)\qquad \prod_{\nu=1}^{r} \vartheta_{\varepsilon_\nu}^{\lambda_\nu} \qquad \left(\sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu = N\right)$$

und verfährt wie vorhin, so erhält man

$$(31)\qquad \prod_{\nu=1}^{\nu=r} \vartheta_{\varepsilon_\nu}^{\lambda_\nu}$$

$$= \sum_{n_i^{(\sigma)}} e^{\frac{\pi i}{4}\sum\limits_{i,k}\tau_{ik}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n}\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=\lambda_\nu}\left(2n_i^{(\sigma)}+g_i^{(\nu)}\right)\left(2n_k^{(\sigma)}+g_k^{(\nu)}\right)+\frac{\pi i}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=r}\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=\lambda_\nu}\left(2n_k^{(\sigma)}+g_k^{(\nu)}\right)h_k^{(\nu)}}.$$

Fasst man die Reihe rechts wieder als Potenzreihe nach den $e^{\frac{\pi i \tau_{ik}}{4}}$ auf und setzt

$$(32)\qquad \prod_{\nu=1}^{r} \vartheta_{\varepsilon_\nu}^{\lambda_\nu} = \sum A_{(\mu_{ik})}^{\lambda_1\ldots\lambda_\nu} e^{\frac{\pi i}{4}\sum\limits_{i,k}\mu_{ik}\tau_{ik}}$$

so folgt

$$\mu_{ik} = \sum_{\nu=1}^{\nu=r}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\lambda_\nu}(2n_i^{(\sigma)}+g_i^{(\nu)})(2n_k^{(\sigma)}+g_k^{(\nu)})$$

und daher, wenn u_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ neue Unbestimmte sind

$$(33)\qquad \sum_{i,k}\mu_{ik}u_i u_k = \sum_{\nu=1}^{\nu=r}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\lambda_\nu}\left[\sum_{k=1}^{n}(2n_k^{(\sigma)}+g_k^{(\nu)})u_k\right]^2.$$

D. h. die quadratische Form $\sum \mu_{ik}u_i u_k$ stellt sich dar als eine Summe von N Quadraten von Linearformen.

Bedeutet nun $D^{(\lambda_1 \dots \lambda_\nu)}_{(\mu_{ik})}$ die Anzahl dieser Darstellungen, für welche die immer gerade Zahl $\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{r=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{\lambda_\nu} (2n_k^{(\sigma)} + g_k^{(\nu)}) h_k^{(\nu)}$ durch vier theilbar ist, $\Delta^{(\lambda_1 \dots \lambda_\nu)}_{(\mu_{ik})}$ die Anzahl der Darstellungen, wo dies nicht der Fall ist, so ist wiederum

$$A^{(\lambda_1 \dots \lambda_\nu)}_{(\mu_{ik})} = D^{(\lambda_1 \dots \lambda_\nu)}_{\mu_{ik}} - \Delta^{(\lambda_1 \dots \lambda_\nu)}_{\mu_{ik}}. \tag{34}$$

Jede Relation zwischen den Thetanullwerthen zieht wie oben eine solche zwischen den $A^{(\lambda_1 \dots \lambda_\nu)}_{(\mu_{ik})}$ nach sich, mit Coefficienten, welche unabhängig sind von den (μ_{ik}).

Die Zahl der linearunabhängigen unter diesen Relationen sei wieder Z_N und diese Relationen selbst

$$\sum_{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_\nu = N} C_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu} A^{(\lambda_1 \dots \lambda_\nu)}_{\mu_{ik}} = 0. \tag{35}$$

Dann ist

$$\binom{N+r-1}{r-1} - Z_N \tag{36}$$

die charakteristische Function des Moduls der Relationen der Thetanullwerthe und zwar nach dem HILBERT'schen Satze für genügend grosses N eine ganze rationale Function vom Grade $\frac{1}{2}n(n+1)$. Ist dann α der Coefficient der höchsten Potenz von N in dieser Function, so ist

$$\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)\alpha$$

die Ordnung des Gebildes. Ja, es würde sogar die Ermittlung von Z_N genügen für eine Reihe von unbegrenzt wachsenden, sonst aber beliebig specialisirten Werten von N, um α ermitteln zu können.

Die Differenz, auf die es hier eigentlich ankommt, hat nun nach HILBERT die Form

$$\binom{r+N-1}{r-1} - Z_N = \sum_{\rho=0}^{\rho=\frac{1}{2}n(n+1)} \alpha_\rho \binom{N}{\rho} \tag{37}$$

und daraus folgt bereits ein asymptotischer Ausdruck für Z_N da es ja bis

auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{2}n(n+1)$ mit dem Binomialcoefficienten übereinstimmen muss, welcher in N von der Ordnung N^{r-1} ist, wo $r = 2^{n-1}(2^n+1)$ ist.

Man erkennt, dass hier an die Stelle der Anzahl der Darstellungen einer *Zahl* als Summe von *Quadraten* von Zahlen die Anzahl der Darstellungen einer *quadratischen Form* als Summe von *Quadraten von Linearformen* zur Untersuchung gestellt ist, eine Frage, welche für $n = 1$ eben in die obige übergeht und daher als eine Verallgemeinerung derselben aufzufassen ist.

Man kann in dieser Art der Fragestellung noch weiter gehen und auch nach dem Modul der Relationen Fragen, welche zwischen den Theta bestehen, wenn diese als Functionen sämmtlicher Grössen v_i und τ_{ik} betrachtet werden. Die Formen dieses Moduls könnten dann nur Coefficienten haben, welche rein numerische Constante sind. Ein solcher Modul kommt allerdings erst für $n > 4$ zu Stande, aber seine Untersuchung wäre von grosser Wichtigkeit.

7. *Die algebraischen Curven auf der M und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen.*

Riemann hat die von ihm in die Theorie der Abel'schen Integrale und Functionen eingeführten Theta ausdrücklich als eine specielle Classe bezeichnet, da deren Parameter von den $3p-3$ Moduln des algebraischen Gebildes abhängen, während sie doch in der Zahl $\frac{1}{2}p(p+1)$ vorhanden sind, also für ein p grösser als drei nothwendig specialisirt sein müssen. Er hat auch die Bemerkung hinzugefügt, dass die allgemeinen Theta sich nach einer ganz ähnlichen Methode behandeln lassen.

Das Studium der Mannigfaltigkeit M_n^q erlaubt nun in dieser Richtung weitergehende Angaben zu machen. Da sie von den Werthen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ doppelt überdeckt ist, da ja die Thetaquadrate durchaus gerade Functionen sind, so scheiden sich die auf ihr gelegenen Curven in zwei Classen, nämlich solche für welche die beiden Doppelüberdeckungen längs der Curve zusammenhängen und solche für welche das nicht der Fall ist. Unter Ordnung einer Curve werde nun im zweiten Fall die Anzahl ihrer Schnitt-

punkte mit einem linearen Raum von $2^n - 2$ Dimensionen, im ersten Fall aber das doppelte dieser Zahl verstanden. Dann gelten die folgenden Sätze:

Die Ordnung einer Curve ist ein gerades Vielfache der Variablenzahl also $2gn$. *Die Riemann'schen Theta, welche zur eventuell doppeltüberdeckten Curve gehören zerfallen nach einer Transformation* g^{ten} *Grades in Factoren, von denen die einen Theta von n Variablen sind, und zwar gerade die zur Definition der vorgelegten* M_n^g *benützten.*

Es werden also die allgemeinsten Thetafunctionen als Factoren transformirter, specieller, Riemann'scher Theta höheren Geschlechtes erhalten. Im Besondern ergiebt sich, *dass die allgemeinsten Theta von n Variablen sicher bereits aus den Theta erhalten werden können, welche zu speciellen Gebilden vom Geschlecht* $(n-1)\,|\underline{n}\;2^{n-1}+1$ *gehören und durch Transformationen vom Grade* $|\underline{n-1}\;2^{n-1}$ *zum Zerfallen in geeignete Factoren gebracht werden können.* Die Bedingungen für dieses Verhalten lassen sich wenigstens principiell algebraisch aufstellen.

Von den andern Resultaten, welche sich daraus ergeben, will ich nur hervorheben, dass sich als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die gegebene M_n^g zu Riemann'schen Theta gehört, d. h. ihre τ_{ik} als zu dem Periodensystem der Integrale erster Gattung eines algebraischen Gebildes vom Geschlecht n gehörend aufgefasst werden können, ergiebt, dass eine Curve von der Ordnung $2n$ auf der M_n^g gelegen ist.

Jede Curve der M_n^g giebt ferner Anlass zur Bildung eines dem Jacobi'schen Umkehrproblem analogen, aber mehrdeutigen Umkehrproblems in n Variablen, welches nach den Ausführungen in N° 3 g^n Lösungen hat, weil hier alle dort mit d bezeichneten Zahlen gleich 1 werden.

8. *Über eine speciellere Classe von Thetafunctionen.*

Nach diesen Ergebnissen lag es nahe, nach solchen algebraischen Gebilden zu suchen, deren Riemann'schen Theta von vornherein in Factoren zerfallen, wenn eine passende Transformation auf sie angewendet wurde. Dabei suchte ich es von vornherein so einzurichten, dass die $\tau_{i,k}$ der so erhaltenen Thetafunctionen eine Mannigfaltigkeit von möglichst vielen Dimension bildeten. Eine eingehendere Untersuchung führt nun zu nachstehendem Ergebniss.

Denken wir uns ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte $n+1$ etwa dadurch gegeben, dass wir die $n+1$ Differentiale erster Gattung du_a proportional den homogenen Coordinaten eines Raumes von n Dimensionen setzen und bezeichnen diese mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$. Es ist dies nichts anderes als die bekannte WEBER-NÖTHER'sche Normalcurve. Wir bilden dann die nirgends singuläre Differentialform $d\omega_x$, so dass $du_a = \varphi_a d\omega_x$. Es giebt dann bekanntlich $2^{2n+2} - 1$ verschiedene Systeme von quadratischen Formen der $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$, so dass diese auf dem algebraischen Gebilde überall von der zweiten Ordnung Null werden, also wenn eine solche Form mit Φ bezeichnet wird, auch $\sqrt{\Phi}$ auf dem Gebilde durchaus unverzweigt ist. Diese werden gewöhnlich als Wurzelformen zweiter Stufe bezeichnet. Zwischen je $n+1$ Wurzelformen desselben Systems besteht dann eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten. Bildet man nun mit n linearunabhängigen Wurzelformen desselben Systems die n Integrale

$$dx_i = \int \sqrt{\Phi_i}\, d\omega_x \qquad (i=1\ldots n)$$

so zeigt die Untersuchung derselben auf dem algebraischen Gebilde, dass sie nur $2n$ Systeme unabhängiger Perioden haben, und diese zur Bildung von Thetafunctionen von n Variablen geeignet sind. Diese Thetafunctionen lassen sich dann mit den RIEMANN'schen Hilfsmitteln eingehend untersuchen und alle die Probleme, welche RIEMANN bei den zu den Integralen erster Gattung gehörigen Theta erledigt hat auch hier erledigen, wobei allerdings merkwürdige Unterschiede im einzelnen eintreten.

Es gehören also zu einem algebraischen Gebilde vom Geschlecht $n+1$ nicht bloss Theta von $n+1$ Variablen, sondern auch solche von n Variablen.

Eine eingehende Untersuchung zeigt, dass diese Theta von $3n$ Moduln abhängen, also um 3 Parameter allgemeiner sind als die RIEMANN'schen, welche sie als Grenzfall enthalten. Sie enthalten auch noch die allgemeinsten Theta von *vier* und *fünf* Variablen. Eine eingehende Theorie dieser letzteren auf der hier angedeuteten Grundlage würde gewiss unsere Einsicht in diese merkwürdigen Functionen fördern, welche ja die einzigen über die elementaren hinausreichenden Functionen mehrerer Variablen sind, welche wir etwas genauer untersuchen können.

Wenn man nun diese Gesichtspunkte rückwärts auf die Theta von zwei und drei Variablen anwendet, so ergeben sich auch hier neue und

bemerkenswerthe Beziehungen zwischen algebraischen Gebilden verschiedener Geschlechter. So erhält man diejenigen algebraischen Gebilde vom Geschlecht 3, welche vorgegebene Theta von zwei Variablen liefern, einfach dadurch, dass man die durch die Theta von zwei Variablen gegebene Kummer'sche Fläche mit einer Ebene schneidet. Der Schnitt ist dann eine ebene Curve vierter Ordnung vom Geschlechte drei, und die 16 singulären Ebenen der Kummer'schen Fläche schneiden diese Ebene in 16 von den 28 Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung. Die 12 übrigen Doppeltangenten gehören einem Steiner'schen System an, welches zugleich diejenige Schaar von Wurzelformen bestimmt, mit welcher die vorgegebenen Theta erhalten werden.

Um diejenigen Gebilde vom Geschlecht vier zu erhalten, welche vorgegebene Theta von drei Variablen geben, kann man sich in ähnlicher Weise der zugehörigen M_3^{24} bedienen. Es sind dort gewisse Curven 6ter Ordnung welche in berührenden Räumen von drei Dimensionen liegen.

Man kann aber auch direct ohne auf die M_3^{24} zu recurriren, die gesuchten Gebilde vom Geschlecht vier angeben. Zu den Theta von drei Variablen gehört bekanntlich ein algebraisches Gebilde, welches im allgemeinen in die Gestalt einer ebenen Curve vierter Ordnung gesetzt werden kann. Um nun die dreifach unendlich vielen Gebilde vom Geschlechte vier zu erhalten, welchem in dem hier besprochenen Sinn die vorgelegten Theta von drei Variablen liefern, beachte man, dass man auch dreifach unendlich viele Schaaren von Punktquadrupeln auf der Curve vierter Ordnung hat, so dass die Quadrupel einer Schaar unter sich äquivalent sind, d. h. hier als von einem und demselben Kegelschnittsbüschel, dessen Basispunkte auf der Curve vierter Ordnung liegen, ausgeschnitten betrachtet werden können. Ein Quadrupel einer Schaar bildet nun ein Viereck, und der geometrische Ort der Ecken des Diagonaldreiecks dieses Vierecks ist eine Curve 6ter Ordnung, wenn das Quadrupel die Schaar durchläuft. Diese Curve 6ter Ordnung hat 6 Doppelpunkte und ist daher vom Geschlechte vier. Sie liefert im angegebenen Sinne nun gerade diejenigen Theta von drei Variablen, welche zur vorgelegten Curve vierter Ordnung gehören. Es findet also die transcendente Beziehung der beiden Curven auch ihren prägnanten geometrisch-algebraischen Ausdruck. Die Aufsuchung solcher und ähnlicher Beziehungen in den Fällen von vier und fünf Variablen würde sicher auch für die bisher wenig bearbeitete Theorie dieser Geschlechter von Interesse sein.

9. *Über die Reduction Abel'scher Integrale.*

Man hat bisher bei der Frage nach der Reduction eines Abel'schen Integrals auf ein solches von niedrigerem Geschlecht fast ausschliesslich die Reduction auf elliptische Integrale studiert, und zwar aus dem vielleicht nicht immer ausgesprochenem Grunde, weil dies der einzige Fall ist, in welchem aus der Reduction der Perioden auf ein Paar auch auf die Existenz eines einzelnen Integrales, welches auf elliptische reducirbar ist, geschlossen werden kann. Bei höherem Geschlecht liegt jedoch die Frage durchaus complicirter, auch dann wenn nur die Reduction auf nicht höhere Geschlechter als drei in Frage kommt, also die τ_{ik} noch sämmtlich unabhängig von einander sind.

Sei, um die Ideen zu fixieren, vorgelegt ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte 10. Auf diesem seien drei Integrale erster Gattung bekannt, deren 20 Perioden sich simultan auf ein System von sechs Perioden zurückführen lassen, dann darf man nicht etwa schliessen, dass diese drei Integrale simultan durch eine Substitution auf solche vom Geschlechte drei zurückgeführt werden können, wohl aber, dass jedes einzelne von ihnen als eine Summe von drei Integralen erster Gattung vom Geschlechte drei zwischen deren oberen Grenzen eine algebraische Relation besteht, dargestellt werden kann. Eine Theorie solcher Reductionen vom algebraischen Standpunkt aus wäre sehr wichtig und eine wesentliche Förderung des classischen Abel'schen Problems der Vergleichung der Transcendenten der Integralrechnung. Für eine allgemeine Discussion dieses Problems von transcendenter Seite her sind im vorigen insbesondere in der Theorie der M_n^q wesentliche Hülfsmittel enthalten, und die niedrigsten Fälle liefern auch bereits Beispiele nach dieser Richtung hin. Die nähere Ausführung dieser Beziehungen ist mir im Augenblick nicht möglich, ich hoffe aber darauf zurückkommen zu können.

10. *Über die Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlechte drei.*

Die vorhergehenden Untersuchungen beziehen sich auf weite und allgemeine Gebiete, zu deren erfolgreicher weiterer Bearbeitung eine genauere

Kenntniss der einfachsten Fälle nach jeder Richtung hin unerlässlich erscheint. Insbesondere wäre es von Interesse die mannigfachen algebraischen und geometrischen Beziehungen welche die KUMMER'sche Fläche aufweist, auch in den höhern Fällen zu verfolgen, und hieraus wieder rückwärts die zu einem algebraischen Gebilde gehörigen Thetafunctionen in möglichst unmittelbare Beziehung zu diesem selbst zu setzen. Für die Theta von drei Variablen, habe ich, wenigstens was ihre Abhängigkeit von den Integralsummen betrifft einen Anfang gemacht.[1] Dabei war der Ausgangspunkt ein wesentlich algebraisch-geometrischer, indem verlangt wurde, das Umkehrproblem mit Vermeidung jeder überflüssigen Irrationalität und mit durchaus an der ebenen Curve vierter Ordnung invarianten Functionen zu lösen. Es erwies sich dieser Plan als in allen Einzelheiten durchführbar und ergab mehrere unmittelbar an der Curve vierter Ordnung auftretende Gebilde, welche eindeutig auf die M_3^{24} bezogen waren. Auch für die ungeraden Thetafunctionen resp. die von KLEIN eingeführten σ-Functionen selbst ergab sich bis auf constante Factoren eine unmittelbare geometrische Bedeutung. Auch die bekannte Beziehung der KUMMER'schen Fläche[2] auf die Kernfläche eines speciellen Gebüsches von Flächen zweiter Ordnung findet sich in analoger Form wieder, so dass sich hiedurch ein rein algebraisch-geometrischer Zugang zur M_3^{24} eröffnet. Würde man nun einen ähnlichen Weg bei vier Variablen gehen, so würde man speciell zu einer M_4^{192} kommen, welche zu RIEMANN'schen Theta gehört, und hätte durch Vergleichung mit der aus Integralen über Wurzelfunctionen beim Geschlecht 5 abgeleiteten M_4^{192} Gelegenheit, tiefer in das Verständniss der von SCHOTTKY aufgestellten Relation zwischen den τ_{ik} einzudringen, welche für die RIEMANN'schen Theta charakteristisch ist.

---

[1] Math. Annalen, 40.

[2] Für deren Verwendung in dem hier gemeinten Sinn vgl. Jahresberichte d. deutschen Math. Ver. 1894—5.

ALGEBRAIC PROOFS OF THE RIEMANN-ROCH THEOREM AND OF THE INDEPENDENCE OF THE CONDITIONS OF ADJOINTNESS[1]

BY

J. C. FIELDS

of HAMILTON, CANADA.

§ 1.

The methods which I employ in the present paper are essentially those of which I have already made use in a paper *On the Reduction of the general Abelian Integral.*[2] They are purely algebraic in their character and furnish a very elementary introduction to the theory of the algebraic functions.

The substance of this paper was presented at the meeting of the Chicago Section of the American Mathematical Society held in Chicago in December 1900.

Let

$$(1) \qquad F(z\,,u) = \sum_{r,s} e_{r,s} z^r u^s = 0$$

be the equation to an irreducible algebraic curve of degree n. We shall assume that the multiple points of our curve are all double points with distinct tangents and separate from the branch points, that the asymptotes are all distinct from one another and none of them parallel to the axis of u and no two parallel to each other.

Any irreducible algebraic curve, as we know, can be transformed to this form by a birational transformation. The variable u we shall regard throughout as the dependent variable. The coefficient $e_{0,n}$ of u^n will on

[1] See note at end of paper.

[2] Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 2.

the above hypotheses have a value different from o and u will be an integral algebraic function of z.

Any rational function $R(z, u)$ of z, u we know may be expressed in the form

$$(2) \qquad R(z, u) = \sum_\lambda R_\lambda\left(\frac{1}{z - a_\lambda}, u\right) + R_0(z, u)$$

where $R_\lambda\left(\frac{1}{z - a_\lambda}, u\right)$ denotes a polynomial in $\left(\frac{1}{z - a_\lambda}, u\right)$ and $R_0(z, u)$ a polynomial in z, u the degrees of these polynomials in the variable u not being greater than $n - 1$.

In particular the most general rational function of z, u which becomes infinite only at ∞ may readily be shown to have the form

$$(3) \qquad \sum_\lambda \frac{y_\lambda F(a_\lambda, u)}{(z - a_\lambda)(u - b_\lambda)} + T(z, u)$$

where the summation with regard to λ is supposed to extend to the d double points (a_λ, b_λ) of our curve, the coefficients y_λ being arbitrary constants and the function $T(z, u)$ an arbitrary polynomial in z, u. On extending the above summation to a number of other points (a_λ, b_λ) the expression will evidently represent the most general rational function whose infinities other than those at ∞ are of the first order only and are included under the points here in question.

We shall now try to construct a function which is finite at ∞ and whose infinities, all of the first order, are to be found among those corresponding to the Q points $(a_{d+1}, b_{d+1}) \ldots (a_{d+Q}, b_{d+Q})$. These points further we shall assume to be all distinct from the d double points which we indicate by $(a_1, b_1) \ldots (a_d, b_d)$.

Our function if it exist must have the form

$$(4) \qquad \sum_{\lambda=1}^{d+Q} \frac{y_\lambda F(a_\lambda, u)}{(z - a_\lambda)(u - b_\lambda)} + T(z, u)$$

and our only task will evidently be to determine under what conditions a function of this form will not become infinite at ∞. Suppose the directions of the n points at ∞ on our curve to be given by the equations

$$u - k_1 z = 0\ , \ \ldots\ , \ u - k_n z = 0$$

where, in accord with our original hypothesis in regard to the asymptotes of the curve, the n coefficients k all have different values. A homogeneous polynomial $t(z, u)$ of degree $n - 1$ in z, u will evidently become infinite to the order $n - 1$ for one at least of the n branches at ∞, as otherwise we should have $z^{n-1}t(1, k) = 0$ for $k = k_1 \dots k_n$ and, as the degree of the equation $t(1, k) = 0$ in k is $n - 1$, this equation would be an identity and we should therefore also have $t(z, u) = 0$ identically.

We derive thence that $z^r t(z, u)$ must be infinite to the order $n + r - 1$ for one at least of the branches at ∞, and this of course whether r is positive or negative. It follows further also that a non-homogeneous polynomial $T(z, u)$ of degree $n + r - 1$ must become infinite to the order $n + r - 1$ for one at least of the branches at ∞, for the polynomial can evidently be written in the form

$$T(z, u) = z^r t(z, u) + T_{n+r-2}(z, u)$$

where the degree of $T_{n+r-2}(z, u)$ in z, u is not greater than $n + r - 2$.

Here and throughout the paper, where there is nothing to indicate the contrary, it is to be assumed as a matter of course that our functions are expressed in the reduced form in which the variable u does not appear to a power higher than the $(n - 1)^{\text{th}}$.

§ 2.

Returning to the consideration of the expression (4) which is to remain finite for $z = \infty$, we see that the individual elements of the summation therein appearing cannot become infinite to an order greater than $n - 2$ and that this therefore also must be the case for the polynomial $T(z, u)$.

The function which we have to consider then may be written in the form

$$(5) \qquad \sum_{\lambda=1}^{d+Q} \frac{y_\lambda F(a_\lambda, u)}{(z - a_\lambda)(u - b_\lambda)} + T_{n-2}(z, u)$$

where in $T_{n-2}(z, u)$ we employ the suffix $n - 2$ to indicate the degree of the polynomial.

We have to study the conditions under which the expression (5) does not become infinite at ∞.

From the equation to our curve we have

$$\frac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} = \frac{F(a_\lambda, u) - F(a_\lambda, b_\lambda)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} = \frac{\sum\limits_{r,s} e_{r,s} a_\lambda^r (u^s - b_\lambda^s)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)}.$$

This we may write in the form

$$(6) \qquad \frac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} = (z-a_\lambda)^{-1} \sum_{r,s} e_{r,s} a_\lambda^r (u^{s-1} + u^{s-2} b_\lambda + \ldots + b_\lambda^{s-1})$$

$$= (z-a_\lambda)^{-1} \sum_{s=1}^{n} \{a_\lambda, b_\lambda\}_s u^{n-s}$$

where

$$(7) \qquad \{a_\lambda, b_\lambda\}_s = \sum_{\sigma=0}^{s-1} \sum_{\rho=0}^{\sigma} e_{\rho, n-\sigma} a_\lambda^\rho b_\lambda^{s-\sigma-1}.$$

We then have

$$(8) \qquad \frac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} = \left\{ \frac{1}{z} + \frac{a_\lambda}{z^2} + \frac{a_\lambda^2}{z^3} + \ldots + \frac{a_\lambda^{n-3}}{z^{n-2}} + \frac{a_\lambda^{n-2}}{z^{n-2}(z-a_\lambda)} \right\} \sum_{s=1}^{n} \{a_\lambda, b_\lambda\}_s u^{n-s}$$

$$= \left\{ \frac{1}{z} + \frac{a_\lambda}{z^2} + \frac{a_\lambda^2}{z^3} + \ldots + \frac{a_\lambda^{n-3}}{z^{n-2}} \right\} \sum_{s=1}^{n} \{a_\lambda, b_\lambda\}_s u^{n-s} + P_\lambda(z, u)$$

where $P_\lambda(z, u)$ is a rational function of z, u which is finite for $z = \infty$.

This we may further reduce to the form

$$(9) \qquad \frac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} = \sum_{s=1}^{n-2} \sum_{r=1}^{n-s-1} a_\lambda^{r-1} \{a_\lambda, b_\lambda\}_s z^{-r} u^{n-s} + \bar{P}_\lambda(z, u)$$

where $\bar{P}_\lambda(z, u)$ is a rational function of z, u which is finite for $z = \infty$.

For the summation in (5) we shall then have

$$\sum_{\lambda=1}^{d+Q} \frac{y_\lambda F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} = \sum_{\lambda=1}^{d+Q} \sum_{s=1}^{n-2} \sum_{r=1}^{n-s-1} y_\lambda a_\lambda^{r-1} \{a_\lambda, b_\lambda\}_s z^{-r} u^{n-s} + P(z, u)$$

where $P(z, u)$ is a rational function of z, u which is finite for $z = \infty$.

This we may write in the form

$$(10) \qquad \sum_{\lambda=1}^{d+Q} \frac{y_\lambda F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} = \sum_{s=1}^{n-2} \sum_{r=1}^{n-s-1} c_{n-s-r, n-s} z^{-r} u^{n-s} + P(z, u)$$

where

$$c_{n-s-r,\,n-s} = \sum_{\lambda=1}^{d+Q} y_\lambda a_\lambda^{r-1} \{a_\lambda, b_\lambda\}_s. \tag{11}$$

For the suffixes of the coefficients c we here select for reasons of convenience the sum of the exponents of z and u and the exponent of u respectively.

On writing

$$y_{i,k} = \sum_{\lambda=1}^{d+Q} y_\lambda a_\lambda^i b_\lambda^k \tag{12}$$

it is readily seen that we have

$$c_{n-s-r,\,n-s} = \sum_{\sigma=0}^{s-1} \sum_{\rho=0}^{\sigma} e_{\rho,\,n-\sigma} y_{r-1+\rho,\,s-1-\sigma}. \tag{13}$$

Since the exponents of z which appear in the summation on the right of (10) are all negative whereas in the polynomial $T_{n-2}(z, u)$ in (5) no such exponents make their appearance, it will not be inconsistent with the notation employed above if we write

$$T_{n-2}(z, u) = \sum_{s=2}^{n} \sum_{r=0}^{s-2} c_{n-s+r,\,n-s} z^r u^{n-s}. \tag{14}$$

Combining (10) and (14) we have

$$\begin{aligned} T_{n-2}(z, u) &+ \sum_{\lambda=1}^{d+Q} \frac{y_\lambda F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} \\ &= \sum_{s=2}^{n} \sum_{r=0}^{s-2} c_{n-s+r,\,n-s} z^r u^{n-s} + \sum_{s=1}^{n-2} \sum_{r=1}^{n-s-1} c_{n-s-r,\,n-s} z^{-r} u^{n-s} + P(z, u) \\ &= \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=-(n-s-1)}^{s-2} c_{n-s+r,\,n-s} z^r u^{n-s} + c_{0,0} + P(z, u). \end{aligned} \tag{15}$$

This again we may write in the form

$$\sum_{\lambda=1}^{d+Q} \frac{y_\lambda F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} + T_{n-2}(z, u) = \sum_{\mu=1}^{n-2} z^{-\mu} p_\mu(z, u) + c_{0,0} + P(z, u) \tag{16}$$

where the functions $p_\mu(z, u)$ are homogeneous polynomials in z, u of degree $n-1$ which are given by the formula

$$p_\mu(z, u) = \sum_{s=1}^{n} c_{n-1-\mu,\, n-s} z^{s-1} u^{n-s}.$$

Now if the expression (16) is not to become infinite for any of the n branches at ∞ the polynomials $p_1(z, u) \ldots p_{n-2}(z, u)$ must all vanish identically, as otherwise the expression would become infinite to the order $n-r-1$ for some one at least of these branches in case $p_r(z, u)$ be the first of these polynomials which does not vanish identically. Apart from $c_{0,0}$ then the coefficients c on the right of (15) must all have the value 0. These coefficients however include among them the coefficients of the polynomial $T_{n-2}(z, u)$ and this polynomial therefore must reduce to the constant $c_{0,0}$.

Our expression on the left of (16) will then take the form

$$(17) \qquad \sum_{\lambda=1}^{d+Q} \frac{y_\lambda F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} + c_{0,0}.$$

Since 0 is the value also of the remaining coefficients

$$c_{n-s-r,\, n-s} \qquad r=1, 2, \ldots, n-s-1, \quad s=1, 2, \ldots, n-2$$

on the right of (15), the equations (13) become

$$(18) \qquad 0 = \sum_{\sigma=0}^{s-1} \sum_{\rho=1}^{\sigma} e_{\rho,\, n-\sigma} y_{r-1+\rho,\, s-1-\sigma}. \qquad r=1, 2, \ldots, n-s-1, \quad s=1, 2, \ldots, n-2$$

This system of equations we shall attempt to satisfy by a proper choice of the quantites $y_{i,k}$ on the right. The number of these equations is evidently $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ and this also is the number of the quantities $y_{i,k}$ which present themselves in the equations, as may readily be shown. Namely the sum of the suffixes in a quantity $y_{r-1+\rho, s-1-\sigma}$ is $r+s-2+\rho-\sigma$ and for given values of r and s the greatest value which this sum can have is $r+s-2$ corresponding to the values $\rho=0$, $\sigma=0$. Also from (18) we see that $r+s-2$ cannot exceed $n-3$ in value. It follows therefore that the sum of the suffixes in a quantity $y_{i,k}$ which appears in

our equations, is in no case greater than $n-3$. Now the number of possible pairs of integers (i, k) whose sum is not greater than $n-3$ is $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, and that all the $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ corresponding quantities $y_{i,k}$ actually present themselves in our system of equations is immediately apparent, for each one of them in fact appears in some one of the equations with $e_{0,n}$ as coefficient, as we see on substituting for r, s in $y_{r-1,s-1}$ the several pairs of values given in (18).

§ 3.

The number of the quantities $y_{i,k}$ appearing in the equations (18) we have just seen to be equal to the number of the equations and we shall now seek to determine these quantities so as to satisfy the equations. For this purpose we shall write our equations in the form

$$(19)\qquad \begin{aligned} 0 = {} & e_{0,n}y_{r-1,s-1} + e_{1,n-1}y_{r,s-2} + e_{2,n-2}y_{r+1,s-3} + \cdots \\ & + e_{s-2,n-s+2}y_{r+s-3,1} + e_{s-1,n-s+1}y_{r+s-2,0} + \Gamma_{r-1,s-1} \end{aligned}$$

where evidently $\Gamma_{r-1,s-1}$ involves only quantities $y_{i,k}$ in which the sum of the suffixes is less than $r+s-2$.

The number of equations of the type (19) in which the sum of the suffixes of the quantities $y_{i,k}$ in evidence on the right has a given value $r+s-2=\tau$ is $\tau+1$, and these $\tau+1$ equations we shall group together and consider in the form

$$(20)\quad \left\{ \begin{array}{rl} e_{0,n}y_{0,\tau}+e_{1,n-1}y_{1,\tau-1}+e_{2,n-2}y_{2,\tau-2}+\cdots+e_{\tau-1,n-\tau+1}y_{\tau-1,1}+e_{\tau,n-\tau} & y_{\tau,0}=-\Gamma_{0,\tau} \\ e_{0,n}\quad y_{1,\tau-1}+e_{1,n-1}y_{2,\tau-2}+\cdots+e_{\tau-2,n-\tau+1}y_{\tau-1,1}+e_{\tau-1,n-\tau+1} & y_{\tau,0}=-\Gamma_{1,\tau-1} \\ e_{0,n}\quad y_{2,\tau-2}+\cdots+e_{\tau-3,n-\tau+1}y_{\tau-1,1}+e_{\tau-2,n-\tau+2} & y_{\tau,0}=-\Gamma_{2,\tau-} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ e_{0,n}\qquad y_{\tau-1,1}+e_{1,n-1} & y_{\tau,0}=-\Gamma_{\tau-1,1} \\ e_{0,n} & y_{\tau,0}=-\Gamma_{\tau,0}. \end{array} \right.$$

Suppose now that the quantities $y_{i,k}$ in which the sum of the suffixes is less than τ are all equal to 0. The same will then evidently also be

true of the quantities P on the right of the equations (20), for they are linear and homogeneous in the quantities $y_{i,k}$ the sum of whose suffixes is less than τ.

The equations (20) then become

$$\tag{21} \left| \begin{array}{r} e_{0,n}y_{0,\tau} + e_{1,n-1}y_{1,\tau-1} + e_{2,n-2}y_{2,\tau-2} + \ldots + e_{\tau-1,n-\tau+1}y_{\tau-1,1} + e_{\tau,n-\tau} \quad y_{\tau,0} = 0 \\ e_{0,n} \quad y_{1,\tau-1} + e_{1,n-1}y_{2,\tau-2} + \ldots + e_{\tau-2,n-\tau+2}y_{\tau-1,1} + e_{\tau-1,n-\tau+1}y_{\tau,0} = 0 \\ e_{0,n} \quad y_{2,\tau-2} + \ldots + e_{\tau-3,n-\tau+3}y_{\tau-1,1} + e_{\tau-2,n-3+2}y_{\tau,0} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_{0,n} \qquad y_{\tau-1,1} + e_{1,n-1} \qquad y_{\tau,0} = 0 \\ e_{0,n} \qquad y_{\tau,0} = 0. \end{array} \right.$$

Here the determinant of the coefficients is $e_{0,n}^{\tau+1}$ and is therefore different from 0, since by our hypothesis with regard to the curve $F(z, u) = 0$ the coefficient $e_{0,n}$ has a value other than 0. It follows hence that the quantities $y_{0,\tau}, y_{1,\tau-1}, \ldots, y_{\tau,0}$ must all have the value 0. If then all the quantities $y_{i,k}$ in which the sum of the suffixes is less than τ have the value 0, this also will be so in the case of those quantities in which the sum of the suffixes is equal to τ.

Now in the case $\tau = 0$ the system of equations (20) reduces to the single equation

$$e_{0,n}y_{0,0} = 0.$$

We therefore have $y_{0,0} = 0$ and it follows thence by our inductive reasoning above that the quantities $y_{0,1}$ and $y_{1,0}$ corresponding to the case $\tau = 1$ must also have the value 0, and by successive induction we see that the quantities $y_{i,k}$ for which $\tau = i + k$ has one of the values $2, 3, \ldots, n - 3$ must all be equal to 0. Substituting for these $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ quantities the value 0 in the corresponding equations of the type (12), we obtain the system of equations

$$\tag{22} \sum_{\lambda=1}^{d+Q} y_\lambda a_\lambda^i b_\lambda^k = 0. \qquad\qquad i+k=0,1,2,\ldots,n-3$$

Any rational function then whose infinities are of the first order only and correspond to ones among the Q points $(a_{d+1}, b_{d+1}) \ldots (a_{d+Q}, b_{d+Q})$ must

be of the form (17), and its coefficients y_λ must satisfy the conditions implied in the system of equations (22).

Conversely if the coefficients y_λ in a function of the form (17) satisfy the system of equations (22) the infinities of this function will be included under the Q infinities here in question. For a function of the type (17), constructed with the values of the quantites y_λ in question and reduced to the form on the right of (16), will evidently, by virtue of the equations (12) and (13), have all its coefficients c with the exception of $c_{0,0}$ equal to 0 and will therefore be finite for $z = \infty$.

The form (17) then in which the coefficients y_λ are subject to the conditions (22) give all those and only those rational functions whose infinities are included under the infinities of the first order corresponding to the Q points $(a_{d+1}, b_{d+1}) \ldots a_{d+Q}, b_{d+Q})$.

§ 4.

We shall now study the equations (22) more in detail and in the first place we shall consider the case in which $Q = 0$.

In this case our equations become

$$(23) \qquad \sum_{\lambda=1}^{d} y_\lambda a_\lambda^i b_\lambda^k = 0. \qquad {\scriptstyle i+k=0,1,2,\ldots,n-3}$$

The satisfaction of this system of equations by values of the quantities y_λ which are not all 0 would imply the existence of a function

$$\sum_{\lambda=1}^{d} \frac{y_\lambda F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} + c_{0,0}$$

which is nowhere infinite and which at the same time is not a constant. This however as we know is impossible, for an algebraic function must either be a constant or must somewhere become infinite. It follows therefore that the system of equations (23) can only be satisfied when all the quantities y_λ have the value 0 and this proves that the conditions for adjointness are independent of one another. The points $(a_1, b_1) \ldots (a_d, b_d)$ namely are the d double points of the curve and the conditions for ad-

jointness are those conditions which must be satisfied by the coefficients $\partial_{i,k}$ in the equation to a curve

(24) $$\sum_{i,k} \partial_{i,k} z^i u^k = 0$$

in order that it may pass through the double points. These conditions in the case of a curve of degree $n-3$ will be given by the d equations

(25) $$\sum_{i+k \leqq n-3} \partial_{i,k} a_\lambda^i b_\lambda^k = 0 \qquad {\scriptstyle \lambda=1,2,\ldots,d}$$

and these equations in the quantities $\partial_{i,k}$ must evidently be linearly independent of one another since, as we have seen, the system of equations (23) can only be satisfied when the quantities y_λ all have the value 0.

Since the d conditions for adjointness are independent of one another in the case of a curve of degree $n-3$ they will evidently also be independent of one another in the case of a curve whose degree is greater than $n-3$.

On defining the genus of a curve as the number of linearly independent adjoint polynomials of degree $n-3$ and on indicating the same by the letter p we shall evidently have

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d.$$

§ 5.

We shall now consider the system of equations (22) in the case where we have $Q > 0$.

For $Q \leqq p$ we see that equations (22) in general can only be satisfied on putting 0 for each of the quantities y_λ as otherwise the $d+Q$ equations

(26) $$\sum_{i+k \leqq n-3} \partial_{i,k} a_\lambda^i b_\lambda^k = 0 \qquad {\scriptstyle \lambda=1,2,\ldots,d+Q}$$

would not be independent of one another, whereas it is evident that these $d+Q$ equations are independent of one another in case the Q points $(a_{d+1}, b_{d+1}) \ldots (a_{d+Q}, b_{d+Q})$ are arbitrary, for the number $d+Q$ in this case is $\leqq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ the number of coefficients in a polynomial of degree $n-3$.

It follows then that it is impossible to construct a function of the form (17) other than a constant whose infinities, all of the first order, correspond to ones among the Q arbitrary points $(a_{d+1}, b_{d+1}) \ldots (a_{d+Q}, b_{d+Q})$ in the case where we have $Q \overline{<} p$.

It might however happen that we could construct such a function for a special set of Q points. If we can construct such a function in the case where $Q = p$ the p points $(a_{d+1}, b_{d+1}) \ldots (b_{d+Q}, b_{d+Q})$ will evidently all lie on an adjoint curve of degree $n - 3$, for in this case the $d + Q$ equations (26) will not all be independent of one another.

In the case where we have $Q \overline{>} p + 1$ it is always possible to satisfy the equations (22) by quantities y_λ not all of which have the value 0, for in this case these quantities are in excess of the number of the equations. It is therefore always possible to construct a rational function of z, u whose infinities are included under an arbitrary set of $p + 1$ infinities of the first order.

The strength of a system of Q points $(a_{d+1}, b_{d+1}) \ldots (a_{d+Q}, b_{d+Q})$ in determining an adjoint curve of degree $n - 3$ is defined as the number q of conditions to which the coefficients of the general adjoint curve of degree $n - 3$ must be subjected in order that it may pass through these Q points. The strength of any system of points can evidently not be greater than p for this is the number of arbitrary coefficients involved in the expression of the general adjoint curve of degree $n - 3$.

Returning to our system of equations (22) we see, that the number of arbitrary quantities y_λ presenting themselves in the most general system of solutions of these equations is equal to $Q - q$ the number namely of the $d + Q$ equations (26) taken in any given order, which are dependent on the equations preceding them in this order.

In other words the number of arbitrary coefficients, including the constant term, involved in the expression of the most general rational function of z, u whose infinities are included under a certain set of Q infinities, is $Q - q + 1$ where q is the strength of the set of infinities in question. This is the Riemann-Roch Theorem. The infinities which cannot actually present themselves in the function are those for which the corresponding quantities y_λ in the equations (22) must have the value 0, and to each of these we see corresponds an equation in the system of equations (26) which is independent of the remaining equations of the

system. We may then evidently say that in the general function here in question infinity corresponding to a point (a_λ, b_λ) does or does not actually present itself, according as the omission of this point from the system of Q points $(a_{\lambda+1}, b_{\lambda+1}) \ldots (a_{\lambda+Q}, b_{\lambda+Q})$ does not or does diminish the strength of the system.

The number of points of intersection of an adjoint curve of degree $n-3$ with our original curve, over and above the double points, is $n(n-3)-2d = 2p-2$. These $2p-2$ points determine our adjoint curve completely and their strength is therefore $p-1$.

The strength of $2p-1$ or more points is evidently p and from any set of $2p$ or more points we may therefore omit any point without diminishing the strength of the set. It will follow that in the case where we have $Q \geqq 2p$ all Q infinities will actually present themselves in the most general function whose infinities are included under the Q infinities in question.

§ 6.

In proving the Riemann-Roch Theorem we have excluded infinities corresponding to the double points. Such infinities however may also be taken account of by a slight extension of our reasoning.

Namely on indicating by (ξ, η) a pair of parameters connected by the equation to our curve $F(\xi, \eta) = 0$, we may readily shew that the function

$$\left[\frac{d}{d\xi}\frac{F(\xi, u)}{(z-\xi)(u-\eta)}\right]_{\xi=a,\, b=\eta}$$

becomes infinite to the first order for the double point (a, b) and for that branch only through the double point with regard to which the differentiation is effected, while it remains finite for all other finite points of the curve.

To indicate this function we shall employ the less accurate but more concise notation

$$\frac{d}{da}\frac{F(a, u)}{(z-a)(u-b)}.$$

We shall write

$$y = g + g' \frac{d}{da}$$

where g and g' are arbitrary constants and y is therefore an operator involving two arbitrary constants, so that we have

$$y \frac{F(a\,,u)}{(z-a)(u-b)} = \frac{gF(a\,,u)}{(z-a)(u-b)} + g' \frac{d}{da} \frac{F(a\,,u)}{(z-a)(u-b)}.$$

If we would determine the possibility of constructing a function whose infinities are included under a certain set of Q infinities some of which, say r in number, correspond respectively to r of the double points we should have, instead of the expression (5), to consider an expression

$$\sum_{\lambda=1}^{d+Q-r} y_\lambda \cdot \frac{F(a_\lambda\,,u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} + \tau_{n-2}(z\,,u)$$

where r of the symbols y_λ indicate symbolic operators of the form

$$g_\lambda + g'_\lambda \frac{d}{da_\lambda}.$$

With regard to this expression our reasoning would be the same as in the case of the expression (5), with some self-evident modifications due to replacing certain of the factors y_λ by operators which operate on whatever functions of $(a_\lambda\,,b_\lambda)$ they happen to precede.

In case infinities corresponding to each of the branches through a double point $(a\,,b)$ present themselves under the Q infinities in question, we should have to introduce a symbolic factor of the form

$$y = g + g'\left(\frac{d}{da}\right)_1 + g''\left(\frac{d}{da}\right)_2$$

where by the suffixes 1 and 2 we distinguish between operations having reference to the separate branches.

In any case our conclusion is that $Q - q + 1$ is the number of arbitrary constants involved in the expression of the most general rational function whose infinities are included under a certain set of Q infinities,

where q is the strength of the corresponding set of Q zeros in determining an adjoint polynomial of degree $n-3$ and further that a given one of the infinities in question will or will not actually present itself in such most general function, according as the omission of the corresponding zero from the set of Q zeros does not or does diminish the strength of the set.

Note. In his lectures for the year 1869 WEIERSTRASS in constructing a function possessing Q infinities of the first order makes use of the representation by partial fractions in the case where the fundamental algebraic curve possesses only double points.[1] In the present paper we are concerned with the same special case and employ the like representation though instead of treating our function with WEIERSTRASS under the form of a constant plus a linear expression in Q functions, each one of which possesses one of the Q infinities in question and a certain set of p other infinities, we handle the function directly in the form (5). What however more particularly characterizes the paper is its method of dealing with the equations of condition, a method which is applicable also in the case where our algebraic equation possesses any singularities whatever and where we would prove the RIEMANN-ROCH Theorem for any arbitrary combination of infinities. This will appear in a later paper where I shall present the theory of the algebraic functions as I have developed it for an arbitrary algebraic equation on employing the representation by means of partial fractions. The special theory here given then may be regarded as a preparation for the more general theory though in the specialization the important apparatus necessary to the handling of the higher singularities falls away.

Hamilton, Canada, June 11, 1901.

[1] See BRILL and NOETHER's *Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen.*

BEMERKUNGEN ZU EINEM SATZE VON SOPHUS LIE ÜBER EIN ANALOGON ZUM ABEL'SCHEN THEOREM

VON

LEO KÖNIGSBERGER

in HEIDELBERG.

In einem am 31^{ten} Mai 1879 an mich nach Wien gerichteten Briefe schreibt WEIERSTRASS: ». . . Sorgen Sie aber dafür, dass der hundertjährige Geburtstag ABEL's und JACOBI's würdig begangen werde, und gedenken Sie dann auch derer, die als die ersten es als ihre Lebensaufgabe betrachtet haben, die Arbeiten dieser Männer fortzusetzen, . . .». Dieser Mahnung eingedenk erscheint es bei Gelegenheit der Feier des hundertjährigen Geburtstages ABEL's, eines der grössten Mathematiker des neunzehnten Jahrhunderts, vielleicht nicht unpassend, wenn ich aus Briefen, welche der ausgezeichnete norwegische Mathematiker SOPHUS LIE, der der Wissenschaft nur allzufrüh durch den Tod entrissen worden, im Januar 1892 an mich nach Heidelberg gerichtet hat, einige Stellen veröffentliche, welche Untersuchungen über das verallgemeinerte ABEL'sche Theorem betreffen, die — so viel ich weiss — in seinen gedruckten Arbeiten sich nicht vorfinden, und an die ich einige Bemerkungen zu knüpfen mir erlauben will.

SOPHUS LIE schreibt ». . . Vielleicht werden Sie noch den folgenden Satz mit Interesse umfassen. Obgleich mein Beweis desselben ausserordentlich kurz ist, so beruht doch derselbe auf so eigenthümlichen geometrischen Anschauungen, dass ich vermuthe, dass mein Resultat neu ist. Ich betrachte $m+1$ Gleichungen von der Form

$$v_k = A_{k1}(t_1) + \ldots + A_{km}(t_m), \qquad (k=1,2,\ldots,m+1)$$

und mache über sie nur die einzige Voraussetzung, dass sich aus ihnen nur eine Relation zwischen $v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}$ ableiten lässt, dann ist die Relation

$$\Omega(v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}) = 0$$

dann und nur dann algebraisch, wenn zwei beliebige Grössen

$$A_{ki}(t_i), A_{ji}(t_i)$$

durch eine algebraische Relation gebunden sind. Setzen Sie insbesondere

$$A_{ki} = \int \varphi_{ki}(x_i) dx_i$$

und verstehen dabei unter $\varphi_{ki}(x_i)$ ganz beliebige (?) Functionen von x_i, so haben Sie einen Satz über Abel'sche Integrale, den man mit Benutzung eines Abel'schen Satzes noch mehr praecisiren kann. Darf ich Sie bitten, nur auf einer Postkarte mitzutheilen, ob mein Satz, der sich übrigens ausserordentlich verallgemeinern lässt, in der Literatur schon vorkommt. Ist der Satz bekannt, so bin ich darauf gespannt, ob der Beweis so einfach wie meiner ist. Mein Beweis beruht auf geometrischen Anschauungen, die zwar sehr einfach sind, die aber doch, soweit mir bekannt ist, fast nur von mir angewandt worden sind. Hoffentlich entschuldigen Sie meine fortgesetzten Mittheilungen. Wenn ich mich in diesen Dingen so unsicher fühle, so liegt es nur darin, dass ich plötzlich auf ein mir neues Gebiet hineingekommen bin. Der allgemeine Satz, der sich ebenfalls leicht beweisen lässt, lautet: Lassen sich aus $mn + 1$ gegebenen Gleichungen

$$v_k = A_{k1}(t_1, \ldots, t_m) + A_{k2}(t_{m+1}, \ldots, t_{2m}) + \ldots + A_{kn}(t_{m(n-1)+1}, \ldots, t_{mn}) \quad (k = 1, 2, \ldots, mn+1)$$

eine und nur eine Relation $\Omega(v_1, \ldots, v_{mn+1}) = 0$ ableiten, so ist dieselbe algebraisch dann und nur dann, wenn $m + 1$ beliebige Grössen

$$A_{k_1 i} \quad A_{k_2 i}, \ldots, A_{k_{m+1} i}$$

immer durch eine algebraische Relation gebunden sind. Dieser Satz wird doch jedenfalls wohl neu sein. Haben die A_{ki} die Form totaler Integrale von algebraischen Functionen, so hat der oben genannte Satz schon Werth; den Fall $m = 1$ haben Sie, wie ich erfahre, schon erledigt. Die Begründung meines ersten Satzes ist leider auf Mannigfaltigkeitsbetrachtungen begründet, die Ihnen vielleicht als reinem Algebraisten unangenehm sind,

Auch mein letzter Satz beruht auf Mannigfaltigkeitsbetrachtungen, ein rein analytischer Beweis würde sehr schwerfällig ausfallen.»

Es folgen auf meine Antwort in ferneren Briefen weitere Umgestaltungen, Veränderungen und Berichtigungen der angeführten Sätze, welche auf strengeren geometrischen Betrachtungen, die jedoch nicht angegeben sind, beruhen sollen, und es schliessen diese Mittheilungen mit der Bemerkung, die uns nach dem raschen Ende des ausgezeichneten Forschers wehmüthig ergreift: »Seit langer Zeit habe ich in dem Maasse an Schlaflosigkeit gelitten, dass ich alle Lust zur Wissenschaft verloren hatte. Als ich nun wieder anfing, wurde ich dadurch sehr überrascht, dass ich auf einem mir fremden Gebiete neue allgemeine Sätze fand. Meine nervöse Unruhe zwang mich dazu, sogleich nachzufragen, ob meine Resultate Werth hätten. Dadurch erklärt sich die verfrühte Mittheilung des letzten Satzes, gleichzeitig die nonchalante Form meiner Briefe . . .» Damit brach der Briefwechsel über diesen Gegenstand ab.

Ich will nun an dieser Stelle in wenigen kurzen Betrachtungen rein analytischer Natur auf den oben von Lie ausgesprochenen Satz näher eingehen,

dass, wenn sich aus $m + 1$ Gleichungen von der Form

(1) $$v_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + \dots + A_{km}(t_m) \qquad (k=1,2,\dots,m+1)$$

nur eine Relation zwischen $v_1, v_2, \dots, v_{m+1}$

(2) $$\Omega(v_1, v_2, \dots, v_{m+1}) = 0$$

ableiten lässt, dieselbe dann und nur dann algebraisch ist, wenn zwei beliebige Grössen

$$A_{ki}(t_i),\ A_{ji}(t_i)$$

algebraisch von einander abhängen,

und will dann den Zusammenhang mit der bekannten Arbeit von Abel darlegen »sur les fonctions qui satisfont à l'équation

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \psi(xf(y) + yf(x))»,$$

in welcher derselbe eine Erweiterung des algebraischen Additionstheorems anzubahnen beabsichtigte.

Setzt man die Beziehung (2) in die Form

(3) $$v_{m+1} = \omega(v_1, v_2, \ldots, v_m),$$

und bezeichnet für die constanten Werthe

$$t_2 = \tau_{21}, \quad t_3 = \tau_{31}, \quad \ldots, \quad t_m = \tau_{m1}$$

den Ausdruck

$$A_{k2}(\tau_{21}) + A_{k3}(\tau_{31}) + \ldots + A_{km}(\tau_{m1}) \quad \text{mit} \quad B_{k1},$$

für die constanten Werthe

$$t_1 = \tau_{12}, \quad t_3 = \tau_{32}, \quad \ldots, \quad t_m = \tau_{m2}$$

den Ausdruck

$$A_{k1}(\tau_{12}) + A_{k3}(\tau_{32}) + \ldots + A_{km}(\tau_{m2}) \quad \text{mit} \quad B_{k2}$$

u. s. w., so erhält man aus (3) die m Gleichungen

$$A_{m+11}(t_1) + B_{m+11} = \omega\big(A_{11}(t_1) + B_{11}, A_{21}(t_1) + B_{21}, \ldots, A_{m1}(t_1) + B_{m1}\big)$$
$$A_{m+12}(t_2) + B_{m+12} = \omega\big(A_{12}(t_2) + B_{12}, A_{22}(t_2) + B_{22}, \ldots, A_{m2}(t_2) + B_{m2}\big)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{m+1m}(t_m) + B_{m+1m} = \omega\big(A_{1m}(t_m) + B_{1m}, A_{2m}(t_m) + B_{2m}, \ldots, A_{mm}(t_m) + B_{mm}\big)$$

und somit durch Addition dieser Gleichungen wiederum nach (3)

$$\omega\big(A_{11}(t_1) + B_{11}, \ldots, A_{m1}(t_1) + B_{m1}\big) + \ldots + \omega\big(A_{1m}(t_m) + B_{1m}, \ldots, A_{mm}(t_m) + B_{mm}\big)$$
$$= \omega\big(A_{11}(t_1) + \ldots + A_{1m}(t_m), \ldots, A_{m1}(t_1) + \ldots + A_{mm}(t_m)\big) + B_{m+11} + \ldots + B_{m+1m}.$$

Durch Substitution eines willkührlichen, von den früheren verschiedenen Werthesystems

$$t_2 = \tau_2, \quad t_3 = \tau_3, \quad \ldots, \quad t_m = \tau_m$$

folgt nun, indem man zur Abkürzung die Constanten einführt

$$B_{11} = a_1, \; B_{21} = a_2, \ldots, B_{m1} = a_m, \; A_{\lambda 2}(\tau_2) + A_{\lambda 3}(\tau_3) + \ldots + A_{\lambda m}(\tau_m) = \alpha_\lambda,$$

und

$$A_{11}(t_1) = u_{11}, \quad A_{21}(t_1) = u_{21}, \quad \ldots, \quad A_{m1}(t_1) = u_{m1},$$

ferner die Constante

$$B_{m+11} + \dots + B_{m+1m} - \omega\big(A_{12}(\tau_2) + B_{12}, \dots, A_{m2}(\tau_2) + B_{m2}\big) - \dots$$
$$- \omega\big(A_{1m}(\tau_m) + B_{1m}, \dots, A_{mm}(\tau_m) + B_{mm}\big) = B$$

setzt, die Functionalgleichung in der Variabeln t_1

$$(4) \quad \omega(u_{11}+a_1, u_{21}+a_2, \dots, u_{m1}+a_m) = \omega(u_{11}+\alpha_1, u_{21}+\alpha_2, \dots, u_{m1}+\alpha_m)+B,$$

worin $a_1, a_2, \dots, a_m$ der Annahme gemäss von $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ verschieden sind, und ω nunmehr als algebraische Function vorausgesetzt werden soll.

Diese Gleichung kann eine in $u_{11}, u_{21}, \dots, u_{m1}$ identische sein oder sie liefert u_{m1} als algebraische Function von $u_{11}, u_{21}, \dots, u_{m-11}$.

Unter der Voraussetzung der Identität oder unter der Annahme, dass, wenn

$$u_{11} + \alpha_1 = U_1, \quad u_{21} + \alpha_2 = U_2, \dots, u_{m1} + \alpha_m = U_m, \quad a_k - \alpha_k = \mu_k$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$(5) \quad \omega(U_1 + \mu_1, U_2 + \mu_2, \dots, U_m + \mu_m) = \omega(U_1, U_2, \dots, U_m) + B$$

identisch befriedigt wird, würden, wenn die algebraische Function $\omega(U_1, U_2, \dots, U_m)$ der irreductibeln Gleichung genügt

$$(6) \qquad \omega^\rho + r_1(U_1, \dots, U_m)\omega^{\rho-1} + \dots + r_\rho(U_1, \dots, U_m) = 0,$$

in welcher $r_1, \dots, r_\rho$ rationale Functionen der Variabeln $U_1, U_2, \dots, U_m$ bedeuten, die Lösungen der Gleichung

$$(7) \quad \Omega^\rho + r_1(U_1+\mu_1, \dots, U_m+\mu_m)\,\Omega^{\rho-1} + \dots + r_\rho(U_1+\mu_1, \dots, U_m+\mu_m) = 0$$

sich von denen der Gleichung (6) nur um dieselbe additive Constante B unterscheiden, so dass dieselbe Function zusammengesetzt aus den Differenzen der Lösungen (6) und (7) unverändert bleibt. Bildet man nun eine aus den Differenzen der Lösungen bestehende symmetrische Function derselben, so wird diese als ganze rationale Function φ der Coefficienten der Gleichung aufgefasst bekanntlich der partiellen Differentialgleichung

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial r_1} + (\rho - 1) r_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r_2} + (\rho - 2) r_2 \frac{\partial \varphi}{\partial r_3} + \dots = 0$$

genügen, und da man, wie leicht zu sehen, stets ein in den neu ein-

tretenden Coefficienten lineares, in den früheren Coefficienten ganzes Integral bilden kann

$$(8)\quad \begin{cases} \varphi = r_2(U_1, \ldots, U_m) - \dfrac{\rho - 1}{2\rho} r_1(U_1, \ldots, U_m)^2 \\ \varphi = r_3(U_1, \ldots, U_m) - \dfrac{\rho - 2}{\rho} r_2(U_1, \ldots, U_m) r_1(U_1, \ldots, U_m) \\ \qquad + \dfrac{(\rho - 1)(\rho - 2)}{3\rho^2} r_1(U_1, \ldots, U_m)^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

so folgt, dass diese Ausdrücke rationale periodische Functionen von $U_1, \ldots, U_m$ mit den Perioden $\mu_1, \ldots, \mu_m$ sein werden.

Nun ergiebt sich aber zunächst aus der Vergleichung von (6) und (7), dass

$$(9)\quad r_1(U_1 + \mu_1, \ldots, U_m + \mu_m) = r_1(U_1, \ldots, U_m) - \rho B,$$

oder wenn man diese Gleichung nach U_λ differentiirt, worin λ einen beliebigen der Indices $1, 2, \ldots, m$ bedeutet, für die rationale Function

$$(10)\quad \frac{\partial r_1(U_1, \ldots, U_m)}{\partial U_\lambda} = \rho(U_1, \ldots, U_m)$$

die nothwendig identisch zu befriedigende Gleichung

$$(11)\quad \rho(U_1 + \mu_1, \ldots, U_m + \mu_m) = \rho(U_1, \ldots, U_m),$$

so dass nur die Form der periodischen rationalen Functionen beliebig vieler Variabeln zu bestimmen bleibt.

Um zunächst die Frage für ganze Functionen zu erörtern, so ist, ohne auf functionentheoretische Betrachtungen einzugehen, unmittelbar ersichtlich, dass eine periodische ganze Function *einer* Variabeln eine Constante sein muss, weil sonst zu einem bestimmten Werthe derselben unendlich viele Argumente gehören würden. Setzt man nun eine ganze periodische Function von zwei Variabeln u_1 und u_2 in die Form

$$g(u_1, u_2) = g_0(u_1)u_2^\lambda + g_1(u_1)u_2^{\lambda-1} + \ldots + g_\lambda(u_1),$$

so folgt aus der Periodicitätsbedingung

$$g(u_1 + \mu_1, u_2 + \mu_2) = g(u_1, u_2),$$

dass $g_0(u_1 + \mu_1) = g_0(u_1)$, also $g_0(u_1)$ gleich einer Constanten c ist, und wenn man nun die ganze periodische Function von u_1 und u_2 bildet

$$h(u_1, u_2) = \frac{c}{a_{22}^{\lambda}} (a_{12}u_1 + a_{22}u_2)^{\lambda},$$

welche, wenn die Constanten a_{12} und a_{22} der Bedingung genügen

$$a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2 = 0 \tag{12}$$

das Periodensystem μ_1, μ_2 besitzt, so wird die ganze Function zweier Variabeln

$$g(u_1, u_2) - h(u_1, u_2)$$

wieder dieselben Perioden haben, aber in Bezug auf u_2 nur vom $\lambda - 1^{\text{ten}}$ Grade sein. Erniedrigt man den Grad in Bezug auf u_2 in derselben Weise weiter, bis man zu einer ganzen periodischen Function nur einer Variabeln, also zu einer Constanten gelangt, so erhält man als allgemeinste Form von ganzen periodischen Functionen zweier Variabeln

$$\begin{aligned}(13)\qquad g(u_1, u_2) = A_0(a_{12}u_1 + a_{22}u_2)^{\lambda} + A_1(a_{12}u_1 + a_{22}u_2)^{\lambda-1} + \ldots \\ + A_{\lambda-1}(a_{12}u_1 + a_{22}u_2) + A_{\lambda}.\end{aligned}$$

Ordnet man weiter eine ganze Function der drei Variabeln u_1, u_2, u_3 wieder nach einer dieser Variabeln in der Form

$$g(u_1, u_2, u_3) = g_0(u_1, u_2)u_3^{\lambda} + g_1(u_1, u_2)u_3^{\lambda-1} + \ldots + g_{\lambda}(u_1, u_2), \tag{14}$$

so wird wieder, wenn die Periodicitätsgleichung bestehen soll

$$g(u_1 + \mu_1, u_2 + \mu_2, u_3 + \mu_3) = g(u_1, u_2, u_3),$$

die Function $g_0(u_1, u_2)$ der Beziehung

$$g_0(u_1 + \mu_1, u_2 + \mu_2) = g_0(u_1, u_2)$$

genügen müssen und daher nach dem Vorigen die Form haben

$$g_0(u_1, u_2) = B_0(a_{12}u_1 + a_{22}u_2)^{\mu} + B_1(a_{12}u_1 + a_{22}u_2)^{\mu-1} + \ldots + B_{\mu},$$

wenn $a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2 = 0$ ist. Bildet man sodann die mit den Perioden μ_1, μ_2, μ_3 behaftete Function

$$h(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{a_{33}^{\lambda}} g_0(u_1, u_2)(a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3)^{\lambda}, \tag{15}$$

worin die Constanten a_{13}, a_{23}, a_{33} der Bedingung unterliegen

$$a_{13}\mu_1 + a_{23}\mu_2 + a_{33}\mu_3 = 0,$$

so wird die Differenz

$$g(u_1, u_2, u_3) - h(u_1, u_2, u_3)$$

wiederum die Perioden μ_1, μ_2, μ_3 besitzen, aber in Bezug auf u_3 nur vom $\lambda - 1^{\text{ten}}$ Grade sein; die weitere Reduction des Grades in Bezug auf u_3 liefert somit als allgemeinste Form einer periodischen ganzen Function dreier Variabeln

$$(16)\quad g(u_1, u_2, u_3) = \sum_{\rho_1}\sum_{\rho_2} A_{\rho_1\rho_2}(a_{12}u_1 + a_{22}u_2)^{\rho_1}(a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3)^{\rho_2},$$

und es hat somit jede ganze Function von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ mit den Perioden $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ die Form

$$(17)\quad g(u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

$$= \sum_{\rho_1}\sum_{\rho_2}\ldots\sum_{\rho_{m-1}} A_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{m-1}}(a_{12}u_1 + a_{22}u_2)^{\rho_1}(a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3)^{\rho_2}\ldots$$
$$(a_{1m}u_1 + a_{2m}u_2 + \ldots + a_{mm}u_m)^{\rho_{m-1}},$$

worin die Constanten a_{12}, a_{22}, a_{13}, . . , a_{1m}, . . . , a_{mm} den Bedingungen unterliegen

$$(18)\quad a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2 = 0, \qquad a_{13}\mu_1 + a_{23}\mu_2 + a_{33}\mu_3 = 0, \quad \ldots,$$
$$a_{1m}\mu_1 + a_{2m}\mu_2 + \ldots + a_{mm}\mu_m = 0,$$

und geht somit, wenn

$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 = v_1, \qquad a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3 = v_2, \quad \ldots,$$
$$a_{1m}u_1 + a_{2m}u_2 + \ldots + a_{mm}u_m = v_{m-1}$$

gesetzt wird, in eine ganze Function der $m - 1$ Variabeln $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$ über.

Sei die in einer ganzen Function von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ vorkommende höchste Potenz von u_1 die λ_1^{te}, die in dem Coefficienten dieser Potenz vorkommende höchste Potenz von u_2 die λ_2^{te}, u. s. w. und nennen wir das so herausgehobene Glied der ganzen Function das höchste Glied derselben, so sieht man unmittelbar, dass die Substitution von

$$u_1 + \mu_1, u_2 + \mu_2, \ldots, u_m + \mu_m \quad \text{für} \quad u_1, u_2, \ldots, u_m$$

das höchste Glied der Function unverändert lässt; es folgt somit, *dass Zähler und Nenner einer rational gebrochenen periodischen Function selbst wieder ganze periodische Functionen sind, und diese daher allgemein die Form besitzt*

$$(19)\qquad r(u_1, u_2, \dots, u_m)$$

$$= \frac{\sum^{\rho_1}\sum^{\rho_2}\dots\sum^{\rho_{m-1}} A_{\rho_1\rho_2\dots\rho_{m-1}}(a_{12}u_1+a_{22}u_2)^{\rho_1}(a_{13}u_1+a_{23}u_2+a_{33}u_3)^{\rho_2}\dots(a_{1m}u_1+a_{2m}u_2+\dots+a_{mm}u_m)^{\rho_{m-1}}}{\sum^{\sigma_1}\sum^{\sigma_2}\dots\sum^{\sigma_{m-1}} B_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{m-1}}(a_{12}u_1+a_{22}u_2)^{\sigma_1}(a_{13}u_1+a_{23}u_2+a_{33}u_3)^{\sigma_2}\dots(a_{1m}u_1+a_{2m}u_2+\dots+a_{mm}u_m)^{\sigma_{m-1}}},$$

worin die Constanten $a_{12}, \dots, a_{m,m}$ *wieder den Bedingungen* (18) *unterliegen.*

Soll nun die rationale Function der Bedingungsgleichung (9)

$$(20)\qquad r_1(U_1+\mu_1, U_2+\mu_2, \dots, U_m+\mu_m) = r_1(U_1, U_2, \dots, U_m) - \rho B$$

unterworfen sein, in welcher ρB eine Constante bedeutet, so wird ihr nach einer der Variabeln U_λ genommener partieller Differentialquotient die Perioden $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ haben, und somit nach (19)

$$(21)\qquad \frac{\partial r_1(U_1, U_2 \dots U_m)}{\partial U_\lambda} =$$

$$\frac{\sum^{\rho_1}\sum^{\rho_2}\dots\sum^{\rho_{m-1}} A_{\rho_1\rho_2\dots\rho_{m-1}}(a_{12}U_1+a_{22}U_2)^{\rho_1}(a_{13}U_1+a_{23}U_2+a_{33}U_3)^{\rho_2}\dots(a_{1m}U_1+a_{2m}U_2+\dots+a_{mm}U_m)^{\rho_{m-1}}}{\sum^{\sigma_1}\sum^{\sigma_2}\dots\sum^{\sigma_{m-1}} B_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{m-1}}(a_{12}U_1+a_{22}U_2)^{\sigma_1}(a_{13}U_1+a_{23}U_2+a_{33}U_3)^{\sigma_2}\dots(a_{1m}U_1+a_{2m}U_2+\dots+a_{mm}U_m)^{\sigma_{m-1}}}$$

sein, und *hieraus ergiebt sich für die allgemeinste Form einer periodischen rationalen Function von* $U_1, U_2, \dots, U_m$, *welche der Gleichung* (20) *Genüge leistet*

$$(22)\qquad r_1(U_1, U_2, \dots, U_m) =$$

$$\frac{\sum^{\delta_1}\sum^{\delta_2}\dots\sum^{\delta_{m-1}} D_{\delta_1\delta_2\dots\delta_{m-1}}(a_{12}U_1+a_{22}U_2)^{\delta_1}(a_{13}U_1+a_{23}U_2+a_{33}U_3)^{\delta_2}\dots(a_{1m}U_1+a_{2m}U_2+\dots+a_{mm}U_m)^{\delta_{m-1}}}{\sum^{\varepsilon_1}\sum^{\varepsilon_2}\dots\sum^{\varepsilon_{m-1}} E_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_{m-1}}(a_{12}U_1+a_{22}U_2)^{\varepsilon_1}(a_{13}U_1+a_{23}U_2+a_{33}U_3)^{\varepsilon_2}\dots(a_{1m}U_1+a_{2m}U_2+\dots+a_{mm}U_m)^{\varepsilon_{m-1}}}$$

$$-\frac{\rho}{\mu_\lambda} B U_\lambda + C.$$

Gehen wir nun zur Bestimmung der allgemeinsten Form der durch die Gleichung (6) *definirten algebraischen Function über, welche der Beziehung* (5) *Genüge leistet*, so wird zunächst vermöge (9) die Form des Coefficienten $r_1(U_1, \dots, U_m)$ durch (22) bestimmt sein, und es werden somit *nach* (8),

da die Ausdrücke φ *rationale periodische Functionen von* $U_1, U_2, \ldots, U_m$, *also in der Form* (19) *darstellbar sind, die sämmtlichen Coefficienten der Gleichung* (6) *die Gestalt annehmen*

$$(23)\qquad r(U_1, U_2, \ldots, U_m) = R_0 + R_1 U_\lambda + R_2 U_\lambda^2 + \ldots + R_\alpha U_\lambda^\alpha,$$

wenn $R_0, R_1, \ldots, R_\alpha$ *rationale periodische Functionen von der durch die Gleichung* (19) *gegebenen Form sind.*

Hieraus folgt nun, dass sich unter der oben gemachten Voraussetzung der identischen Beziehung (5) nach (3), wenn für λ in dem Ausdrucke (23) der Index m gewählt wird, v_{m+1} als algebraische Function von

$$a_{12}v_1 + a_{22}v_2,\ a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3,\ \ldots,\ a_{1m}v_1 + a_{2m}v_2 + \ldots + a_{mm}v_m \text{ und } v_m$$

ergiebt, wenn die Constanten nach Feststellung der oben gewählten Perioden den Bedingungen unterliegen

$$a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2 = 0, \qquad a_{13}\mu_1 + a_{23}\mu_2 + a_{33}\mu_3 = 0, \quad \ldots,$$
$$a_{1m}\mu_1 + a_{2m}\mu_2 + \ldots + a_{mm}\mu_m = 0,$$

und die Coefficienten der v_{m+1} definirenden algebraischen Gleichung in Bezug auf die explicite vorkommende Grösse v_m von dem Grade ist, den der Index des Coefficienten anzeigt.

Fasst man aber ebenso in der Gleichung (2) v_m als algebraische Function von $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}, v_{m+1}$ auf, so wird sich auch v_m als algebraische Function von

$$a'_{12}v_1 + a'_{22}v_2,\ a'_{13}v_1 + a'_{23}v_2 + a'_{33}v_3,\ \ldots,$$
$$a'_{1m}v_1 + a'_{2m}v_2 + \ldots + a'_{m-1m}v_{m-1} + a'_{mm}v_{m+1} \quad \text{und} \quad v_{m+1}$$

darstellen lassen, worin die Constanten mit den Perioden $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_{m-1}, \mu'_{m+1}$ durch die Gleichungen verbunden sind

$$a'_{12}\mu'_1 + a'_{22}\mu'_2 = 0, \qquad a'_{13}\mu'_1 + a'_{23}\mu'_2 + a'_{33}\mu'_3 = 0, \quad \ldots,$$
$$a'_{1m}\mu'_1 + a'_{2m}\mu'_2 + \ldots + a'_{m-1m}\mu'_{m-1} + a'_{mm}\mu'_{m+1} = 0,$$

und wiederum die Coefficienten der algebraischen Gleichung in v_m in Bezug auf ihren Grad in v_{m+1} durch den Index des Coefficienten bestimmt sind; da nun in der ersten Darstellung v_{m-1} nur mit $v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}$ und mit $v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}, v_m$ additiv mit constanten Coefficienten verbunden

vorkommt, während in der zweiten Darstellung v_{m-1} nur mit $v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}$ und $v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}, v_{m+1}$ ebenfalls additiv mit constanten Coefficienten verbunden sich darstellt, und dieselben Überlegungen statthaben für jede der $m+1$ Variabeln $v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}$, wobei die Coefficienten der die periodischen Functionen definirenden algebraischen Gleichungen die oben angegebene Form besitzen, so sieht man leicht, *da oben vorausgesetzt war, dass zwischen den $m+1$ Grössen $v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}$ nur eine algebraische Relation existiren sollte, dass die Annahme der identischen Beziehung* (5) *nicht statthaft ist, wenn nicht die Beziehung* (3) *die Argumente $v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}$ nur linear enthält,* in welchem Falle sich in der That nichts über die Eigenschaften der in dem Gleichungsystem (1) enthaltenen Functionen aussagen lässt.

Nachdem die Voraussetzung der Identität der Gleichung (4) erledigt ist, bleibt nur zu untersuchen, was aus der Existenz dieser in den Grössen $u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{m1}$ algebraischen Beziehung gefolgert werden kann.

Bezeichnet man mit Berücksichtigung der Bedeutung der Grössen $u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{m1}$ diese algebraische Beziehung durch

$$\Omega_{11}\big(A_{11}(t_1),\, A_{21}(t_1),\, \ldots,\, A_{m1}(t_1)\big) = 0$$

und die analog wie oben aus (3) durch Einsetzen von speciellen Werthesystemen von

$$t_1, t_3, \ldots, t_m\,;\ t_1, t_2, t_4, \ldots, t_m\,;\ \ldots\,;\ t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$$

hergeleiteten algebraischen Gleichungen durch

$$\Omega_{12}\big(A_{12}(t_2),\, A_{22}(t_2),\, \ldots,\, A_{2m}(t_2)\big) = 0\,, \quad \ldots\,,$$
$$\Omega_{1m}\big(A_{1m}(t_m),\, A_{2m}(t_m),\, \ldots,\, A_{mm}(t_m)\big) = 0,$$

schafft man ferner, ebenso wie früher v_{m+1}, aus der algebraischen Beziehung (2) jetzt $v_m, v_{m-1}, \ldots, v_2$ heraus, so dass sich die Beziehungen

$$\Omega_{21}\big(A_{11}(t_1),\, A_{21}(t_1),\, \ldots,\, A_{m-11}(t_1),\, A_{m+11}(t_1)\big) = 0\,, \quad \ldots\,,$$
$$\Omega_{2m}\big(A_{1m}(t_m),\, A_{2m}(t_m),\, \ldots,\, A_{m-1m}(t_m),\, A_{m+1m}(t_m)\big) = 0$$

. . . .

$$\Omega_{m1}\big(A_{11}(t_1),\, A_{31}(t_1),\, \ldots,\, A_{m1}(t_1),\, A_{m+11}(t_1)\big) = 0\,, \quad \ldots\,,$$
$$\Omega_{mm}\big(A_{1m}(t_m),\, A_{3m}(t_m),\, \ldots,\, A_{m-1m}(t_m),\, A_{m+1m}(t_m)\big) = 0$$

ergeben, so wird man aus dem Systeme der m offenbar von einander unabhängigen Gleichungen

$$\Omega_{1i}\big(A_{1i}(t_i), A_{2i}(t_i), A_{3i}(t_i), \ldots, A_{m-1i}(t_i), A_{mi}(t_i)\big) = 0$$

$$\Omega_{2i}\big(A_{1i}(t_i), A_{2i}(t_i), A_{3i}(t_i), \ldots, A_{m-1i}(t_i), A_{m+1i}(t_i)\big) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Omega_{mi}\big(A_{1i}(t_i), A_{3i}(t_i), \ldots, A_{mi}(t_i), A_{m+1i}(t_i)\big) = 0$$

$m - 1$ der $m + 1$ A-Grössen eliminiren und *somit für beliebige k und j eine algebraische Beziehung zwischen $A_{ki}(t_i)$ und $A_{ji}(t_i)$ herleiten können.*

Besteht nun umgekehrt zwischen je zwei Functionen

$$A_{ki}(t_i) \quad \text{und} \quad A_{ji}(t_i)$$

eine algebraische Beziehung, so erhält man m^2 algebraische Gleichungen, welche mit den $m + 1$ Gleichungen (1) zusammengestellt $m^2 + m + 1$ Gleichungen liefern, aus denen die $m(m + 1)$ Grössen

$$A_{1i}(t_i), A_{2i}(t_i), \ldots, A_{m+1i}(t_i) \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,m)}$$

unter der Voraussetzung, dass ein und nur ein Zusammenhang zwischen den Grössen $v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}$ identisch für alle $t_1, t_2, \ldots, t_m$ besteht, eliminirt werden können, so dass sich ein algebraischer Zusammenhang von der Form (2) ergiebt.

Der von Lie ausgesprochene Satz lautet demnach folgendermassen:

Wenn sich aus $m + 1$ Gleichungen von der Form

$$(24) \qquad \left|\begin{array}{l} A_{11}(t_1) + A_{12}(t_2) + \ldots + A_{1m}(t_m) = v_1 \\ A_{21}(t_1) + A_{22}(t_2) + \ldots + A_{2m}(t_m) = v_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{m1}(t_1) + A_{m2}(t_2) + \ldots + A_{mm}(t_m) = v_m \\ A_{m+11}(t_1) + A_{m+12}(t_2) + \ldots + A_{m+1m}(t_m) = v_{m+1} \end{array}\right.$$

nur eine Relation $v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}$

$$(25) \qquad \Omega(v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}) = 0$$

ableiten lässt, so ist diese, wenn sie nicht die Argumente $v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}$

nur linear enthält, dann und nur dann algebraisch, wenn zwei beliebige Grössen

$$A_{ki}(t_i) \quad \textit{und} \quad A_{ji}(t_i) \quad \textit{für} \quad k\,,j = 1\,,2\,,\ldots,m+1\,, \quad i = 1\,,2\,,\ldots,m$$

algebraisch von einander abhängen.

Wir wollen den Satz zum Zwecke der Anwendung desselben noch anders aussprechen:

Wenn für beliebige Argumente $u_1\,,u_2\,,\ldots,u_m$ *und den Functionen dieser Argumente*

$$B_{11}(u_1)\,,B_{21}(u_1)\,,\ldots,B_{m1}(u_1)\,,\quad\ldots,\quad B_{1m}(u_m)\,,B_{2m}(u_m)\,,\ldots,B_{mm}(u_m)$$

eine und nur eine in den Argumenten $u_1\,,u_2\,,\ldots,u_m$ *identische Relation von der Form besteht*

$$(16)\quad \Omega\big(u_1+u_2+\ldots+u_m\,,B_{11}(u_1)+B_{12}(u_2)+\ldots+B_{1m}(u_m)\,,\ldots,\\ B_{m1}(u_1)+B_{m2}(u_2)+\ldots+B_{mm}(u_m)\big)=0,$$

so ist diese dann und nur dann algebraisch, wenn die sämmtlichen B-Functionen algebraische Functionen ihrer Argumente sind, oder dass, wenn diese alle oder nur zum Theil transcendent sind, die Beziehung (26) *ebenfalls eine transcendente sein muss, vorausgesetzt, dass die Relation* (26) *nicht eine in ihren Argumenten lineare ist.*

oder endlich,

wenn für die Umkehrungsfunctionen des Systems

$$\begin{aligned} B_{11}(u_1)+B_{12}(u_2)+\ldots+B_{1m}(u_m) &= w_1\\ B_{21}(u_1)+B_{22}(u_2)+\ldots+B_{2m}(u_m) &= w_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ B_{m1}(u_1)+B_{m2}(u_2)+\ldots+B_{mm}(u_m) &= w_m, \end{aligned}$$

welche mit

$$u_1 = \varphi_1(w_1\,,w_2\,,\ldots,w_m)\,,\qquad u_2=\varphi_2(w_1\,,w_2\,,\ldots,w_m)\,,\qquad\ldots\\ u_m=\varphi_m(w_1\,,w_2\,,\ldots,w_m)$$

bezeichnet werden mögen, eine und nur eine Relation von der Form besteht

$$\Omega(w_1, w_2, \ldots, w_m, \varphi_1(w_1, w_2, \ldots, w_m) + \varphi_2(w_1, w_2, \ldots, w_m) + \ldots + \varphi_m(w_1, w_2, \ldots w_m)) = 0$$

so ist diese, wieder von dem Falle der linearen Relation abgesehen, dann und nur dann algebraisch, wenn die $B(u_k)$ selbst algebraische Functionen von u_k, also auch die $\varphi_\lambda(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ algebraische Functionen ihrer Argumente sind.

Während Lie die Ausdehnung des algebraischen Additionstheorems auf allgemeine algebraische Beziehungen zwischen Transcendenten im Auge hat, geht Abel in seiner Arbeit[1] »sur les fonctions qui satisfont à l'équation $\varphi(x) + \varphi(y) = \psi\big(xf(y) + yf(x)\big)$» darauf aus, transcendente Beziehungen für das Additionstheorem zu ermitteln, und ich will noch in einigen Worten das, was Abel dort angedeutet, ergänzen, indem ich zunächst die Frage aufwerfe, wie die Functionen φ_1, φ_2 und ψ beschaffen sein müssen, damit

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(y) = \psi\big(F(x, y)\big) \tag{27}$$

ist, worin die Form von $F(x, y)$ nachher näher bestimmt werden soll.

Zunächst darf zur Vereinfachung der Untersuchung angenommen werden, dass $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$ ist, da, wenn dies nicht der Fall ist, und zwei Auflösungen der Gleichungen $\varphi_1(x) = 0$ und $\varphi_2(y) = 0$ mit ξ und η bezeichnet werden, die Substitution von $x = x' + \xi$, $y = y' + \eta$ die Gleichung (27) in die ähnlich gestaltete überführt, für welche $x' = 0$ und $y' = 0$ die Summanden der linken Seite verschwinden lassen. Aus der Beziehung (27) ergiebt sich nunmehr für $y = 0$ resp. $x = 0$

$$\varphi_1(x) = \psi\big(F(x, 0)\big) = \psi(x_1), \qquad \varphi_2(y) = \psi\big(F(0, y)\big) = \psi(y_1),$$

und die Gleichung (27) geht somit in

$$\psi(x_1) + \psi(y_1) = \psi\big(f(x_1, y_1)\big)$$

oder endlich, wenn

$$\psi(x_1) = X, \qquad \psi(y_1) = Y \quad \text{oder} \quad x_1 = \chi(X), \qquad y_1 = \chi(Y)$$

[1] Oeuvres complètes, nouv. édition, tome premier, XVII.

gesetzt wird, in

$$X + Y = \psi f(\chi(X), \chi(Y))$$

oder in

$$\chi(X + Y) = f(\chi(X), \chi(Y))$$

über, worin f eine algebraische oder transcendente Function sein kann.

Nachdem gezeigt worden, dass die Untersuchung der Gleichung (27) stets auf die einer Functionalgleichung von der Form

$$\varphi(x + y) = f(\varphi(x), \varphi(y)) \tag{28}$$

zurückgeführt werden kann, ist unmittelbar ersichtlich, dass es sich um die Ermittlung derjenigen Functionen handelt, welche ein algebraisches oder transcendentes Additionstheorem haben, und es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass die zu (27) analogen Functionalgleichungen für Functionen von mehreren unabhängigen Variabeln ebenfalls auf die Untersuchung der entsprechenden Additionstheoreme führen.

Substituirt man für das Additionstheorem (28) gleich das allgemeine Functionaltheorem

$$\psi(\omega(x, y)) = F(\psi(x), \psi(y)), \tag{29}$$

worin $\omega(x, y)$ eine algebraische Function von x und y bedeutet, und bezeichnet φ die inverse Function der ψ-Function, so geht dasselbe über in

$$\varphi(F(x, y)) = \omega(\varphi(x), \varphi(y)), \tag{30}$$

und es ist somit nur dieses zum Geschlechte 1 gehörige Functionaltheorem zu untersuchen, in welchem ω eine algebraische Function der Argumente $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ bedeutet. Für den Fall dass $F(x, y)$ eine algebraische Function von x und y sein soll, habe ich die Frage in meiner Arbeit[1] »*Beweis von der Unmöglichkeit der Existenz eines andern Functionaltheorems als des Abel'schen*» beantwortet; soll jedoch F eine transcendente Function bedeuten dürfen, so erhalten wir durch Differentiation von (30) nach x und y

$$\frac{\partial\varphi}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial\varphi(x)}\varphi'(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial\varphi(y)}\varphi'(y)$$

und hieraus durch Elimination von $\frac{\partial\varphi}{\partial F}$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi(y)}\varphi'(y) = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi(x)}\varphi'(x). \tag{31}$$

[1] Journal für Mathematik. B. 100 und 101.

Ist nun die algebraische Function ω von $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ durch die irreductible Gleichung definirt

$$(32)\qquad \omega^n + r_1(\varphi(x), \varphi(y))\omega^{n-1} + r_2(\varphi(x), \varphi(y))\omega^{n-2} + \ldots + r_n(\varphi(x), \varphi(y)) = 0,$$

worin $r_1, r_2, \ldots, r_n$ rationale Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, so lassen sich bekanntlich die partiellen Ableitungen von ω nach $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ genommen in der Form von ganzen Functionen $n-1^{\text{ten}}$ Grades von ω darstellen mit Coefficienten, die rational aus $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ zusammengesetzt sind, so dass die Gleichung (31) die Gestalt annimmt

$$(33)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}\left[\rho_1(\varphi(x), \varphi(y))\omega^{n-1} + \ldots + \rho_n(\varphi(x), \varphi(y))\right]\varphi'(y)$$
$$= \frac{\partial F}{\partial y}\left[\sigma_1(\varphi(x), \varphi(y))\omega^{n-1} + \ldots + \sigma_n(\varphi(x), \varphi(y))\right]\varphi'(x).$$

Setzt man nun in (32) und (33) $y = 0$ und eliminirt die Function $(\omega)_{y=0}$, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$(34)\qquad G\left(\varphi(0), \varphi'(0), \varphi(x), \varphi'(x), \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y=0}, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y=0}\right) = 0,$$

worin G eine ganze Function der eingeschlossenen Grössen bedeutet. Differentiirt man ferner die Gleichung (33) nach y, eliminirt wiederum ω und setzt $y = 0$, so ergiebt sich

$$(35)\qquad G_1\left(\varphi(0), \varphi'(0), \varphi''(0), \varphi(x), \varphi'(x), \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y=0}, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y=0}, \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{y=0}, \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{y=0}\right) = 0,$$

worin G_1 wiederum eine ganze Function darstellt, und aus den Gleichungen (34) und (35) wird sich die Bestimmung der gesuchten Functionen ergeben.

Um zunächst nur auf den von Abel für das Additionstheorem zu Grunde gelegten Fall, in welchem

$$F(x, y) = xf(y) + yf(x), \qquad \omega(\varphi(x), \varphi(y)) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

ist, näher einzugehen, so ist unmittelbar ersichtlich, dass, wenn

$$\varphi'(0) = a, \qquad f(0) = \alpha, \qquad f'(0) = \alpha'$$

gesetzt wird, die Gleichung (33) oder (31) in

$$(36)\qquad (f(y) + yf'(x))\varphi'(y) = (f(x) + xf'(y))\varphi'(x)$$

und für $y = 0$ in

$$(37) \qquad \big(f(x) + \alpha' x\big)\varphi'(x) = a\alpha$$

übergeht. Differentiirt man nun (36) nach y, so folgt

$$\big(f(y) + yf'(x)\big)\varphi''(y) + \big(f'(y) + f'(x)\big)\varphi'(y) = xf''(y)\varphi'(x)$$

und für $y = 0$

$$(38) \qquad \alpha\varphi''(0) + \big(\alpha' + f'(x)\big)a = xf''(0)\varphi'(x),$$

welche, wenn aus (37) der Werth von $\varphi'(x)$ und der hieraus durch Differentiation nach x sich ergebende Werth von $\varphi''(0) = -\frac{2\alpha'}{\alpha} a$ eingesetzt und $-\alpha'^2 - \alpha' f''(0)$ mit m bezeichnet wird, in

$$(39) \qquad f'(x)\big(f(x) + \alpha' x\big) + \big(mx - \alpha' f(x)\big) = 0$$

übergeht. Diese Gleichung stimmt mit der Gleichung (11) von Abel überein, und deren Integral liefert, wenn $m = -n^2$ gesetzt wird, die Function $f(x)$ aus der Gleichung

$$\alpha^{2n} = \big(f(x) - nx\big)^{n+\alpha'}\big(f(x) + nx\big)^{n-\alpha'},$$

während $\varphi(x)$ nach (37) durch den Ausdruck gegeben ist

$$\varphi(x) = a\alpha \int_0 \frac{dx}{f(x) + \alpha' x}.$$

Ebenso einfach gestaltet sich der viel allgemeinere Fall, in welchem

$$F(x, y) = xf(y) + y\chi\big(f(x)\big) + y^2\chi_1\big(f(x)\big), \qquad \omega\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

ist, wie überhaupt durch die Aufstellung der Differentialgleichungen (34), (35) sowie der weiter zu bildenden die Methode zur Herleitung aller zum Geschlechte 1 gehörigen transcendenten Functionaltheoreme für Functionen *einer* Variabeln gegeben ist, und ebenso vollzieht sich die Aufstellung der zum Geschlechte 2 gehörigen, die sich in der Form darstellen

$$G\big(\varphi(F_1(x, y, z)), \varphi(F_2(x, y, z)), \varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)\big) = 0,$$

worin G eine ganze Function der eingeschlossenen Grössen und F_1, F_2 wiederum transcendente Functionen bedeuten, u. s. w. Sind aber Functionen von mehreren unabhängigen Variabeln gegeben, und soll z. B.

wieder ein zum Geschlechte 1 gehöriges Functionaltheorem bestehen, welches dann in der Form darzustellen ist

$$G_1\big(\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(x_1, x_2), \varphi_2(y_1, y_2)\big), \varphi_1\big[F_1(x_1, y_1), F_2(x_2, y_2)\big] = 0$$

$$G_2\big(\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(x_1, x_2), \varphi_2(y_1, y_2)\big), \varphi_2\big[F_1(x_1, y_1), F_2(x_2, y_2)\big] = 0,$$

worin G_1 und G_2 wiederum ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen, F_1 und F_2 transcendente Functionen bedeuten, so führen ganz analoge Betrachtungen auf die zugehörigen partiellen Differentialgleichungen zur Bestimmung der gesuchten Functionen.

UBER GRUPPEN DER ORDNUNG $p^\alpha q^\beta$

VON

G. FROBENIUS

in BERLIN.

Angeregt durch die bahnbrechenden Arbeiten von GAUSS haben ABEL und GALOIS das Fundament der modernen Algebra geschaffen und insbesondere die Bedingungen für die Auflösbarkeit einer algebraische Gleichung entwickelt. Mit Hülfe derselben gelingt es in einer Reihe von Fällen, wo die Ordnung der Gleichung bekannt ist, ihre Auflösbarkeit allein aus der Art zu erkennen, wie diese Zahl aus Primfactoren zusammengesetzt ist. Auch in diesem Bereiche von Untersuchungen hat ABEL den ersten Schritt gethan, indem er bewies, dass jede Gleichung von Primzahlordnung auflösbar ist. Diesen Satz hat Herr SYLOW in einer für die Gruppentheorie grundlegenden Arbeit auf Gleichungen ausgedehnt, deren Ordnung eine Potenz einer Primzahl ist. Im Folgenden beschäftige ich mich mit Gleichungen, deren Ordnung nur durch zwei verschiedene Primzahlen theilbar ist.

In meiner Arbeit *Über endliche Gruppen*, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1895, habe ich folgenden Satz bewiesen:

I. *In einer Gruppe $\mathfrak{H}$, deren Ordnung genau durch die α^{te} Potenz der Primzahl p theilbar ist, und die mehr als eine Gruppe $\mathfrak{A}$ der Ordnung p^α enthält, wähle man zwei dieser Untergruppen so, dass die Ordnung p^δ ihres grössten gemeinsamen Divisors $\mathfrak{D}$ möglichst gross ist. Bilden die mit $\mathfrak{D}$ vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{H}$ die Gruppe $\mathfrak{D}'$ der Ordnung d', so sei p^β die höchste in d' aufgehende Potenz von p.*

Dann ist $\mathfrak{D}$ eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{D}'$, nämlich der grösste gemeinsame Divisor von je zwei in $\mathfrak{D}'$ enthaltenen Gruppen $\mathfrak{B}$ der Ordnung p^β. Jede Gruppe $\mathfrak{B}$ ist in einer und nur einer Gruppe $\mathfrak{A}$ enthalten, und jede durch $\mathfrak{D}$ theilbare Gruppe $\mathfrak{A}$ enthält eine und nur eine Gruppe $\mathfrak{B}$. Die Anzahl der durch $\mathfrak{D}$ theilbaren Gruppen $\mathfrak{A}$ ist gleich der Anzahl der Gruppen $\mathfrak{B}$. Sie ist $\equiv 1$ (mod. $p^{\beta-\delta}$) und $> p^{\beta-\delta} > 1$. Demnach ist $\beta > \delta$, und d' stets durch eine von p verschiedene Primzahl theilbar.

Jedes Element von $\mathfrak{H}$, das mit $\mathfrak{D}'$ vertauschbar ist, ist in $\mathfrak{D}'$ enthalten. Ist $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ enthalten, und bilden die mit $\mathfrak{A}$ vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{H}$ die Gruppe $\mathfrak{A}'$, und die mit $\mathfrak{B}$ vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{D}'$ die Gruppe $\mathfrak{B}'$, so ist $\mathfrak{B}'$ der grösste gemeinsame Divisor von $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{D}'$.

Aus diesem Princip ergiebt sich die Auflösbarkeit jeder Gruppe der Ordnung $p^\alpha q$, wo q eine von p verschiedene Primzahl ist, und allgemeiner der Ordnung $p^\alpha q^\mu$, wo μ der Exponent ist, zu dem q (mod. p) gehört (A. a. O. § 6), ferner der Ordnung $p^\alpha q^2$ (Burnside, *Theory of groups*, § 244; C. Jordan, Liouv. Journ. sér. 5, tome 4, 1898) und der Ordnung $p^\alpha q^\beta$, wo $\beta < 2\mu$ ist (Burnside, § 243). Diese Sätze will ich hier etwas einfacher herleiten und auf Gruppen der Ordnung $p^\alpha q^{2\mu}$ ausdehnen, sowie auf solche Gruppen der Ordnung $p^\alpha q^\beta$, die nicht mehr als q^μ Gruppen der Ordnung p^α enthalten.

Um die Entwicklung nicht unterbrechen zu müssen, schicke ich folgenden Hülfssatz voraus:

II. *Ist eine Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung h mit jedem Elemente einer Gruppe $\mathfrak{P}$ vertauschbar, deren Ordnung eine Potenz einer Primzahl p ist, und bilden die Elemente von $\mathfrak{H}$, die mit jedem Elemente von $\mathfrak{P}$ vertauschbar sind, eine Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung g, so ist $h \equiv g$ (mod. p).*

Ist A ein Element von $\mathfrak{H}$, und P ein Element von $\mathfrak{P}$, so ist $P^{-1}AP = B$ auch ein Element von $\mathfrak{H}$. Zwei solche Elemente von $\mathfrak{H}$ nenne ich *conjugirt in Bezug auf* $\mathfrak{P}$. Sind zwei Elemente einem dritten conjugirt, so sind sie es auch unter einander. Daher kann man die h Elemente von $\mathfrak{H}$ in Classen conjugirter Elemente eintheilen. Jedes der g Elemente von $\mathfrak{G}$ bildet für sich eine Classe. Ist p^λ die Ordnung von $\mathfrak{P}$, ist A nicht in $\mathfrak{G}$ enthalten, so ist A mit $p^\alpha < p^\lambda$ Elementen von $\mathfrak{P}$ vertauschbar, und folglich mit $p^{\lambda-\alpha}$ Elementen von $\mathfrak{H}$ conjugirt. Ist B nicht in $\mathfrak{G}$ enthalten, und

auch nicht mit A conjugirt, so ist B mit $p^{\lambda-\beta} > 1$ Elementen von $\mathfrak{H}$ conjugirt. Daher ist $h = g + p^{\lambda-\alpha} + p^{\lambda-\beta} + \ldots \equiv g \pmod{p}$.

Nun sei $\mathfrak{H}$ eine Gruppe der Ordnung $h = p^\alpha q^\beta$. Sind dann $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Untergruppen der Ordnungen p^α und q^β, so ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Ist allgemeiner $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe der Ordnung $p^\alpha q^\sigma$, so ist auch $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}\mathfrak{B}$. Demnach bilden die Elemente von $\mathfrak{B}$ ein vollständiges Restsystem von $\mathfrak{H}$ (mod. $\mathfrak{G}$), und man erhält die Untergruppen, die mit $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ conjugirt sind, schon sämmtlich indem man $\mathfrak{G}$ mit jedem Elemente von $\mathfrak{B}$ transformirt. Sei B ein von E verschiedenes invariantes Element von $\mathfrak{B}$. Ist dann B in $\mathfrak{G}$ enthalten, so zeigt diese Betrachtung, dass auch die mit $\mathfrak{G}$ conjugirten Gruppen alle das Element B enthalten. Der grösste gemeinsame Divisor $\mathfrak{D}$ dieser Gruppen ist aber eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$. Ist also $\sigma < \beta$, so ist $\mathfrak{H}$ zusammengesetzt. Ich schliesse daher in den Beweisen der beiden folgenden Sätze den Fall aus, wo ein invariantes Element B einer Gruppe $\mathfrak{B}$ in einer Untergruppe der Ordnung $p^\alpha q^\sigma$ $(\sigma < \beta)$ enthalten ist, oder wo ein invariantes Element A einer Gruppe $\mathfrak{A}$ in einer Untergruppe der Ordnung $p^\rho q^\beta$ $(\rho < \alpha)$ enthalten ist.

III. *Sind p und q zwei verschiedene Primzahlen, und gehört q (mod. p) zum Exponenten μ, so ist jede Gruppe der Ordnung $p^\alpha q^\beta$ auflösbar, die nicht mehr als q^μ Gruppen der Ordnung p^α enthält.*

Es genügt zu zeigen, dass eine Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung $h = p^\alpha q^\beta$, die nicht mehr als q^μ Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ der Ordnung p^α enthält, stets eine invariante Untergruppe $\mathfrak{G}$ besitzt. Dann hat nämlich die Gruppe $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$ der Ordnung $p^\gamma q^\delta < h$ die Untergruppe $\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}}$ der Ordnung p^γ und die mit ihr conjugirten Untergruppen $\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}}, \frac{\mathfrak{A}_2\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}}, \ldots$, deren Anzahl $\leqq q^\mu$ ist.

Bilden die mit $\mathfrak{A}$ vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{H}$ die Gruppe $\mathfrak{A}'$ der Ordnung $p^\alpha q^\lambda$, so enthält $\mathfrak{H}$ $q^{\beta-\lambda}$ Gruppen der Ordnung p^α, von denen je zwei conjugirt sind, und es ist $q^{\beta-\lambda} \equiv 1 \pmod{p}$. Ist daher $\beta - \lambda$ kleiner als der Exponent μ, zu dem q (mod. p) gehört, so ist $\beta - \lambda = 0$, also ist $\mathfrak{A}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$. Sei also $\beta = \lambda + \mu$. Sind nicht je zwei der q^μ mit $\mathfrak{A}$ conjugirten Gruppen theilerfremd, so sei $\mathfrak{D}$ die in Satz I definirte Gruppe. Dann ist die Anzahl der durch $\mathfrak{D}$ theilbaren Gruppen $\mathfrak{A}$ höchstens gleich q^μ, grösser als 1, eine Potenz von q

und $\equiv 1 \pmod{p}$, also gleich q^μ. Daher ist $\mathfrak{D}$ der grösste gemeinsame Divisor aller q^α mit $\mathfrak{A}$ conjugirten Gruppen, also eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$. Seien also je zwei der Gruppen $\mathfrak{A}$ theilerfremd. Dann ist $q^\alpha \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$. Ist nun $\lambda = 0$, $\beta = \mu$, so enthält $\mathfrak{H}$ $(p^\alpha - 1)q^\beta + 1$ Elemente, deren Ordnung in p^α aufgeht, also eine invariante Untergruppe $\mathfrak{B}$ der Ordnung q^β. Sei also $\lambda > 0$.

1) Sei O ein Element von $\mathfrak{H}$, dessen Ordnung eine Potenz von q ist, $\mathfrak{B}$ eine durch O theilbare Untergruppe der Ordnung q^β, B ein invariantes Element von $\mathfrak{B}$. Dann ist B nicht in der Gruppe $\mathfrak{A}'$ der Ordnung $p^\alpha q^\lambda$ enthalten, also nicht mit $\mathfrak{A}$ vertauschbar, die Gruppe $B^{-1}\mathfrak{A}B$ ist demnach von $\mathfrak{A}$ verschieden. Die mit O vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{H}$ bilden eine Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung $p^\rho q^\sigma$. $\mathfrak{G}$ enthält das Element B und eine Gruppe $\mathfrak{R}$ der Ordnung p^ρ, also auch die Gruppe $B^{-1}\mathfrak{R}B$. Sei $\mathfrak{A}$ eine durch $\mathfrak{R}$ theilbare Gruppe der Ordnung p^α.

Ist $\rho > 0$, so ist $B^{-1}\mathfrak{R}B$ von $\mathfrak{R}$ verschieden. Denn sonst wäre $\mathfrak{R} = B^{-1}\mathfrak{R}B$ ein gemeinsamer Divisor der beiden verschiedenen Gruppen $\mathfrak{A}$ und $B^{-1}\mathfrak{A}B$. Demnach enthält $\mathfrak{G}$ mehrere Gruppen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_x, \ldots$ der Ordnung p^ρ. Zwei dieser Gruppen, $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$, können nicht in derselben Gruppe $\mathfrak{A}$ der Ordnung p^α enthalten sein. Denn sonst wären sie auch in dem grössten gemeinsamen Divisor von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}$ enthalten dessen Ordnung höchstens p^ρ sein kann. Ist also $\mathfrak{R}_x$ in $\mathfrak{A}_x$ enthalten, so sind die Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ alle unter einander verschieden. Daher ist die Anzahl der Gruppen $\mathfrak{R}_x$ höchstens gleich q^μ, grösser als 1, eine Potenz von q und $\equiv 1 \pmod{p}$, also gleich q^μ. Nun ist O mit $\mathfrak{R}_x$ vertauschbar, also auch mit $\mathfrak{A}_x$, weil sonst die beiden verschiedenen Gruppen $\mathfrak{A}_x$ und $O^{-1}\mathfrak{A}_x O$ beide durch $\mathfrak{R}_x$ theilbar wären. Folglich ist O in $\mathfrak{A}'_x$ enthalten, also haben die q^α mit $\mathfrak{A}'$ conjugirten Gruppen $\mathfrak{A}'_x$ alle einen Theiler gemeinsam, und demnach ist $\mathfrak{H}$ zusammengesetzt.

Sei also $\rho = 0$ für jedes O; dann ist ein Element von $\mathfrak{H}$, dessen Ordnung eine Potenz von p ist, nie mit einem Elemente vertauschbar, dessen Ordnung eine Potenz von q ist, und $\mathfrak{H}$ enthält kein Element, dessen Ordnung durch p und q theilbar ist.

2) Die Untergruppe $\mathfrak{A}'$ der Ordnung $p^\alpha q^\lambda$ enthält p^α Elemente, deren Ordnungen in p^α aufgehen, und kein Element, dessen Ordnung durch pq theilbar ist, also $p^\alpha(q^\lambda - 1) + 1$ Elemente, deren Ordnungen in q^λ aufgehen. Dies ist aber möglich, wenn $\mathfrak{A}'$ p^α verschiedene Untergruppen $\mathfrak{B}$

der Ordnung q^{λ} enthält, und je zwei derselben theilerfremd sind. Daher ist $p^{\alpha} \equiv 1 \pmod{q^{\lambda}}$, und weil $q^{\mu} \equiv 1 \pmod{p^{\alpha}}$ ist, so ist $\lambda < \mu$.

Seien $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_x, \ldots$ die p^{α} in $\mathfrak{A}'$ enthaltenen Gruppen der Ordnung q^{λ} (> 1). Eine Gruppe $\mathfrak{B}$ der Ordnung q^{β} kann nicht zwei dieser Gruppen enthalten, weil die Ordnung des grössten gemeinsamen Divisors von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}'$ höchstens gleich q^{λ} sein kann. Ist also $\mathfrak{L}_x$ in $\mathfrak{B}_x$ enthalten, so sind die p^{α} Gruppen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ alle unter einander verschieden. Daher enthält $\mathfrak{H}$ nicht weniger und auch nicht mehr als p^{α} Gruppen $\mathfrak{B}$ der Ordnung q^{β}.

Von den p^{α} Gruppen $\mathfrak{B}$ können nicht je zwei theilerfremd sein. Sonst enthielten sie zusammen $(q^{\beta} - 1)p^{\alpha} + 1$ Elemente, und folglich enthielte $\mathfrak{H}$ nur eine Gruppe $\mathfrak{A}$. Wählt man zwei der Gruppen $\mathfrak{B}$ so, dass die Ordnung q^{δ} ihres grössten gemeinsamen Divisors $\mathfrak{D}$ möglichst gross ist, so ist $\delta > 0$. Die mit $\mathfrak{D}$ vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{H}$ bilden eine Gruppe $\mathfrak{D}'$ der Ordnung $p^{\rho}q^{\sigma}$, wo $\rho > 0$ und $\sigma > \delta$ ist. Ist $\rho = \alpha$, so ist $\mathfrak{H}$ zusammengesetzt, nämlich falls $\sigma < \beta$ ist, weil $\mathfrak{D}'$ jedes invariante Element B jeder durch $\mathfrak{D}$ theilbaren Gruppe $\mathfrak{B}$ enthält, und falls $\sigma = \beta$ ist, weil $\mathfrak{D}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ist.

3) Die Annahme $\rho < \alpha$ aber ist unzulässig. Denn sei $\mathfrak{R}$ eine in $\mathfrak{D}'$ enthaltene Gruppe der Ordnung p^{ρ}. Dann ist $\mathfrak{D}$ mit jedem Elemente von $\mathfrak{R}$ vertauschbar, aber kein Element von $\mathfrak{D}$ ausser E. Nach Satz II ist folglich $q^{\delta} \equiv 1 \pmod{p}$, also $\delta = \mu$, mithin $\sigma > \mu > \lambda$.

Da $\rho < \alpha$ ist, so ist $\mathfrak{R}$ in einer Gruppe der Ordnung $p^{\rho+1}$ als invariante Untergruppe enthalten. Sei P ein Element dieser Gruppe, das nicht in der Gruppe $\mathfrak{D}'$ der Ordnung $p^{\rho}q^{\sigma}$ enthalten ist. Dann ist $P^{-1}\mathfrak{D}P = \mathfrak{D}_1$ von $\mathfrak{D}$ verschieden und mit jedem Elemente von $P^{-1}\mathfrak{R}P = \mathfrak{R}$ vertauschbar.

$\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ haben keinen Theiler gemeinsam. Denn ihr grösster gemeinsamer Theiler wäre mit jedem Elemente von $\mathfrak{R}$ vertauschbar, aber keines seiner Elemente ausser E. Daher wäre nach Satz II seine Ordnung $\equiv 1 \pmod{p}$, also gleich q^{μ}, der Ordnung von $\mathfrak{D}$.

Aus demselben Grunde haben $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}'$, die beide mit jedem Elemente von $\mathfrak{R}$ vertauschbar sind, kein Element gemeinsam. Denn sonst wäre die Ordnung ihres grössten gemeinsamen Theilers gleich q^{μ}, dieser Theiler wäre $\mathfrak{D}_1$, wäre in $\mathfrak{D}'$ enthalten, $\mathfrak{D}$ wäre also mit jedem Elemente von $\mathfrak{D}_1$ vertauschbar. Folglich wäre $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ eine Gruppe der Ordnung $q^{2\mu}$, während h nur durch q^{β} theilbar ist, und $\beta = \lambda + \mu < 2\mu$ ist.

Kein Element von $\mathfrak{D}_1$ ausser E ist in $\mathfrak{D}'$ enthalten, also mit $\mathfrak{D}$ vertauschbar. Transformirt man daher $\mathfrak{D}$ mit jedem Elemente von $\mathfrak{D}_1$, so erhält man q^μ verschiedene mit $\mathfrak{D}$ conjugirte Gruppen. Da $\mathfrak{D}$ mit $p^\rho q^\sigma$ Elementen von $\mathfrak{H}$ vertauschbar ist, so enthält $\mathfrak{H}$ genau $p^{\alpha-\rho} q^{\beta-\sigma}$ mit $\mathfrak{D}$ conjugirte Gruppen. Folglich ist $q^\mu < p^{\alpha-\rho} q^{\beta-\sigma}$. Nun ist $q^\mu = 1 + rp^\alpha$ und $p^\alpha \equiv 1 \pmod{q^\lambda}$, also da $\lambda < \mu$ ist, $r \equiv -1 \pmod{q^\lambda}$. Daher ist

$$q^\mu = 1 - p^\alpha + sp^\alpha q^\lambda > p^\alpha(q^\lambda - 1).$$

Mithin ist

$$p^\alpha(q^\lambda - 1) < p^{\alpha-\rho} q^{\beta-\sigma}, \qquad p^\rho(q^\lambda - 1) < q^{\lambda-(\sigma-\mu)}.$$

Da aber $\rho > 0$ und $\sigma > \mu$ ist, so ist

$$p^\rho > 1, \qquad q^\lambda - 1 > q^{\lambda-(\sigma-\mu)}.$$

Daher kann der betrachtete Fall $(\rho < \alpha)$ nicht eintreten.

IV. *Sind p und q zwei verschiedene Primzahlen, gehört q (mod. p) zum Exponenten μ, und ist $\beta \leq 2\mu$, so ist jede Gruppe der Ordnung $p^\alpha q^\beta$ auflösbar.*

Auch hier genügt es zu zeigen dass $\mathfrak{H}$ keine einfache Gruppe ist. Dies ergiebt sich aus dem Satze III, wenn $\mathfrak{A}'$ die Ordnung $p^\alpha q^{\beta-\mu}$ hat, also stets, wenn $\beta < 2\mu$ ist. Es ist also nur der Fall zu betrachten, wo $\beta = 2\mu$ und $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ ist. Dann enthält $\mathfrak{H}$ $q^{2\mu}$ Gruppen $\mathfrak{A}$. Sind je zwei derselben theilerfremd, so ist $\mathfrak{B}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$. Seien also $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ die in Satz I definirten Gruppen, und seien ihre Ordnungen $p^\delta > 1$ und $d' = p^\rho q^\sigma$. Dann werde ich zunächst zeigen, dass $\mathfrak{H}$ zusammengesetzt ist, wenn nicht 1) $\sigma = \mu$ und 2) $\rho = \alpha$ ist.

1) $\sigma = \mu$: Die Gruppe $\mathfrak{D}'$ enthält mehrere Gruppen $\mathfrak{R}$ der Ordnung p^ρ, also q^μ oder $q^{2\mu}$. Im letzteren Falle ist $\mathfrak{D}$ in allen $q^{2\mu}$ mit $\mathfrak{A}$ conjugirten Gruppen enthalten, und eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$. Sei also q^μ die Anzahl der Gruppen $\mathfrak{R}$, demnach $\sigma \geq \mu$.

Sei $\mathfrak{S}$ eine in $\mathfrak{D}'$ enthaltene Gruppe der Ordnung q^σ, und $\mathfrak{B}$ eine durch $\mathfrak{S}$ theilbare Gruppe der Ordnung $q^{2\mu}$. Ist $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{D}$ theilbar, so ist $\mathfrak{D}$ mit p^ρ Elementen von $\mathfrak{A}$ vertauschbar. Transformirt man also $\mathfrak{D}$ mit den p^α Elementen von $\mathfrak{A}$, so erhält man $p^{\alpha-\rho}$ mit $\mathfrak{D}$ conjugirte Gruppen, deren eine gleich $\mathfrak{D}$ ist. Dasselbe gilt für jede der q^μ Gruppen $\mathfrak{A}$, die durch $\mathfrak{D}$ theilbar sind. Je zwei derselben haben ausser $\mathfrak{D}$ keinen Theiler gemeinsam.

Sie enthalten daher zusammen $(p^{\alpha-\rho}-1)q^\mu+1$ verschiedene Gruppen, die mit $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{H}$ conjugirt sind. Im ganzen enthält $\mathfrak{H}$, da $\mathfrak{D}$ mit $p^\rho q^\sigma$ Elementen vertauschbar ist, $p^{\alpha-\rho}q^{2\mu-\sigma}$ solche Gruppen. Daher ist

$$(p^{\alpha-\rho}-1)q^\mu < p^{\alpha-\rho}q^{2\mu-\sigma}, \qquad (p^{\alpha-\rho}-1)q^{\sigma-\mu} < p^{\alpha-\rho}.$$

Folglich ist nicht $\sigma > \mu$, sondern $\sigma = \mu$.

Zu demselben Ergebniss führt die Bemerkung, dass die Gruppe $\mathfrak{D}'$ in dem Falle $\sigma > \mu$ ein Element O der Ordnung q enthielte, das mit $\mathfrak{R}$, aber nicht mit $\mathfrak{A}$ vertauschbar wäre. Zwei verschiedene Gruppe $\mathfrak{A}$ und $O^{-1}\mathfrak{A}O$ können aber nicht eine Gruppe $\mathfrak{R} = O^{-1}\mathfrak{R}O$ der Ordnung $p^\rho > p^\delta$ gemeinsam haben.

2) $\rho = \alpha$: Es giebt in $\mathfrak{H}$ $p^{\alpha-\rho}q^\mu$ mit $\mathfrak{D}$ conjugirte Gruppen, von denen mindestens $p^{\alpha-\rho}q^\mu - q^\mu + 1$ in den q^μ Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ enthalten sind, die durch $\mathfrak{D}$ theilbar sind. Jede dieser q^μ Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ enthält eine der q^μ Gruppen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots$ der Ordnung p^ρ, durch die $\mathfrak{D}'$ theilbar ist. Da $\mathfrak{D}' = \mathfrak{R}\mathfrak{S}$ ist, so giebt es in $\mathfrak{S}$ ein solches Element S, dass $S^{-1}\mathfrak{R}S = \mathfrak{R}_x$ ist. Ist also $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{A}$ enthalten, so ist $\mathfrak{R}_x$ in $\mathfrak{A}_x = S^{-1}\mathfrak{A}S$ enthalten. Je zwei der Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ können also durch ein Element von $\mathfrak{S}$ in einander transformirt werden.

Nun sei $\mathfrak{S}$ *irgend* eine in $\mathfrak{D}'$ enthaltene Gruppe der Ordnung q^μ, und $\mathfrak{B}$ *irgend* eine durch $\mathfrak{S}$ theilbare Gruppe der Ordnung $q^{2\mu}$. Dann ist $\mathfrak{S}$ der grösste gemeinsame Theiler von $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{B}$, und $\mathfrak{D}$ ist mit den q^μ Elementen von $\mathfrak{S}$, aber mit keinen anderen Elemente von $\mathfrak{B}$ vertauschbar. Transformirt man daher $\mathfrak{D}$ mit den $q^{2\mu}$ Elementen von $\mathfrak{B}$, so erhält man q^μ verschiedene mit $\mathfrak{D}$ conjugirte Gruppen $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_x, \dots$, deren eine gleich $\mathfrak{D}$ ist. Von den $q^\mu - 1$ übrigen ist keine in einer der q^μ Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ enthalten, die durch $\mathfrak{D}$ theibar sind. Denn sei O ein Element von $\mathfrak{B}$, und sei $O\mathfrak{D}O^{-1}$ in $\mathfrak{A}$ enthalten. Dann ist $\mathfrak{D}$ in $O^{-1}\mathfrak{A}O = \mathfrak{A}_x$ enthalten. Wie oben gezeigt, ist aber auch $S^{-1}\mathfrak{A}S = \mathfrak{A}_x$, wo S ein Element von $\mathfrak{S}$, also auch von $\mathfrak{B}$ ist. Daher ist OS^{-1} mit $\mathfrak{A}$ vertauschbar, also in $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ enthalten, aber auch in $\mathfrak{B}$, und folglich ist $OS^{-1} = E$, also ist $O = S$ in $\mathfrak{S}$ enthalten. Ist also O in $\mathfrak{B}$, aber nicht in $\mathfrak{S}$ enthalten, so ist $O\mathfrak{D}O^{-1}$ in keiner der q^μ Gruppen $\mathfrak{A}$ enthalten, die durch $\mathfrak{D}$ theilbar sind. Ist

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{S} + \mathfrak{S}O_1 + \mathfrak{S}O_2 + \dots$$

so ist $O_1O_2^{-1}$ nicht in $\mathfrak{S}$ enthalten. Transformirt man also $\mathfrak{D}$ mit allen Ele-

menten von $\mathfrak{B}$, so erhält man q^μ Gruppen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_1 = O_1^{-1}\mathfrak{D}O_1$, $\mathfrak{D}_2 = O_2^{-1}\mathfrak{D}O_2, \ldots$, von denen ausser $\mathfrak{D}$ keine in einer der q^μ Gruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \ldots$ enthalten ist. Diese aber enthalten von den $p^{\alpha-\rho}q^\mu$ mit $\mathfrak{D}$ conjugirten Gruppen mindestens $p^{\alpha-\rho}q^\mu - q^\mu + 1$. Daher enthalten sie auch nicht mehr, genau $q^\mu - 1$ der mit $\mathfrak{D}$ conjugirten Gruppen, etwa $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_x, \ldots$ sind in keiner durch $\mathfrak{D}$ theilbaren Gruppe $\mathfrak{A}$ enthalten, und die q^μ Gruppen $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots$ und keine anderen findet man, indem man $\mathfrak{D}$ mit den $q^{2\mu}$ Elementen *irgend* einer Gruppe $\mathfrak{B}$ transformirt, die mit $\mathfrak{D}'$ einen Theiler $\mathfrak{S}$ der Ordnung q^μ gemeinsam hat. Diese geistreiche Überlegung bildet den Kern des Beweises, den Herr C. Jordan für die Auflösbarkeit der Gruppen der Ordnung $p^\alpha q^2$ gegeben hat.

Nun sei P irgend ein Element von $\mathfrak{D}'$, und O irgend ein Element von $\mathfrak{B}$. Dann kann man zu den q^μ Gruppen $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_x, \ldots$ auch gelangen, indem man statt $\mathfrak{B}$ die Gruppe $P^{-1}\mathfrak{B}P$ benutzt, die mit $\mathfrak{D}'$ die Gruppe $P^{-1}\mathfrak{S}P$ gemeinsam hat. Transformirt man also $\mathfrak{D}$ mit dem Elemente $P^{-1}OP$ der Gruppe $P^{-1}\mathfrak{B}P$, so erhält man eine jener Gruppe $\mathfrak{D}_x$. Es giebt aber auch in $\mathfrak{B}$ ein Element O', das $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{D}_x$ transformirt. Daher ist $P^{-1}OPO'^{-1}$ mit $\mathfrak{D}$ vertauschbar, also in $\mathfrak{D}'$ enthalten. Mithin ist auch $OPO'^{-1} = P'$ in $\mathfrak{D}'$ enthalten. Sind also P und O irgend zwei Elemente von $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{B}$, so giebt es in diesen Gruppen zwei solche Elemente P' und O', dass $OP = P'O'$ ist. Daher sind $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{D}$ mit einander vertauschbar, ihr Product $\mathfrak{B}'\mathfrak{D} = \mathfrak{D}\mathfrak{B}'$ ist eine Gruppe, deren Ordnung gleich $p^\rho q^{2\mu}$ ist, weil der grösste gemeinsame Divisor $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}'$ die Ordnung q^μ hat.

Ist aber A ein invariantes Element einer der durch $\mathfrak{D}$ theilbaren Gruppen $\mathfrak{A}$, so ist A in $\mathfrak{D}'$, also auch in $\mathfrak{B}\mathfrak{D}'$ enthalten. Ist also $\rho < \alpha$, so ist $\mathfrak{H}$ zusammengesetzt.

3) Ist $\rho = \alpha$ und $\sigma = \mu$, so enthält $\mathfrak{H}$ genau q^μ mit $\mathfrak{D}$ conjugirte Gruppen $\mathfrak{D}_x$. Die mit $\mathfrak{D}_x$ vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{H}$ bilden eine Gruppe $\mathfrak{D}'_x$ der Ordnung $p^\alpha q^\mu$. Sie enthält von den q^μ mit $\mathfrak{D}$ conjugirten Gruppen nur die eine $\mathfrak{D}_x$, und von den $q^{2\mu}$ mit $\mathfrak{A}$ conjugirten Gruppen genau q^μ, nämlich die, welche durch $\mathfrak{D}_x$ theilbar sind. Jede der $q^{2\mu}$ Gruppen $\mathfrak{A}$ enthält nur eine der q^μ Gruppen $\mathfrak{D}$. Jede der q^μ Gruppen $\mathfrak{D}$ ist in q^μ der $q^{2\mu}$ Gruppen $\mathfrak{A}$ enthalten, und diese sind alle in $\mathfrak{D}'$ enthalten. Zwei verschiedene Gruppen $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{D}'_1$ haben keine Gruppe $\mathfrak{A}$ gemeinsam.

Man wähle $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{D}'_1$ so, dass sie beide durch eine Gruppe $\mathfrak{T}$ theilbar

sind, deren Ordnung p^τ eine möglichst hohe Potenz von p ist. Dann ist $\tau < \alpha$. Ist $\tau > 0$, so hat $\mathfrak{H}$ stets eine invariante Untergruppe: Die mit $\mathfrak{T}$ vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{H}$ bilden eine Gruppen $\mathfrak{T}'$, deren Ordnung $p^\rho q^\sigma < h$ sei. Da $\tau < \alpha$ ist, so ist $\rho > \tau$. Ist $\sigma = 2\mu$, so ist $\mathfrak{H}$ zusammengesetzt, weil $\mathfrak{T}'$ ein Element A enthält, das in einer Gruppe $\mathfrak{A}$ invariant ist. Sei also $\sigma < 2\mu$.

Die in $\mathfrak{T}'$ enthaltenen Gruppen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots$ der Ordnung p^ρ können nicht alle in $\mathfrak{D}'$ enthalten sein. Denn $\mathfrak{T}$ ist mit den Elementen einer in $\mathfrak{D}'_1$ enthaltenen Gruppe der Ordnung $p^{\tau+1}$ vertauschbar. Diese ist also in $\mathfrak{T}'$, mithin in einer der Gruppen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \ldots$, also in $\mathfrak{D}'$ enthalten, während die Ordnung des grössten gemeinsamen Theilers von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'_1$ nur durch p^τ theilbar ist. Damit ist der Fall erledigt, wo $\mathfrak{T}'$ nur eine Gruppe $\mathfrak{R}$ enthält.

Im anderen Falle enthält $\mathfrak{T}'$, da $\sigma < 2\mu$ ist, q^μ Gruppen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \ldots$. Von diesen sind nicht zwei in $\mathfrak{D}'$ enthalten. Denn sonst wäre der grösste gemeinsame Theiler von $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{D}'$ eine Gruppe der Ordnung $p^\rho q^\mu$ und enthielte zwei, also q^μ der Gruppen $\mathfrak{R}$, und folglich wären die q^μ Gruppen $\mathfrak{R}$ alle in $\mathfrak{D}'$ enthalten. Ist also $\mathfrak{R}_x$ in $\mathfrak{D}'_x$ enthalten, so sind die q^μ Gruppen $\mathfrak{D}', \mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2, \ldots$ alle unter einander verschieden. Die q^μ mit $\mathfrak{D}'$ conjugirten Gruppen sind folglich alle durch $\mathfrak{T}$ theilbar, also ist $\mathfrak{H}$ zusammengesetzt.

Sei demnach $\tau = 0$. Dann haben zwei der q^μ Gruppen $\mathfrak{D}'$ kein Element gemeinsam, dessen Ordnnng eine Potenz von p ist. Nun enthält $\mathfrak{D}'$ q^μ Gruppen $\mathfrak{A}$, die durch $\mathfrak{D}$ theilbar sind, sonst aber kein Element gemeinsam haben. Daher enthält $\mathfrak{D}'$ ausser dem Hauptelemente $(p^\alpha - p^\delta)q^\mu + p^\delta - 1$ Elemente, deren Ordnungen in p^α aufgehen, und die q^μ mit $\mathfrak{D}'$ conjugirten Gruppen enthalten

$$p^\alpha q^{2\mu} - (q^\mu - 1)(p^\delta q^\mu + 1)$$

solche Elemente. Die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{H}$, deren Ordnungen in p^α aufgehen, ist aber durch p^α theilbar. Daher ist $q^\mu \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$.

4) Sei O ein Element von $\mathfrak{H}$, dessen Ordnung eine Potenz von q ist. Die mit O vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{H}$ bilden eine Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung $p^\rho q^\sigma$. Man kann O so wählen, dass $\rho > 0$ ist. Denn sonst enthielte $\mathfrak{H}$ kein Element, dessen Ordnung durch p und q theilbar ist, also

$$(q^\mu - 1)(p^\delta q^\mu + 1) + 1 = p^\delta q^{2\mu} - (p^\delta - 1)q^\mu$$

Elemente, deren Ordnungen in $q^{2\mu}$ aufgehen. Diese Anzahl muss durch $q^{2\mu}$ theilbar sein. Daher wäre $p^\delta \equiv 1 \pmod{q^\mu}$, während $q^\mu \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ ist.

Seien $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ zwei in $\mathfrak{T}$ enthaltene Gruppen der Ordnungen p^ρ und q^σ, $\mathfrak{B}$ eine durch $\mathfrak{S}$ theilbare Gruppe der Ordnung $q^{2\mu}$, B ein invariantes Element von $\mathfrak{B}$. Dann ist B in $\mathfrak{G}$ enthalten. Ist also $\rho = \alpha$, so ist $\mathfrak{H}$ zusammengesetzt. Sei also $0 < \rho < \alpha$. B ist nicht in der Gruppe $\mathfrak{D}'$ der Ordnung $p^\alpha q^\mu$ enthalten, also nicht mit $\mathfrak{D}$, und auch nicht mit $\mathfrak{D}'$ vertauschbar. Daher ist $\mathfrak{R}$ von $B^{-1}\mathfrak{R}B$ verschieden. Denn sonst wäre $\mathfrak{R} = B^{-1}\mathfrak{R}B$ in den beiden verschiedenen Gruppen $\mathfrak{D}'$ und $B^{-1}\mathfrak{D}'B$ enthalten, während diese nach der gemachten Annahme keinen Theiler gemeinsam haben, dessen Ordnung eine Potenz von p ist. Folglich enthält $\mathfrak{G}$ mehrere Gruppen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots$, also q^μ oder $q^{2\mu}$. Im letzteren Falle wäre $\sigma = 2\mu$, und wäre $\mathfrak{R}$ mit keinem Elemente von $\mathfrak{G}$ vertauchbar, dessen Ordnung eine Potenz von q ist. Da aber $\mathfrak{R}$ mit O vertauschbar ist, so enthält $\mathfrak{G}$ genau q^μ Gruppen $\mathfrak{R}$. Von diesen sind nicht zwei in $\mathfrak{D}'$ enthalten. Denn sonst enthielte auch der grösste gemeinsame Theiler von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{D}'$ zwei, also q^μ, also alle Gruppen $\mathfrak{R}$. Mithin enthielte $\mathfrak{D}'$ die Gruppe $B\mathfrak{R}B^{-1}$, und $\mathfrak{R}$ wäre in den beiden verschiedenen Gruppen $\mathfrak{D}'$ und $B^{-1}\mathfrak{D}'B$ enthalten.

Ist also $\mathfrak{R}_x$ in $\mathfrak{D}'_x$ enthalten, so sind die q^μ Gruppen $\mathfrak{D}'_x$ alle unter einander verschieden. Nun ist O mit $\mathfrak{R}_x$ vertauschbar, also auch mit $\mathfrak{D}'_x$, weil sonst die beiden Gruppen $\mathfrak{D}'_x$ und $O^{-1}\mathfrak{D}'_x O$ verschieden und beide durch $\mathfrak{R}_x$ theilbar wären. Folglich ist O in $\mathfrak{D}'_x$ enthalten, also in allen mit $\mathfrak{D}'$ conjugirten Gruppen, und mithin ist $\mathfrak{G}$ keine einfache Gruppe.

Zum Beweise der Auflösbarkeit jeder Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung $p^\alpha q^2$ reichen die unter 1) und 2) angestellten Überlegungen aus. Denn jede Gruppe $\mathfrak{B}$ der Ordnung q^2 ist eine commutative. Enthält daher $\mathfrak{H}$ eine Gruppe der Ordnung $p^\alpha q$, so ist ein darin enthaltenes Element B der Ordnung q ein invariantes Element jeder durch B theilbaren Gruppe $\mathfrak{B}$ der Ordnung q^2.

Damit ist der Beweis durch rein gruppentheoretische Betrachtungen geführt, ohne jede Hülfe der Substitutionstheorie, d. h. ohne Benutzung irgend einer Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$.

ÜBER ABEL'S VERALLGEMEINERUNG DER BINOMISCHEN FORMEL

VON

A. HURWITZ

in ZÜRICH.

Bei meinen Untersuchungen über RIEMANN'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten [1] bin ich auf eine Reihe von algebraischen Identitäten geführt worden, welche die von ABEL gegebene Verallgemeinerung der binomischen Formel [2] als einen speciellen Fall enthalten. In der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 35, S. 56, habe ich vor längerer Zeit einen Theil dieser Identitäten mitgetheilt. Die übrigen, auf welche ich nur kurz in der unten citirten Abhandlung hingewiesen habe, möchte ich in den folgenden Zeilen näher darlegen und begründen.

Es seien r und s zwei (positive oder negative) ganze Zahlen, ferner $u, v, x_1, x_2, \ldots, x_n$ unbeschränkt veränderliche Grössen. Ich definire nun eine Function $F_{r,s}$ dieser Grössen durch die Gleichung

$$(\mathrm{I})\qquad F_{r,s} = \sum (u+\varepsilon_1 x_1+\varepsilon_2 x_2+\ldots+\varepsilon_n x_n)^{r+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i}(v+\varepsilon_1' x_1+\varepsilon_2' x_2+\ldots+\varepsilon_n' x_n)^{s+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i'}$$

Hier ist ε_i' zur Abkürzung für $1-\varepsilon_i$ geschrieben und es soll die Summe in der Weise gebildet werden, dass $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ unabhängig von einander die beiden Werthe 0 und 1 erhalten. Indem man in jedem einzelnen der 2^n Glieder dieser Summe diejenigen Terme $\varepsilon_i x_i$ bez. $\varepsilon_i' x_i$ unterdrückt, für welche ε_i bez. ε_i' gleich Null ist, erhält die Gleichung (I) offenbar die Gestalt

$$(\mathrm{I}')\qquad F_{r,s} = \sum (u + x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_\lambda})^{r+\lambda}(v + x_{\beta_1} + x_{\beta_2} + \ldots + x_{\beta_\mu})^{s+\mu},$$

[1] S. Mathematische Annalen, Bd. 39, S. 1 ff.

[2] ABEL, Oeuvres complètes, nouvelle édition, vol. I, p 102.

wo nun die Summation auf alle Zerlegungen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in zwei Gruppen $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_\lambda}$ und $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_\mu}$ auszudehnen ist. Dabei sind auch diejenigen beiden Zerlegungen zu berücksichtigen, bei welchen in der einen Gruppe keine, in der andern Gruppe die sämmtlichen Variabeln stehen.

Wenn es erforderlich ist, die Argumente, von denen $F_{r,s}$ abhängt, näher anzugeben, so werde ich in der Folge diese Funktion mit

$$F_{r,s}(u\,,\,v\,|\,x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_n)$$

bezeichnen.

Offenbar ist $F_{r,s}$ eine symmetrische Funktion der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$; sie bleibt ferner ungeändert, wenn gleichzeitig u mit v und r mit s vertauscht wird. Einige weitere Eigenschaften von $F_{r,s}$ folgen leicht aus der Definitionsgleichung (I). Nimmt man auf der rechten Seite dieser Gleichung diejenigen Glieder, für welche $\varepsilon_1 = 1$ ist, so bilden dieselben die Funktion $F_{r+1,s}(u + x_1\,,\,v\,|\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_n)$, während diejenigen Glieder, für welche $\varepsilon_1 = 0$ ist, die Funktion $F_{r,s+1}(u\,,\,v + x_1\,|\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_n)$ bilden. Daher hat man

$$(1) \qquad F_{r,s} = F_{r+1,s}(u + x_1\,,\,v\,|\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_n) + F_{r,s+1}(u\,,\,v + x_1\,|\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_n).$$

Durch Vertauschung von x_1 mit $x_2, x_3, \ldots, x_n$ entstehen hieraus $n - 1$ weitere Gleichungen.

Trennt man im allgemeinen Gliede der Summe (I) einen Faktor $u + \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \ldots + \varepsilon_n x_n$ ab, so gewinnt die Summe die Form:

$$\begin{aligned} & u \sum (u + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_n x_n)^{r-1+\Sigma\varepsilon_i} (v + \varepsilon'_1 x_1 + \ldots + \varepsilon'_n x_n)^{s+\Sigma\varepsilon'_i} \\ & + x_1 \sum \varepsilon_1 (u + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_n x_n)^{r-1+\Sigma\varepsilon_i} (v + \varepsilon'_1 x_1 + \ldots + \varepsilon'_n x_n)^{s+\Sigma\varepsilon'_i} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Hieraus erkennt man die Richtigkeit der Gleichung

$$(2) \qquad F_{r,s} = uF_{r-1,s} + \sum_{k=1}^{n} x_k F_{r,s}(u + x_k\,,\,v\,|\,x_1\,,\,\ldots\,,\,x_{k-1}\,,\,x_{k+1}\,,\,\ldots\,,\,x_n).$$

Analog ergiebt sich

$$(3) \qquad F_{r,s} = vF_{r,s-1} + \sum_{k=1}^{n} x_k F_{r,s}(u\,,\,v + x_k\,|\,x_1\,,\,\ldots\,,\,x_{k-1}\,,\,x_{k+1}\,,\,\ldots\,,\,x_n).$$

Für die nach u und v genommenen Differentialquotienten von $F_{r,s}$ findet man aus (I)

$$(4)\qquad \frac{\partial F_{r,s}}{\partial u} = rF_{r-1,s} + \sum_{k=1}^{n} F_{r,s}(u + x_k, v \mid x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

$$(5)\qquad \frac{\partial F_{r,s}}{\partial v} = sF_{r,s-1} + \sum_{k=1}^{n} F_{r,s}(u, v + x_k \mid x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

Differenziirt man die Gleichung (1) partiell nach x_1 und benutzt sodann auf der rechten Seite die Formeln (4) und (5), so ergiebt sich nach kurzer Rechnung

$$(6)\qquad \frac{\partial F_{r,s}}{\partial x_1} = (r+1)F_{r,s}(u+x_1, v \mid x_2, \ldots, x_n) + (s+1)F_{r,s}(u, v+x_1 \mid x_2, \ldots, x_n) + \sum_{k=2}^{n} F_{r,s}(u, v \mid x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + x_1, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch Vertauschung von x_1 mit $x_2, x_3, \ldots, x_n$ entsprechende Darstellungen der nach diesen Variabeln genommenen Differentialquotienten von $F_{r,s}$.

Wenn die Zahl n der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sich auf 1 reducirt, so ist der Ausdruck der Funktion $F_{r,s}$ nach (I) der folgende:

$$(7)\qquad F_{r,s}(u, v \mid x_1) = (u + x_1)^{r+1} v^s + u^r (v + x_1)^{s+1}.$$

Auf Grund der vorstehenden Gleichungen lässt sich nun leicht zeigen, dass die Funktion $F_{-1,0}$ die sehr einfache Darstellung

$$(\text{II})\qquad F_{-1,0} = (u + v + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n \frac{1}{u}$$

zulässt. In der That ist dieses nach (7) im Falle $n = 1$ richtig. Nimmt man nun an, dass die Gleichung (II) für den Fall von $n - 1$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ gilt, so ergiebt sich aus (5) und (6)

$$\frac{\partial F_{-1,0}}{\partial v} = n(u + v + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{n-1} \frac{1}{u},$$

$$\frac{\partial F_{-1,0}}{\partial x_i} = n(u + v + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{n-1} \frac{1}{u}. \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

Und hieraus folgt durch Integration

$$F_{-1,0} = (u + v + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n \frac{1}{u} + C,$$

wo C von $v, x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängig ist. Setzt man aber

$$v = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0, \qquad r = -1, \qquad s = 0,$$

so erhält man auf der rechten Seite von (I) u^{n-1}. Also ist $C = 0$ und damit die Allgemeingültigkeit der Gleichung (II) erwiesen. Benutzt man die Definitionsgleichung (I′), so stellt sich die Gleichung (II) in der Form dar:

$$\text{(II′)} \quad \sum (u + x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1}(v + x_{\beta_1} + x_{\beta_2} + \ldots + x_{\beta_\mu})^\mu$$
$$= \frac{1}{u}(u + v + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n.$$

Diese vereinfacht sich noch, wenn man v durch $v - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ ersetzt. Dadurch erhält man nämlich

$$\text{(II′)} \quad \sum (u + x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1}(v - x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} - \ldots - x_{\alpha_\lambda})^{n-\lambda} = \frac{1}{u}(u+v)^n.$$

Für den Fall, dass man die n willkürlichen Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sämmtlich gleich ein und derselben Grösse x annimmt, geht die vorstehende Gleichung in die Abel'sche Formel

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \binom{n}{\lambda}(u + \lambda x)^{\lambda-1}(v - \lambda x)^{n-\lambda} = \frac{1}{u}(u + v)^n$$

über.

Setzt man in (3) $r = -1$, $s = 0$, so kann man, unter Berücksichtigung von (II), aus der entstehenden Gleichung $F_{-1,-1}$ bestimmen. Es ergiebt sich auf diese Weise:

$$\text{(III)} \quad \sum (u + x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1}(v + x_{\beta_1} + \ldots + x_{\beta_\mu})^{\mu-1}$$
$$= (u + v + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{n-1}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right).$$

Auch dem Falle $r = 0$, $s = 0$ entspricht eine einfache Formel, die man durch Induktion mit Hülfe der Gleichungen (2) und (II) beweist. Setzt man zur Abkürzung

$$u + v + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s$$

und bezeichnet man ferner mit $f_1, f_2, \ldots, f_n$ die elementar-symmetrischen Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$f_1 = \sum x_i, \qquad f_2 = \sum x_i x_k, \quad \ldots, \quad f_n = x_1 x_2 \ldots x,$$

so lautet die in Rede stehende Formel:

$$\text{(IV)} \qquad \sum (u + x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_\lambda})^\lambda (v + x_{\beta_1} + \ldots + x_{\beta_\mu})^\mu$$
$$= s^n + \underline{|1} f_1 s^{n-1} + \underline{|2} f_2 s^{n-2} + \ldots + \underline{|n} f_n.$$

Schliesslich seien hier noch einige Verallgemeinerungen der vorstehenden Identitäten erwähnt, welche sich aus diesen ableiten oder in ähnlicher Weise wie diese begründen lassen. Es sei $r > 1$ eine positive ganze Zahl. Man theile die Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auf alle möglichen Weisen in r Gruppen

$$x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_\lambda}; \; x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_\mu}; \; \ldots; \; x_{\omega_1}, x_{\omega_2}, \ldots, x_{\omega_\theta},$$

wobei auch diejenigen Eintheilungen berücksichtigt werden sollen, bei welchen in einer oder mehreren Gruppen keine Variable steht. Dann hat man:

$$\text{(V)} \quad \sum (u_1 + x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_\lambda})^\lambda (u_2 + x_{\beta_1} + \ldots + x_{\beta_\mu})^{\mu-1} \ldots (u_r + x_{\omega_1} + \ldots + x_{\omega_\theta})^{\theta-1}$$
$$= (u_1 + u_2 + \ldots + u_r + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n \frac{1}{u_2 u_3 \ldots u_r}$$

und

$$\text{(VI)} \quad \sum (u_1 + x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1} (u_2 + x_{\beta_1} + \ldots + x_{\beta_\mu})^{\mu-1} \ldots (u_r + x_{\omega_1} + \ldots + x_{\omega_\theta})^{\theta-1}$$
$$= (u_1 + u_2 + \ldots + u_r + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{n-1} \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_r}{u_1 u_2 \ldots u_r}.$$

Im Falle $r = 2$ geht (V) in (II) und (VI) in (III) über.

Zürich, im November 1901.

RATIONALE REDUCTION DER ABEL'SCHEN INTEGRALE

VON

M. NOETHER
in ERLANGEN.

In der Theorie der Reduction der Abel'schen Integrale mag man zwei Aufgaben unterscheiden. Die eine hat zum Ziel die — RIEMANN'sche — Zerlegung eines gegebenen Integrals in seine einfachsten, algebraisch oder logarithmisch unstetig werdenden oder allenthalben endlichen Bestandteile: die Integrale der drei »Gattungen». Die andere verlangt — an ABEL anschliessend — eine Zurückführung aller algebraisch unstetigen Integrale — der Integrale »zweiter Art» — welche einer Klasse algebraischer Functionen mit der Klassenzahl p angehören, mit Hülfe algebraischer Functionen der Klasse auf eine möglichst kleine Anzahl, nämlich $2p$, von algebraisch-unabhängigen Transcendenten mit fest gegebenen Unstetigkeiten.

An eine algebraische Durchführung dieser beiden Aufgaben wird man bei dem jetzigen Stande der Lehre von den algebraischen Functionen folgende theoretische Forderungen stellen können:

a. Die vorkommenden algebraischen Formen und Functionen sollen, wie die der Klasse zu Grunde gelegte Gleichung $f(s, z) = 0$, nur in *homogenen* Veränderlichen betrachtet werden.

Dies geschieht, um die Dimensionen der Formen zum Ausdruck zu bringen, und um die Auszeichnung einzelner Werthe der Veränderlichen, wie $z = \infty$, zu vermeiden. Mindestens sollen die etwa herausgehobenen Stellen $z = \infty$ nicht für $f = 0$ singuläre Stellen sein.

b. Sämmtliche sowohl im Ansatz als im Verlauf der Rechnung vorkommenden ganzen oder gebrochenen Formen sollen sich »zu $f = 0$ *adjungirt*

(bei gewöhnlichen Singularitäten von $f=0$ für die Doppelpunkte von $f=0$ verschwindend) verhalten, und die Functionen als Quotienten solcher Formen gebildet werden.

Denn es ist nötig, bei gegebenen Polen je die allgemeinsten Formen und Functionen zu betrachten, nicht solche, welche specielle, an die aus der Klasse herausgenommene Grundgleichung $f=0$ geknüpfte, Eigenschaften besitzen. Nur die für jene Ausdrücke gebildeten Relationen sind invariant für die ganze algebraische Klasse, unabhängig von der Wahl der Gleichung $f=0$.

c. In den Methoden sollen *keine Umwege* vorkommen, d. h. es soll nicht erst eine Reihe von Unstetigkeitsstellen eingeführt, hintennach wieder weggeschafft werden. Insbesondere sollen in die erstere Aufgabe, oder bei Absonderung der logarithmisch unstetigen Teile — der Integrale »dritter Art» — der zweiten Aufgabe, überhaupt keine anderen oder höheren Unstetigkeitspunkte, als die gegebenen, eingeführt werden.

d. Der Gang soll so sein, dass sich die ganze *Mannigfaltigkeit* der Reductionsmöglichkeiten übersehen lässt.

Zu diesen nothwendigen Forderungen kann man theoretisch eine weitere gesellen:

e. Die Trennung in Integrale dritter und zweiter Art, und die Zurückführung der letzteren auf $2p$ algebraisch-unabhängige, soll durch *rationale* Operationen bewirkt werden, d. h. ohne Auflösung von höheren, als linearen Gleichungen.

Schon die Forderungen a.—d. sind in den bisherigen Methoden nur teilweise beachtet. Clebsch und Gordan [1] entsprechen keiner derselben, am wenigstens der Forderung c., indem sie in die erste Aufgabe algebraisch-logarithmische Functionen einführen; sie beabsichtigen auch mehr eine Klassificirung der Integrale in Typen, als eine Reduction. Die modificirte Methode von Clebsch-Lindemann [2] erfüllt, neben a., auch c., bis auf den Umstand, dass von vornherein *ein* Punkt von $f=0$ ausgezeichnet wird. Auch für die zweite Aufgabe entsprechen die von Partialbruchzerlegung ausgehenden — praktisch bequemsten — Methoden, so die von Herrn

[1] *Theorie der Abel'schen Functionen* (1866), § 2.

[2] *Vorlesungen über Geometrie*, Bd. 1, p. 777 ff.

Picard,[1] vor Allem der Forderung c. nicht. Dagegen hat Weierstrass[2] eine Methode entwickelt, welche im Wesentlichen bereits allen Forderungen a.—d. gerecht wird, wie es auch die analoge Methode des Verfassers[3] thut; es werden dabei für die Integrale dritter Gattung ein Punkt, für die neueinzuführenden p Integrale 2^{ter} Gattung p, nicht durch eine Curve φ verknüpfte, Punkte von $f = 0$ ausgezeichnet.

Die Möglichkeit der Durchführung von e. wird, vorausgesetzt dass man auf die Rücksichten a.—d. verzichtet, einleuchtend, wenn man beachtet, dass man die in der Theorie der algebraischen Functionen vorkommenden Operationen auf rationalem Wege erledigen kann, insbesondere die Aufstellung der zu $f = 0$ gehörigen »adjungirten» Formen.[4] Auch hat in solcher Weise Hermite die zweite Aufgabe für den hyperelliptischen Fall behandelt;[5] und für den allgemeinen Fall haben die Herren Picard und Simart eine Andeutung gegeben.[6]

Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist nun, die Forderung e. durchzuführen und insbesondere den Nachweis zu erbringen, dass sie sich mit den Forderungen a.—d. vereinigen lässt.

Nicht nur das Reductionsproblem, sondern die Theorie der algebraischen Functionen selbst, der es sich einordnet, führt bekanntlich auf Abel zurück. Zusammenfassend verdankt man ihm hier den allgemeinsten

---

[1] *Traité d'Analyse* (Paris 1891), Theil 1, Kap. 2.

[2] Vgl. den *Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen* von Herrn Brill und dem Verf. (Jahresber. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, III, 1894), Abschnitt VII.

[3] *Zur Theorie der Abel'schen Differentialausdrücke und Functionen* (Math. Annalen, Bd. 37, 1890), §§ 2—5.

[4] M. Noether, *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen* (Math. Annalen, Bd. 23, 1883).

[5] *Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques aux fonctions de première, de seconde et de troisième espèce* (Bull. des sc. math. et astr., 2 sér., t. 7, 1883).

[6] *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris 1897), t. 1, p. 162. In der Einleitung zu Herrn Field's Aufsatz *On the reduction of the general Abelian integral* (Transact. of the Am. Math. Soc., vol. 2, 1901) wird zwar derselbe Zweck angegeben; es werden aber ausschliesslich in den Coefficienten irrationale Operationen vorgenommen.

Begriff der algebraischen Function und der zugehörigen algebraischen Integrale,[1] sowie die Grundlage der ganzen Theorie: sein Theorem über diese Integrale;[2] vor Allem die mit letzterem verbundene Entdeckung der Zahl p in ihrem verschiedenen Auftreten: einmal im Theorem selbst mit transcendenter und algebraischer Bedeutung,[1] sodann bei der Reduction der Integrale erster Gattung auf die linear-unabhängigen,[3] endlich bei dem Abel'schen Reductionsproblem dieses Aufsatzes.

Dieses specielle Problem hat überhaupt den Ausgangspunkt von Abel's hierhergehörigen Arbeiten gebildet. An Legendre anschliessend entwickelt er schon vor 1825 am elliptischen Integral alle wesentlichen Reductionsbegriffe.[4] In seinem generalisirenden Geiste erhob sich das Problem nach und nach zu der Frage nach der allgemeinsten Relation zwischen irgend welchen Integralen verschiedener algebraischer Functionen überhaupt,[5] und damit zu sehr umfassenden Theorien. Wir entnehmen diesen Betrachtungen, dass die zur Reduction eines Integrals zu benutzenden algebraischen Functionen derselben algebraischen Klasse anzugehören haben, wie das Integral selbst.

Auf Grund dieses Satzes hat sich Abel[6] mit allen Reductionen der Integrale der allgemeinsten algebraischen Differentialausdrücke beschäftigt, die sich mit Hülfe von algebraischen und logarithmischen Functionen ausführen lassen; und zwar »auf die kleinstmögliche Anzahl von Integralen, welche notwendig seien, um alle derselben Klasse angehörenden Integrale unter endlicher Form darzustellen».[7] Auch hat er selbst noch die Aus-

[1] *Sur la comparaison des fonctions transcendantes*, Werke (2[te] Ausg.), t. 2, X (vor der Reise von 1825) geschrieben; und die Pariser Preisschrift (Oct. 1826), ibid. t. 1, XII.

[2] Ausser den beiden in 1. citirten Arbeiten noch Werke, t. 1, XXI (1828) und XXVII (1829).

[3] In der Preisschrift.

[4] *Théorie des transcendantes elliptiques*, Werke (2[te] Ausg.), t. 2, XIII.

[5] *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques*, ibid. t. 1, XXVIII (1829); Brief an Legendre vom 25. Nov. 1828, ibid. t. 2, XXIII; und das erst in der 2[ten] Ausgabe der Werke publicirte Fragment, t. 2, XVII.

[6] Nach einer Anmerkung im *Précis*, l. c. p. 550.

[7] Dieser Ausspruch Abel's kann nicht so aufgefasst werden, als ob man die logarithmischen Unstetigkeiten eines beliebigen Integrals der Klasse mit Hülfe des Logarithmus einer algebraischen Function auf eine bestimmte Anzahl von Integralen mit im

führung, wenigstens für die binomischen Integrale, begonnen;[1] und das analoge Verfahren von WEIERSTRASS[2] gibt die algebraische Durchführung der ABEL'schen Aufgabe im hyperelliptischen Fall.

I.

Bezeichnungen.

An meinen oben citirten Aufsatz in Math. Ann. 37[3] anschliessend, benutze ich die dort entwickelten Begriffe und Beweise, wie auch die folgenden Bezeichnungen.

Die zu Grunde gelegte Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad [\text{oder } f(x) = 0, \text{ oder } f = 0]$$

sei die einer Curve f, m^{ter} Ordnung, vom Geschlecht p. Der Integrand sei

$$du = \frac{M(x)}{N(x)} \cdot d\omega_x = \frac{M(x)}{N(x)} \cdot \frac{(cx\,dx)}{\sum\limits_{i=1}^{3} c_i f_i(x)},$$

wo die »Differentialform» $d\omega_x = \frac{(cx\,dx)}{\Sigma c_i f_i(x)}$ für alle Integranden dieselbe bleibt, die »Differentialableitung» $\frac{M(x)}{N(x)}$ eine zu $f = 0$ adjungirte algebraische gebrochene Form $(m - 3)^{\text{ter}}$ Dimension des Punktes x von $f(x) = 0$ bedeutet. Zur Bildung von solchen »adjungirten Formen» $\frac{M(x)}{N(x)}$ nimmt man für $N(x)$ irgend eine homogene ganze Function n^{ter} Dimension, für $M(x)$ irgend eine *zu f adjungirte* homogene ganze Function $(n + m - 3)^{\text{ter}}$ Dimension von x_1, x_2, x_3. Bei der Zählung der 0- und ∞-Punkte der Form $\frac{M(x)}{N(x)}$

Voraus gegebenen logarithmischen Unstetigkeiten werfen könne: eine solche Reduction existirt nicht. Eine bezügliche Bemerkung auf S. 133 von Herrn H. STAHL's *Theorie der Abel'schen Functionen* (1896) ist nicht zutreffend.

[1] Siehe das in Anm. 5 der vorhergeh. Seite citirte Fragment.

[2] *Theorie der Abel'schen Functionen* (Journal f. r. u. a. Math., Bd. 52 oder Werke, I, p. 297 ff.), § 6, Formel (17).

[3] Cf. Anm. 3 der dritten Seite. Der Aufsatz wird weiterhin mit Math. Ann., 37, citirt.

[kürzer $\frac{M}{N}$] sieht man von den durch die Adjunction zu $f = 0$ bewirkten 0-Punkten von M ab, rechnet also nur die übrigen $2p - 2 + nm$ Schnittpunkte von $M = 0$ mit $f = 0$ als 0-Punkte b von M, dagegen alle nm Schnittpunkte von $N = 0$ mit $f = 0$ als 0-Punkte a von N. Diejenigen der Punkte a, welche nicht zugleich Punkte b sind, sind die ∞-Punkte der Form $\frac{M}{N}$; und zwar ist eine solche Stelle für $\frac{M}{N}$ ∞-Punkt von der Ordnung $\alpha - \beta$, für $\alpha > \beta$, wenn sie α-fach unter den a, β-fach unter den b vorkommt. Für das Integral u wird diese Stelle logarithmische Unstetigkeitsstelle, wenn $\alpha - \beta = 1$; algebraische Unstetigkeitsstelle von der Ordnung $\alpha - \beta - 1$, im Allgemeinen verbunden mit logarithmischer Unstetigkeit, wenn $\alpha - \beta > 1$.

Diese Definitionen gelten für jede beliebige Lage der Stelle, da von unserem invarianten Standpunkt aus eine specielle Lage überhaupt nicht existirt. Unter G_l wird eine Gruppe von l getrennten Stellen von $f = 0$ verstanden.

Um die Bezeichnungen: »Integrale 2^{ter}, 3^{ter} Gattung» auf die bekannten Normalformen zu beschränken, sei noch eine andere Bezeichnung benutzt.

Ein Integral u mit *nur* logarithmischen Unstetigkeiten (an mindestens zwei Stellen) werde als »Integral dritter Art», die zugehörige Differentialableitung $\frac{M(x)}{N(x)}$ als »Form dritter Art» bezeichnet. Hat das Integral *nur* algebraische Unstetigkeiten, so sei es als »Integral zweiter Art», seine Form $\frac{M(x)}{N(x)}$ als »Form zweiter Art» bezeichnet. Für die allenthalben endlichen Integrale ist die Bezeichnung »erster Art» mit »erster Gattung» gleichbedeutend; ihre Formen $\frac{M(x)}{N(x)}$ sind die adjungirten ganzen Formen φ, deren Fundamentalsysteme von je p Formen sich auf rationalem Wege bestimmen lassen.[1]

[1] Cf. die in Anm. 4 der dritten Seite citirte Arbeit, auf die mit Math. Ann., 23, Bezug genommen wird.

II.

Rationale Zerlegung der Formen.

Es sind hier die direkten rationalen Zerlegungen zu behandeln, welche eine zu f adjungirte Form $(m-3)^{\text{ter}}$ Dimension mit Hülfe von $f=0$ zulässt, wenn dieselbe in verschiedenen Punktgruppen von f in *verschiedenen* Ordnungen unendlich wird.

Zu diesem Zwecke beweisen wir zuerst, dass ein gebrochener Ausdruck $(m-3+k)^{\text{ter}}$ Dimension $\frac{P}{Q\,.\,R}$ *für* $k>0$, nicht aber im Allgemeinen für $k \leqq 0$, mit Hülfe von $f=0$ die Zerlegung zulässt:

$$\frac{P}{Q\,.\,R} = \frac{A}{Q} + \frac{B}{R}, \tag{1}$$

d. h. dass eine Relation existirt:

$$P = AR + BQ + Cf, \tag{1'}$$

wo auch A, B, C ganze homogene Functionen von x_1, x_2, x_3 werden, und wo A und B adjungirt zu f werden, im Falle P es war. Vorausgesetzt ist, dass für gemeinsame Nullpunkte von R, Q, f auch P verschwindet.

Seien Q, R, P von den Graden $q, r, q+r+k+m-3$. Man nehme zunächst, wenn P adjungirt war, für A das allgemeinste adjungirte Polynom vom Grade $q+k+m-3$, mit

$$\alpha = \frac{1}{2}(q+k+m-2)(q+k+m-1) - d$$

$$\left[\text{wo } d = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - p\right]$$

willkürlichen Constanten. In einem Ausdruck

$$DQ + Ef \equiv (D+Ff)Q + (E-FQ)f,$$

wo D adjungirt, von der Ordnung $k+m-3$, E nicht-adjungirt, von der Ordnung $q+k-3$, F nicht-adjungirt, von der Ordnung $k-3$, stehen aber noch

$$\beta = \frac{1}{2}(k+m-2)(k+m-1) + \frac{1}{2}(q+k-2)(q+k-1) - \frac{1}{2}(k-2)(k-1) - d$$

willkürliche Parameter zur Verfügung. Ersetzt man daher A durch

$$A + (DQ + EF)$$

und benutzt die β Parameter zur Reduction der Constanten von A, so verbleiben in A, vermöge $Q = 0$, $f = 0$, noch

$$\alpha - \beta = qm$$

Constanten, linear und homogen eingehend.

Für $k = 0$ würden nur $qm - 1$ Constanten verbleiben.

Für $k > 0$ kann man also mit Hülfe der qm Constanten von A dem Ausdruck $P - AR$ vorschreiben, für sämmtliche qm Schnittpunkte von $Q = 0$ mit $f = 0$ zu verschwinden. Man hat dann eine Identität[1]

$$P - AR = BQ + Cf,$$

in der, wenn es P und A waren, auch B adjungirt zu f wird. Hatten Q, R und f gemeinsame Nullpunkte, so sagen die entsprechenden Bedingungen für $P - AR$ aus, dass auch P an diesen Stellen verschwinden muss. Daher ist (1'), und damit (1), bewiesen.

Dieselbe Gleichung (1') gilt für $k > 0$, wenn P nicht-adjungirt zu f war; man braucht dann nur A, D, B nicht-adjungirt anzunehmen.

Aus der Gleichung (1) sollen nun Folgerungen für die zu f adjungirten Formen $(m - 3)^{\text{ter}}$ Dimension gezogen werden (die übrigens auch für nicht-adjungirte Formen gültig wären).

Die adjungirte Form $(m - 3)^{\text{ter}}$ Dimension

$$\frac{M(x)}{N(x)}$$

werde in den s getrennten Gruppen

$$G_{l_1}, G_{l_2}, \ldots, G_{l_s}$$

von je

$$l_1, l_2, \ldots, l_s$$

getrennten Punkten von f bezw. zu

$$\infty^{\nu_1}, \infty^{\nu_2}, \ldots, \infty^{\nu_s},$$

[1] Nach dem algebraischen Satze meiner Note in Math. Ann., 6.

wobei $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ s ganze positive von einander verschiedene Zahlen seien. Wegen des letzteren Umstandes kann man diese s Gruppen rational von einander trennen.[1]

Nun mögen zunächst s Polynome in x_1, x_2, x_3

$$N_1, N_2, \ldots, N_s$$

von irgend welchen Dimensionen

$$n_1, n_2, \ldots, n_s$$

bestimmt werden, nur mit der Eigenschaft, dass N_h die Curve f in den l_h Punkten von G_{l_h} je in *erster* Ordnung, in den übrigen $s - 1$ Gruppen gar nicht treffe. Nach dem »Restsatz«[2] hat man dann vermöge $f = 0$ eine Identität

$$\frac{M}{N} = \frac{\mathfrak{M}}{N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} \ldots N_s^{\nu_s}}, \tag{2}$$

wo $\mathfrak{M}$ ein zu f adjungirtes Polynom der Ordnung $\sum\limits_{h=1}^{s} \nu_h n_h + m - 3$ vorstellt.

Sei $\nu_1 > 1$, so nehme man in Formel (1):

$$P = \mathfrak{M}, \qquad Q = N_1^{\nu_1 - 1}, \qquad R = N_2^{\nu_2} \ldots N_s^{\nu_s};$$

es sind dann die Bedingungen des Satzes erfüllt, und man hat, vermöge $f = 0$:

$$\frac{\mathfrak{M}}{N_1^{\nu_1 - 1} N_2^{\nu_2} \ldots N_s^{\nu_s}} = \frac{A}{N_1^{\nu_1 - 1}} + \frac{B}{N_2^{\nu_2} \ldots N_s^{\nu_s}},$$

d. h.

$$\frac{M}{N} = \frac{M_1}{N_1^{\nu_1}} + \frac{B}{N_1 N_2^{\nu_2} \ldots N_s^{\nu_s}}.$$

Indem man nun denselben Schluss auf das zweite Glied dieser Zerlegung bezüglich N_2 anwendet, und so fortfährt, ergibt sich eine Zerlegung von (2), vermöge $f = 0$:

$$\frac{M}{N} = \frac{M_1}{N_1^{\nu_1}} + \frac{M_2}{N_2^{\nu_2}} + \ldots + \frac{M_s}{N_s^{\nu_s}} + \frac{M'}{N_1 N_2 \ldots N_s}, \tag{3}$$

in der jedes Glied eine zu f adjungirte Form $(m - 3)^{\text{ter}}$ Dimension vorstellt.

---

[1] Nach Math. Ann., 23.

[2] Cf. Brill und Noether, Math. Ann., 7.

Nach derselben Formel (1) zerlegt sich das Schlussglied von (3) weiter in Formen, die nur je zwei Factoren im Nenner haben; z. B., vermöge $f = 0$, in

$$(4) \qquad \frac{M'}{N_1 N_2 \ldots N_s} = \frac{M'_1}{N_1 N_s} + \frac{M'_2}{N_2 N_s} + \ldots + \frac{M'_{s-1}}{N_{s-1} N_s},$$

wo wieder jedes Glied zu f adjungirt wird. Auch könnten alle einzelnen Glieder von (3) und (4) nach dem »Restsatz» wieder vielfach umgestaltet werden.

Eine andere rationale Zerlegung von $\frac{M}{N}$ würde sich aus (1) ergeben, wenn man $\frac{M}{N}$ zuvor mit einem beliebigen Polynom, etwa mit einer linearen Function $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i x_i$, multiplicirte. Dann würde für $f = 0$:

$$(5) \qquad \frac{M}{N} = \frac{1}{\Sigma \alpha_i x_i} \cdot \sum_{h=1}^{l} \frac{P_h}{N_h^{\nu_h}}.$$

Dies wären die Zerlegungen, wie sie in den direkt mit Partialbruchzerlegung arbeitenden Methoden gebraucht werden, wobei nur $\Sigma \alpha_i x_i$ durch die homogen machende Veränderliche ersetzt zu denken ist. Die hierbei neu eingeführten Unstetigkeiten in $\Sigma \alpha_i x_i = 0$, $f = 0$ könnte man übrigens, wenn man weiterhin Irrationales benutzen wollte, noch verringern. Denn die in (1) noch unbestimmten Coefficienten von A, B liessen sich, indem man A, B durch $A + DQ$, $B - DR$ ersetzte, durch Annahme von D so bestimmen, dass sämmtliche P_h von (5) für die nämlichen $m - 1$ der m Schnittpunkte von $\Sigma \alpha_i x_i = 0$ mit $f = 0$ verschwinden; so dass dann für alle Glieder von (5) nur *ein* neuer Unstetigkeitspunkt aufträte.

III.

Rationale Trennung der Formen in solche zweiter und dritter Art.

Während der Teil (4) von (3) nur aus Formen dritter (und erster) Art besteht, sind die übrigen Glieder von (3) noch aus allen drei Arten gemischte Formen. Und dies ändert sich auch nicht, wenn man vermöge $f = 0$ direkte Umformungen vornimmt:

$$\frac{M_h}{N_h^{\nu_h}} = \frac{M_{h_1}}{N_h^{\nu_h}} + \frac{M_{h_2}}{N_h^{\nu_h-1}} + \ldots + \frac{M_{h,\nu_h}}{N_h} + \varphi,$$

wo φ eine Form erster Art. Denn nur das letzte Glied vor φ wird eine Form 3^{ter} Art, die man mit (4) vereinigen mag; die übrigen Teile bleiben gemischte Formen.

Es handelt sich nun um die rationale Scheidung irgend eines solchen Gliedes, oder von $\frac{M}{N}$ selbst, in Formen 2^{ter} und in Formen 3^{ter} Art. Wir deuten zu diesem Zwecke mehrere Methoden an, die zuerst an $\frac{M_1}{N_1^{\nu_1}}$ von (3) ausgesprochen werden mögen.

Ein erster Weg benutzt die gewöhnliche Methode der Reihenentwicklung und möge desshalb bei nicht-homogenen Coordinaten dargelegt werden.

Für die Grundcurve $f(s, z) = 0$ werde die Form $\frac{M_1(s, z)}{N_1^{\nu_1}(s, z)}$ in den l_1 Punkten der Gruppe G_{l_1} je zu ∞^{ν_1}. Wenn für irgend einen dieser l_1 Punkte:

$$s = \sigma, \qquad z = \zeta,$$

so ergibt sich die Gruppe G_{l_1} aus

$$f(\sigma, \zeta) = 0, \qquad N_1(\sigma, \zeta) = 0$$

rational, mittelst Gleichungen

$$\sigma = \frac{P(\lambda)}{S(\lambda)}, \qquad \zeta = \frac{Q(\lambda)}{S(\lambda)}, \qquad R(\lambda) = 0,$$

wo $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$, $S(\lambda)$, $R(\lambda)$ rationale ganze Functionen eines Parameters λ, letztere irreductibel vom Grade l_1, sind. Für λ konnte etwa ζ selbst gewählt werden.[1]

Entwickelt man nun mittelst der TAYLOR'schen Reihe für $s - \sigma$ den Integranden

$$\frac{M_1(s, z)}{N_1^{\nu_1}(s, z)} \frac{1}{\frac{\partial f(s, z)}{\partial s}}$$

[1] Auch für eine solche Elimination hat ABEL eine ihm eigentümliche Methode gegeben; s. Werke, 2^{te} Ausg., t. 1, XIII.

in der Umgebung von $s = \sigma$, $z = \zeta$ von $f(s, z) = 0$ nach aufsteigenden Potenzen von $z - \zeta$, so wird der Coefficient von $(z-\zeta)^{-1}$ eine rationale Function von σ, ζ, die durch Einsetzen der obigen Ausdrücke in eine rationale Function $\frac{U(\lambda)}{V(\lambda)}$ von λ übergeht. Um die Terme dritter Art aus der betrachteten Form zu entfernen, hat man diese Function für alle der Gleichung $R(\lambda) = 0$ genügenden Werte von λ gleich 0 zu setzen, d. h. man hat eine Identität zu erfüllen:

$$U(\lambda) \equiv A(\lambda) \, . \, R(\lambda).$$

Diese liefert l_1 Gleichungen, welche für die Coefficienten von $U(\lambda)$, d. h. für die von M_1, rational, linear und homogen, sind. Es sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, dass $\frac{M_1}{N_1^{\nu_1}}$ eine Form 2^{ter} Art sei. Dieselben stellen bekanntlich (nach dem Residuensatze)[1] höchstens $l_1 - 1$ linear-unabhängige Bedingungen vor. Nach Erfüllung dieser Bedingungen bleiben in M_1, bei gegebener Gruppe G_{l_1}, d. h. $N_1^{\nu_1}$, noch

$$(\nu_1 - 1)l_1 + p$$

willkürliche Constanten, linear und homogen eingehend.

In einer etwas mehr algebraischen Modification dieses Wegs könnte man von der in $\frac{M_1}{N_1^{\nu_1}}$ steckenden, auf *einen* der l_1 Punkte (σ, ζ) von G_{l_1} bezüglichen Summe von $\nu_1 - 1$ »Formen 2^{ter} Gattung» (nämlich von dem $\sum_{k=1}^{\nu_1-1} g_{1,k} A^{(\nu_1-k)}(\sigma, \zeta)$ von Math. Ann. 37, § 3) ausgehen, deren Coefficienten wieder rationale Functionen von σ, ζ werden. Schreibt man der Differenz zwischen $\frac{M_1}{N_1^{\nu_1}}$ und dieser Summe vor, im Punkte (σ, ζ) nicht mehr unendlich zu werden, so liefert dies zunächst wieder eine Gleichung in σ, ζ, die, wie oben, in eine Identität in λ und damit in die $l_1 - 1$ Gleichungen für die Coefficienten von M_1 übergeht.

Ein unseren Operationen an Formen mehr entsprechender rational-algebraischer Weg besteht darin, dass man eine Form $\frac{M_1}{N_1^{\nu_1}}$ an jeder Stelle bezüglich ihrer Unstetigkeit vergleicht mit der Differentialableitung

[1] Cf. auch Math. Ann., 37, § 6, n° 8.

$$D_x \frac{\chi}{\psi} = \frac{d\frac{\chi}{\psi}}{d\omega_x} = \frac{1}{r}\frac{(f\psi\chi)}{\psi^2}$$

einer rationalen Function 0^{ter} Dimension einer Stelle x_1, x_2, x_3 von $f(x)=0$.[1] Ein solcher Ausdruck ist eine zu f adjungirte gebrochene Form $(m-3)^{\text{ter}}$ Dimension, sowohl wenn die beiden Polynome r^{ter} Dimension, χ und ψ, beide zu f adjungirt sind, als wenn beide, oder ψ allein, nicht-adjungirt wären.

Sei ψ irgend eine zu f adjungirte Curve, vom Grad r, welche f an jeder Stelle von G_{l_1} genau $(\nu_1 - 1)$-fach trifft; und zwar sei r so hoch gewählt, dass die l' Restschnittpunkte $G_{l'}$ von $\psi = 0$ mit $f = 0$ auf keiner Curve φ liegen. Für χ sei die Gesamtheit der adjungirten Curven r^{ter} Ordnung genommen; so dass $\frac{\chi}{\psi}$ die Gesamtheit der algebraischen Functionen der Klasse vorstellt, welche in G_{l_1} zu ∞^{ν_1-1}, in $G_{l'}$ zu ∞^1 werden sollen. Schreibt man diesen χ weiter vor, in jedem Punkt von G_{l_1} die Curve f k-mal zu treffen $(k = 1, 2, \ldots, \nu_1 - 2)$, so erhält man, wenn keine weitere Bedingung gegeben ist, eine Function $\frac{\chi_k}{\psi}$, welche in $G_{l'}$ zu ∞^1 werden kann und in G_{l_1} *wirklich* zu ∞^{ν_1-k-1} wird (vermöge der Annahme über die Gruppe $G_{l'}$; vgl. den »Satz für feste Punkte»[2]). Diese Curve χ_k hat, vermöge $f = 0$, noch

$$(\nu_1 - k - 1)l_1 + l' - p + 1$$

linear und homogen eingehende willkürliche Constanten. Da eine der χ_k die Curve ψ selbst ist, so hat $D_x\frac{\chi_k}{\psi}$ *eine* Constante weniger.

In

$$\frac{M_1}{N_1^{\nu_1}} - D_x\frac{\chi}{\psi} = \frac{P}{Q}$$

kann man daher nun $(\nu_1 - 1)l_1$ der willkürlichen Constanten von χ so bestimmen, dass die Form $\frac{P}{Q}$ in den l_1 Punkten von G_{l_1} höchstens je zu

[1] Cf. Math. Ann., 37, § 5, und das Anm. 6 der dritten Seite citirte Werk von PICARD und SIMART, t. 2, p. 161.

[2] Als *Reductionssatz für algebraische Functionen* in Math. Ann., 37, S. 424 Anm. angeführt.

∞^1 werde. Alsdann kann man die l_1 Gleichungen hinschreiben, welche aussagen, dass die Form $\frac{P}{Q}$ auch in G_{l_1} überhaupt nicht mehr unendlich werden soll. Diese Gleichungen werden, da $D_x \frac{\chi}{\varphi'}$ Glieder dieser Art gar nicht enthält, unabhängig von den $l' - p$ noch unbestimmt gebliebenen Coefficienten von χ; es sind die mit $l_1 - 1$ unabhängigen Gleichungen äquivalenten l_1 linearen homogenen Gleichungen für die Coefficienten von M_1, nach deren Erfüllung $\frac{M_1}{N_1^{\nu_1}}$ eine Form 2^{ter} Art wird.

Trennt man den so bestimmten Teil 2^{ter} Art, $\frac{M_1^{(2)}}{N_1^{\nu_1}}$, von $\frac{M_1}{N_1^{\nu_1}}$ (für $\nu \geqq 2$), so ist der Rest $\frac{M_1 - M_1^{(2)}}{N_1^{\nu_1}}$ der Teil 3^{ter} Art $\frac{M_1^{(3)}}{N_1^{\nu_1}}$, ohne andere Unstetigkeiten, als solche erster Ordnung in der Gruppe G_{l_1}, also eine Form $\frac{\mathfrak{M}_1}{N_1}$. Natürlich kann nachträglich zu einem der beiden Teile eine beliebige Form φ addirt, vom anderen subtrahirt werden.

Wendet man endlich dasselbe Verfahren auf alle Gruppen $G_{l_1}, \ldots, G_{l_s}$ an, so könnten die erhaltenen Formen 3^{ter} Art, $\frac{\mathfrak{M}_h}{N_h}$, noch mit dem Schlussglied (4) von (3) zu einem Gliede zusammengefasst werden.

Hätte man dasselbe Verfahren unmittelbar auf $\frac{M}{N}$ angewandt, so würden sich für M im Ganzen

$$\sum_{h=1}^{s} l_h - 1$$

unabhängige lineare homogene Bedingungsgleichungen ergeben haben, durch deren Erfüllung $\frac{M}{N}$ in eine Form 2^{ter} Art übergeht.

IV.

System von algebraisch-unabhängigen Formen 2ter Art, bei gegebenen Gruppen von Unstetigkeitspunkten gegebener Ordnung.

Unter einem »System von algebraisch-unabhängigen Formen 2ter Art, welche in Gruppen

$$G_{l_1}, G_{l_2}, \ldots, G_{l_s}$$

von je $l_1, l_2, \ldots, l_s$ Punkten von f bezüglich zu

$$\infty^{\nu_1}, \infty^{\nu_2}, \ldots, \infty^{\nu_s}$$

werden«, wird ein derartiges System von Formen 2ter Art

$$\frac{M_1^{(2)}}{N}, \frac{M_2^{(2)}}{N}, \ldots, \frac{M_t^{(2)}}{N}$$

verstanden, dass jede adjungirte Form mit denselben Unstetigkeiten sich in die Gestalt setzen lässt:

$$\frac{M^{(2)}}{N} = \sum_{j=1}^{t} c_j \frac{M_j^{(2)}}{N} + D_x \frac{\chi}{\psi},$$

wo die c_j Constanten sind und $\frac{\chi}{\psi}$ eine algebraische Function der Klasse wird.

Es handelt sich um die Aufstellung solcher Systeme, insbesondere um Bestimmung der Zahl t.

Zu diesem Zwecke sei N eine zu f nicht-adjungirte Curve der Ordnung n, welche jeden der l_h Punkte von G_{l_h} zum ν_h-fachen Punkt habe ($h = 1, 2, \ldots, s$). Durch den Restschnitt von $N = 0$ mit $f = 0$ lege man alle zu f adjungirten Curven M, der Ordnung $n + m - 3$. Man erhält dann eine Gesamtheit von Formen $\frac{M}{N}$, mit (vermöge $f = 0$)

$$\sum_{h=1}^{s} \nu_h l_h + p - 1$$

linear und homogen eingehenden willkürlichen Constanten. Nach Abtren-

nung der $\sum l_h - 1$ Formen dritter Art (Abschn. III) bleibt noch die Gesamtheit der zu betrachtenden adjungirten Formen 2^{ter} Art, $\frac{M^{(2)}}{N}$, übrig, mit

$$\alpha = \sum_{h=1}^{s} (\nu_h - 1) l_h + p$$

in $M^{(2)}$ linear und homogen eingehenden willkürlichen Constanten. p linear-unabhängige dieser Formen sind als adjungirte Formen φ darstellbar.

Um ein System von algebraisch-unabhängigen Formen unter den α linear-unabhängigen Formen $\frac{M^{(2)}}{N}$ zu bestimmen, sei angenommen, dass es k linear-unabhängige Formen φ gibt, welche $f = 0$ in den Gruppen

$$G_{l_1}, G_{l_2}, \ldots, G_{l_s}$$

bezw.

$$(\nu_1 - 1)\text{-}, (\nu_2 - 1)\text{-}, \ldots, (\nu_s - 1)\text{-fach}$$

treffen. Existirt keine solche φ, so ist $k = 0$ zu setzen.

Man bilde nun alle algebraischen Functionen $\frac{\chi}{\psi}$ der Klasse, welche in diesen Gruppen bezw. zu

$$\infty^{\nu_1 - 1}, \infty^{\nu_2 - 1}, \ldots, \infty^{\nu_s - 1}$$

werden sollen. Nach dem »Riemann-Roch'schen Satze«[1] gibt es

$$\beta = \sum_{h=1}^{s} (\nu_h - 1) l_h - p + 1 + k$$

linear-unabhängige solche Functionen. Da einer der β Ausdrücke χ mit ψ zusammenfällt, so bleiben in $D_x \frac{\chi}{\psi}$ noch $\beta - 1$ willkürliche Constanten, linear und homogen eingehend. Jede dieser $\beta - 1$ Formen $D_x \frac{\chi}{\psi}$ gehört aber zu den betrachteten Formen $\frac{M^{(2)}}{N}$; und ausser linearen Verbindungen der $\beta - 1$ Formen gibt es auch keine andere Form der Gestalt $D_x \frac{\chi'}{\psi'}$,

[1] Brill und Noether, Math. Ann., 7.

welche die für die $\frac{M^{(2)}}{N}$ angegebenen Eigenschaften hat. Daher hat man den *Satz:*

»In dem System von α linear-unabhängigen Formen 2^{ter} Art, $\frac{M^{(2)}}{N}$, gibt es

$$t = \alpha - (\beta - 1) = 2p - k$$

algebraisch-unabhängige; wobei k die Anzahl der linear-unabhängigen φ bedeutet, welche $f = 0$ in G_{l_h} bezw. $(\nu_h - 1)$-fach treffen $(h = 1, \ldots, s)$. Solche $2p - k$ Formen kann man aus einem System von p Formen 1^{ter} Art, φ, und aus $p - k$ eigentlichen Formen 2^{ter} Art zusammensetzen.»

Wollte man, wenn $k > 0$, für die gegebenen Gruppen G_{l_h} von Unstetigkeitspunkten auf ein System von $2p$ algebraisch-unabhängigen Formen 2^{ter} Art kommen, ohne ausserhalb dieser Gruppen liegende Punkte und ohne Irrationalitäten zu benutzen, so hätte man die Ordnungszahlen ν_h, alle oder teilweise, soweit zu erhöhen, dass alsdann $k = 0$ würde. Auf ein solches System von $2p$ Formen 2^{ter} Art sind dann aber, mittelst der Differentialableitungen algebraischer Functionen der Klasse, zugleich sämtliche Formen 2^{ter} Art, welche in den gegebenen Gruppen $G_{l_1} \ldots G_{l_s}$ in *irgend* welchen Ordnungen ∞ werden, zurückzuführen.

Übrigens hätte es für diese Betrachtungen, wie den Satz, genügt, sie für l Punkte von f auszusprechen, in denen die Formen 2^{ter} Art je zu ∞^2 werden sollen und welche zusammen 0^1-Punkte von k linear-unabhängigen Curven φ sind; wenn man hierbei nur »∞^2, bezw. 0^1, in jedem von $\nu - 1$ consecutiven Punkten» als äquivalent betrachtet mit »∞^ν, bezw. $0^{\nu-1}$, an *einer* Stelle von $f = 0$».

V.

Rationale Reduction der Formen $(m-3)^{\text{ter}}$ Dimension mittelst Differentialableitungen algebraischer Functionen auf $2p$ festgewählte Formen 2^{ter} Art und auf Formen dritter Art.

Die rationale Durchführung des Abel'schen Reductionsproblems, unter den in der Einleitung gestellten Anforderungen, ist nun eine einfache Anwendung des Abschn. IV.

Es liege irgend eine zu f adjungirte Form $(m-3)^{\text{ter}}$ Dimension, $\frac{M}{N}$, vor, die in den Gruppen

$$G_{l_1},\; G_{l_2},\; \ldots,\; G_{l_r}$$

bezw. zu

$$\infty^{l_1},\; \infty^{l_2},\; \ldots,\; \infty^{l_r}$$

werde.

Entweder mag man nun $\frac{M}{N}$ zuerst, nach Abschn. II, III, in Formen 2^{ter} und 3^{ter} Art spalten und jeden der Teile 2^{ter} Art nach dem im Folgenden anzugebenden Verfahren weiter behandeln. Oder man wird dieses Verfahren unmittelbar auf $\frac{M}{N}$ selbst anwenden; alsdann ergibt sich die Spaltung von $\frac{M}{N}$ in Teile 2^{ter} und 3^{ter} Art von selbst mit.

Man nehme als Hülfsgruppe irgend eine rational bekannte Gruppe G_L von L Punkten auf $f=0$, welche keiner anderen Bedingung unterliegt, als der, dass ihre L Punkte nicht durch eine Curve φ verknüpft sind.

Zunächst wird man die Gesamtheit der Formen $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$, welche nur in den L Punkten der festen Gruppe G_L je zu ∞^2 werden sollen, nach Abschn. III sondern in solche, $\frac{\mathfrak{M}^{(2)}}{\mathfrak{N}}$, von der zweiten Art, und in solche, $\frac{\mathfrak{M}^{(3)}}{\mathfrak{N}}$, von der dritten Art.

Die Formen $\frac{\mathfrak{M}^{(2)}}{\mathfrak{N}}$ lassen sich — nach Abschn. IV, wobei $k = 0$ wird — auf ein algebraisch-unabhängiges System von $2p$ Formen 2^{ter} Art

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \psi_1 = \frac{\mathfrak{M}_1^{(2)}}{\mathfrak{N}}, \qquad \psi_2 = \frac{\mathfrak{M}_2^{(2)}}{\mathfrak{N}}, \quad \ldots, \quad \psi_p = \frac{\mathfrak{M}_p^{(2)}}{\mathfrak{N}}, \\ \qquad\qquad \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p \end{array}\right.$$

zurückführen.

Nach demselben Abschnitt IV lassen sich alle Formen 2^{ter} Art, die in

$$G_{l_1}, G_{l_2}, \ldots, G_{l_s}, G_L$$

bezw. zu

$$\infty^{\nu_1}, \infty^{\nu_2}, \ldots, \infty^{\nu_s}, \infty^2$$

werden, algebraisch zurückführen auf das System (6); daher auch derjenige Teil, welcher in G_L gar nicht mehr ∞ wird. Dies sind aber gerade diejenigen Formen 2^{ter} Art, $\frac{M^{(2)}}{N}$, welche in der vorgelegten Form $\frac{M}{N}$ enthalten sind.

Damit ist die verlangte Reduction für den Fall geleistet, dass die vorgelegte Form selbst eine solche zweiter Art war.

War aber $\frac{M}{N}$ eine aus Formen 2^{ter} und 3^{ter} Art gemischte Form, so bleibt die algebraische Reduction von Abschn. IV noch immer anwendbar. In der That, man bilde zunächst die allgemeinste algebraische Function $\frac{\chi}{\psi}$, welche in den Gruppen

$$G_{l_1}, G_{l_2}, \ldots, G_{l_s}, G_L$$

bezw. zu

$$\infty^{\nu_1-1}, \infty^{\nu_2-2}, \ldots, \infty^{\nu_s-1}, \infty^1$$

werden kann. Der Ausdruck χ hat, vermöge $f = 0$, noch

$$\alpha = \sum_{h=1}^{s} (\nu_h - 1) l_h + L - p + 1,$$

die Form $D_x\frac{\chi}{\psi}$ noch $\alpha - 1$ willkürliche Constanten. Die Anzahl $\Sigma(\nu_h - 1)l_h$ dieser Constanten kann man nun auch hier so bestimmen, dass

$$\frac{M}{N} - D_x\frac{\chi}{\psi}$$

in allen Punkten der s Gruppen G_{l_h} nur höchstens zu ∞^1 werde. Denn denkt man sich die Form $\frac{M}{N}$ in ihre beiden Teile 2^{ter} und 3^{ter} Art

$$\frac{M}{N} = \frac{M^{(2)}}{N} + \frac{M^{(3)}}{N}$$

zerlegt, so könnte man, da die L Punkte durch keine φ verknüpft sind, je einen Teil $\frac{\chi'}{\psi}$ der Functionen $\frac{\chi}{\psi}$ bilden, welcher zwar in G_L noch je zu ∞^1 werden kann, aber in sämtlichen Gruppen G_{l_h} nicht mehr unendlich wird, mit Ausnahme irgend *eines* der Punkte irgend *einer* dieser s Gruppen, in welchen $\frac{\chi'}{\psi}$ wirklich zu $\infty^{\nu_h - j}$ wird, wo j irgend eine beliebig gegebene der Zahlen $1, 2, \ldots, \nu_h - 1$ vorstellt;[1] daher lässt sich durch $D_x\frac{\chi}{\psi}$ *jedes* auf $G_{l_1}, \ldots, G_{l_s}$ bezügliche Glied von $\frac{M^{(2)}}{N}$ vernichten.

Nach dieser Bestimmung wird $\frac{M}{N} - D_x\frac{\chi}{\psi}$ in den Gruppen $G_{l_1}, \ldots, G_{l_s}$ höchstens zu ∞^1, in G_L zu ∞^2, und verhält sich zugleich *bezüglich der Punkte von G_L* wie eine Form 2^{ter} Art.

Daher hat man, nach Abschn. II, eine rationale Zerlegung

$$\frac{M}{N} - D_x\frac{\chi}{\varphi} = \frac{\mathfrak{M}^{(2)}}{\mathfrak{N}} + \frac{M^{(3)}}{N},$$

wo $\frac{\mathfrak{M}^{(2)}}{\mathfrak{N}}$ eine Form 2^{ter} Art ist, welche nur in den L Punkten von G_L höchstens zu ∞^2 wird, $\frac{M^{(3)}}{N}$ eine auf $G_{l_1}, \ldots, G_{l_s}$ bezügliche Form 3^{ter} Art. Da nun $\frac{\mathfrak{M}^{(2)}}{\mathfrak{N}}$ auf das System (6) zurückführt, vermöge einer Beziehung

$$\frac{\mathfrak{M}^{(2)}}{\mathfrak{N}} = D_x\frac{\chi_1}{\psi_1} + \sum_{i=1}^{p}\beta_i\Psi_i + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\varphi_i,$$

[1] Nach dem o. c. *Reductionssatz für algebraische Functionen*, Math. Ann., 37, § 2.

so hat man die gesuchte Reduction:

$$\frac{M}{N} = D_x \frac{\chi}{\psi} + D_x \frac{\chi_1}{\psi_1} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \Psi_i + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi_i + \frac{M^{(3)}}{N}.$$

Der hier auftretende Teil dritter Art, $\frac{M^{(3)}}{N}$, von $\frac{M}{N}$ lässt sich alsdann nach Abschn. II auf rationalem Wege noch in mannigfache Gestalt bringen.

In diese rationale Reduction tritt nur *eine* rational bekannte Gruppe G_L von L nicht durch eine Curve φ verknüpften Punkten von f *einfach* ein (oder, statt dessen, eine mehrfach zu nehmende Gruppe von durch eine φ verknüpften Punkten). Sie hat zur Festlegung von $2p$ algebraisch-unabhängigen im Voraus fest anzunehmenden Formen (Integralen) 2^{ter} Art zu dienen. Dagegen war für die Abschn. II—IV eine Einführung von weiteren Unstetigkeitspunkten, oder von solchen höherer Ordnung als gegeben, überhaupt nicht erforderlich; und ebensowenig, wie am Anfang dieses Abschnittes bemerkt ist, zur Absonderung des Teiles dritter Art in der zuletzt angeführten Reductionsformel.

Erlangen, im Januar 1902.

SUR L'APPLICATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL D'ABEL RELATIF AUX INTÉGRALES ALGÉBRIQUES À LA RECHERCHE DE SYSTÈMES COMPLÈTEMENT ORTHOGONAUX DANS UN ESPACE À n DIMENSIONS

PAR

GASTON DARBOUX

À PARIS.

Parmi les différentes méthodes que JACOBI a fait connaitre pour l'intégration des équations différentielles abéliennes, s'en trouve une qui repose sur une transformation analytique des plus remarquables, découverte et employée d'abord par LAMÉ dans le cas de trois variables indépendantes.

Si l'on désigne par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les n valeurs de λ qui sont racines de l'équation

$$\sum_1^n \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 1, \tag{1}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des constantes, on peut substituer aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que l'on envisagera comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans l'espace à n dimensions, les n variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, qui deviendront ainsi des coordonnées curvilignes du même point. Nous les désignerons dans la suite sous le nom de *coordonnées elliptiques*, parce que les surfaces sur lesquelles chaque coordonnée demeure constante sont du second degré. JACOBI a donné les formules qui permettent de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées elliptiques. Si l'on pose, pour abréger,

$$f(u) = (u - a_1)(u - a_2) \ldots (u - a_n), \tag{2}$$

$$\varphi(u) = (u - \rho_1)(u - \rho_2) \ldots (u - \rho_n). \tag{3}$$

on aura

$$x_i^2 = \frac{\varphi(a_i)}{f'(a_i)}, \tag{4}$$

et l'élément linéaire de l'espace, donné par la formule

$$ds^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2,$$

aura pour expression, en coordonnées elliptiques,

$$ds^2 = -\frac{1}{4}\sum_1^n \frac{\varphi'(\rho_k)}{f(\rho_k)}d\rho_k^2. \tag{5}$$

Cette expression apparait comme la généralisation naturelle de celle que l'on doit à Lamé pour l'espace à 3 dimensions.

Dans mes premiers travaux sur les *cyclides homofocales* j'ai été conduit à définir et à étudier un nouveau système de coordonnées curvilignes orthogonales qui, lui aussi, peut s'étendre à un nombre quelconque de dimensions. On le détermine de la manière suivante.

Désignons par la notation b_{ik} les $(n+2)^2$ éléments d'une substitution linéaire orthogonale à $n+2$ variables. Ils sont liés comme on sait par les relations

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum\limits_{k=1}^{k=n+2} b_{ik}^2 = 1, & \sum\limits_{i=1}^{i=n+2} b_{ik}^2 = 1, \\ \sum\limits_{k=1}^{k=n+2} b_{ki}b_{kh} = 0, & \sum\limits_{k=1}^{k=n+2} b_{ik}b_{hk} = 0. \end{array}\right. \tag{6}$$

Supposons que tous ces éléments soient des constantes, et introduisons à la place des n variables x_i les $n+2$ variables y_i dont les rapports mutuels sont déterminés par les équations suivantes

$$\begin{aligned} \lambda y_k = b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + \ldots + b_{kn}x_n + b_{k,n+1}\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2-R^2}{2R} \\ + b_{k,n+2}\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2+R^2}{2R\sqrt{-1}}, \end{aligned} \tag{7}$$

où R désigne une nouvelle constante et λ un facteur de proportionnalité.

Un point de l'espace à n dimensions sera déterminé par les rapports mutuels des variables y_i. Mais ces variables sont des *coordonnées homo-*

gènes surabondantes liées, comme il est facile de le vérifier, par la relation identique

$$\sum_1^{n+2} y_k^2 = 0. \tag{8}$$

Nous les appellerons *coordonnées sphériques* du point. Réciproquement, toutes les fois que $n+2$ variables y_i vérifient la relation identique précédente, elles sont les coordonnées sphériques d'un point, et les formules (7) permettent d'en déduire les coordonnées cartésiennes x_i. On trouve en effet, par des calculs faciles,

$$\left\{\begin{aligned} x_i &= \lambda \sum_{k=1}^{k=n+2} b_{ki} y_k, \\ \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2 - R^2}{2R} &= \lambda \sum_{k=1}^{k=n+2} b_{k,n+1} y_k, \\ \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2 + R^2}{2R\sqrt{-1}} &= \lambda \sum_{k=1}^{k=n+2} b_{k,n+2} y_k; \end{aligned}\right. \tag{9}$$

et des deux dernières de ces relations on déduira les suivantes:

$$\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{R} = \lambda \sum_{k=1}^{k=n+2} (b_{k,n+1} + \sqrt{-1}\, b_{k,n+2}) y_k, \tag{10}$$

$$\frac{R}{\lambda} = \sum_{k=1}^{k=n+2} (\sqrt{-1}\, b_{k,n+2} - b_{k,n+1}) y_k. \tag{11}$$

Cette dernière équation fera connaître l'expression de λ en fonction des coordonnées y_k et permettra, en particulier, d'obtenir les expressions suivantes des x_i

$$x_i = \frac{R \sum_{k=1}^{k=n+2} b_{ki} y_k}{\sum_{k=1}^{k=n+2} (\sqrt{-1}\, b_{k,n+2} - b_{k,n+1}) y_k}. \tag{12}$$

Il est d'ailleurs très aisé de former l'expression de l'élément linéaire de l'espace en fonction des quantités y_k et de leurs différentielles.

Si l'on différentie en effet l'équation (7) et si on ajoute, après les avoir élevées au carré, toutes les équations ainsi obtenues, en donnant

à k toutes les valeurs possibles, on trouvera, en tenant compte de l'identité (8),

$$\lambda^2 \sum_1^{n+2} dy_k^2 = \sum_1^n dx_i^2;$$

et, par suite, l'élément linéaire de l'espace à n dimensions sera fourni par la formule

$$ds^2 = \frac{R^2 \sum_1^{n+2} dy_k^2}{\left[\sum_1^{n+2} \left(\sqrt{-1}\, b_{k,n+2} - b_{k,n+1}\right) y_k\right]^2}, \tag{13}$$

où ne figurent que les coordonnées sphériques y_k.

II.

L'emploi des coordonnées sphériques permet de montrer que, dans tout espace à n dimensions, il existe un système triple orthogonal algébrique, plus général que celui des coordonnées elliptiques.

Si l'on pose en effet

$$y_k^2 = \frac{(a_k - \rho_1)(a_k - \rho_2)\ldots(a_k - \rho_n)}{f'(a_k)}, \tag{14}$$

$f(u)$ désignant le polynome à racines constantes

$$f(u) = (u - a_1)(u - a_2)\ldots(u - a_{n+2}), \tag{15}$$

les quantités y_k satisferont à la relation identique

$$\sum_1^{n+2} y_k^2 = 0$$

et pourront être considérées, par conséquent, comme les coordonnées sphériques d'un point dans l'espace à n dimensions.

Les quantités $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ seront les n racines de l'équation en λ

$$\sum_1^{n+2} \frac{y_k^2}{a_k - \lambda} = 0. \tag{16}$$

Par un calcul analogue à celui de JACOBI, on trouvera

$$\sum_1^{n+2} dy_k^2 = -\frac{1}{4}\sum_1^n \frac{\varphi'(\rho_i)}{f(\rho_i)} d\rho_i^2, \tag{17}$$

$\varphi(u)$ désignant, pour abréger, le polynome

$$\varphi(u) = (u-\rho_1)(u-\rho_2)\ldots(u-\rho_n). \tag{18}$$

On aura donc, pour l'élément de l'espace à n dimensions, l'expression suivante, déduite des formules (13) et (17),

$$ds^2 = M^2 \sum_1^n \frac{\varphi'(\rho_i)\, d\rho_i^2}{f(\rho_i)}, \tag{19}$$

où M aura pour expression

$$M = \frac{R\sqrt{-1}}{2\sum\limits_{k=1}^{k=n+2} y_k\left(\sqrt{-1}\, b_{k,n+2} - b_{k,n+1}\right)}. \tag{20}$$

On voit ainsi que, dans un espace quelconque, les n variables ρ_i définies par l'équation (16) forment un système de coordonnées curvilignes orthogonales.

Ce système est plus général que celui de LAMÉ et de JACOBI, puisque les surfaces qui le composent et pour lesquelles une des coordonnées est constante sont définies par l'équation (16), et il résulte de l'expression (7) des coordonnées y_k que ces surfaces sont du quatrième ordre et qu'elles admettent pour ligne double le cercle de l'infini.

III.

Des calculs qui ont été développés dans l'article précédent, il résulte que, dans tout espace à n dimensions, on peut définir deux systèmes orthogonaux algébriques pour lesquels l'élément linéaire est compris dans la forme générale

$$ds^2 = M^2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varphi'(\rho_i)\, d\rho_i^2}{f(\rho_i)}, \tag{21}$$

où l'on a

$$\varphi(u) = (u-\rho_1)\ldots\ldots(u-\rho_n) \tag{22}$$

et où $f(u)$ désigne un polynome algébrique à coefficients constants. Pour l'un de ces systèmes, formé des surfaces homofocales du second degré, M se réduit à une constante et le polynome $f(u)$ est du degré n. Pour l'autre, formé de surfaces du quatrième ordre analogues aux cyclides, $f(u)$ est un polynome du degré $n+2$. Nous allons voir comment l'application du théorème fondamental d'Abel permet de rattacher à ces systèmes une suite illimitée de nouveaux systèmes orthogonaux algébriques.

θ et θ_1 désignant des fonctions quelconques des variables ρ_i, désignons par $\Delta\theta$, $\Delta(\theta, \theta_1)$ les symboles opératoires suivants:

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta\theta &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho_i}\right)^2, \\ \Delta(\theta, \theta_1) &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_i}\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho_i}. \end{aligned}\right.$$

L'équation

$$\Delta(\theta, \theta_1) = 0$$

est évidemment la condition nécessaire et suffisante pour que les deux familles de surfaces

$$\theta = \text{const.}, \qquad \theta_1 = \text{const.}$$

se coupent mutuellement à angle droit.

Cela posé, introduisons la fonction θ définie par la formule

$$(24)\qquad \theta = \sum_{i=1}^{i=n} \int \sqrt{\frac{\varpi(\rho_i)}{f(\rho_i)}}\, d\rho_i,$$

où l'on a

$$(25)\qquad \varpi(u) = (u-\alpha_1)(u-\alpha_2)\ldots(u-\alpha_n),$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ désignant n constantes arbitraires.

Il est facile de voir que la fonction θ, considérée comme dépendante des quantités α_i, satisfait identiquement aux équations aux dérivées partielles suivantes:

$$(26)\qquad 2(\alpha_i - \alpha_k)\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_i\partial\alpha_k} + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_i} - \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_k} = 0,$$

qui sont au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$.

Considérée comme fonction des variables ρ_i, elle satisfera également à une équation aux dérivées partielles que nous allons former.

On a

$$(27) \qquad \Delta\theta = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varpi(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)}.$$

La somme qui figure dans le second membre est précisément une de celles qu'Abel nous a appris à évaluer. C'est le coefficient de $\frac{1}{u}$ dans le développement de $\frac{\varpi(u)}{\varphi(u)}$ suivant les puissances descendantes de u.

On a donc généralement

$$(28) \qquad \Delta\theta = \sum_1^n (\rho_i - \alpha_i)$$

Ce point étant admis, reprenons la formule générale

$$(29) \qquad \Delta\theta = \sum \frac{f(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)} \left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho_i}\right)^2$$

et différentions par rapport à une des constantes α. On sera évidemment conduit à l'identité

$$(30) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\Delta\theta}{\partial\alpha_i} = \Delta\left(\theta, \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_i}\right).$$

En faisant usage de cette relation on voit que si l'on différentie par rapport à α_i l'équation (28) on aura

$$(31) \qquad \Delta\left(\theta, \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_i}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Différentions à son tour l'équation (31) par rapport à une autre des constantes α_i; nous aurons

$$(32) \qquad \Delta\left(\theta, \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_i\partial\alpha_k}\right) + \Delta\left(\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_i}, \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_k}\right) = 0.$$

Or d'après les équations (26) auxquelles satisfait θ, on a identiquement

$$(33)\qquad 2(\alpha_i - \alpha_k)\Delta\left(\theta, \frac{\partial^2\theta}{\partial a_i \partial a_k}\right) + \Delta\left(\theta, \frac{\partial\theta}{\partial a_i}\right) - \Delta\left(\theta, \frac{\partial\theta}{\partial a_k}\right) = 0,$$

ce qui donne, en tenant compte de l'équation (31),

$$(34)\qquad \Delta\left(\theta, \frac{\partial^2\theta}{\partial a_i \partial a_k}\right) = 0.$$

On aura donc, dans tous les cas, en vertu de l'équation (32)

$$(35)\qquad \Delta\left(\frac{\partial\theta}{\partial a_i}, \frac{\partial\theta}{\partial a_k}\right) = 0.$$

Le lecteur pourra d'ailleurs calculer directement $\frac{\partial\theta}{\partial a_i}$, $\frac{\partial\theta}{\partial a_k}$ et vérifier sans peine la relation, fondamentale pour notre objet, que nous venons d'obtenir.

Ces formules préliminaires une fois établies, considérons une fonction F des *seules* variables α_i, assujettie à vérifier les équations aux dérivées partielles

$$(36)\qquad 2(\alpha_i - \alpha_k)\frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial a_k} + \frac{\partial F}{\partial a_i} - \frac{\partial F}{\partial a_k} = 0,$$

et écrivons les n équations

$$(37)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial a_i} = \frac{\partial F}{\partial a_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui déterminent $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en fonction de $\rho_1, \ldots, \rho_n$. Nous allons montrer que les fonctions α_i ainsi définies forment un système complètement orthogonal.

Remarquons à cet effet qu'en vertu des équations (26) et (36) on a identiquement

$$2(\alpha_i - \alpha_k)\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial a_i \partial a_k} - \frac{d^2 F}{\partial a_i \partial a_k}\right) + \frac{\partial\theta}{\partial a_i} - \frac{\partial F}{\partial a_k} - \frac{\partial\theta}{\partial a_i} + \frac{\partial F}{\partial a_k} = 0.$$

Par conséquent toutes les équations

$$(38)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial a_i \partial a_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial a_k},$$

où i est différent de k, s'obtiennent par la combinaison linéaire des équations (37), dont elles sont de simples conséquences.

D'après cela, si nous différentions totalement les équations (37), nous aurons, en tenant compte des formules (38),

$$(39)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_i\partial\rho_k}\,d\rho_k = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha_i^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_i^2}\right)d\alpha_i.$$

Si donc l'on pose, pour abréger,

$$(40)\qquad p_i = \frac{\partial^2 F}{\partial\alpha_i^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_i^2},$$

on voit que l'on aura

$$(41)\qquad \Delta(\alpha_i,\,\alpha_k) = \frac{1}{p_i\,p_k}\,\Delta\left(\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_i},\,\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_k}\right) = 0.$$

Donc les fonctions $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ forment bien un système orthogonal.

On peut démontrer ce résultat d'une autre manière. La relation (41) montre que les n^2 éléments définis par la formule

$$c_{ik} = \sqrt{\frac{f(\rho_k)}{\varphi'(\rho_k)}}\;\frac{\dfrac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_i\partial\rho_k}}{\sqrt{\Delta\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha_i}\right)}}$$

sont ceux d'une substitution linéaire orthogonale. Car, en vertu de l'équation (41), ils satisfont identiquement à la relation

$$\sum_{l=1}^{l=n} c_{il}c_{kl} = 0$$

et, d'après la définition du symbole Δ, on a évidemment

$$\sum_{l=1}^{l=n} c_{il}^2 = 1.$$

Or on trouvera aisément que l'on a

$$\Delta\left(\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_i}\right) = \frac{1}{4}\frac{\varpi'(\alpha_i)}{\varphi(\alpha_i)}.$$

ce qui donne, pour l'expression des coefficients c_{ik},

$$c_{ik} = 2\sqrt{\frac{f(\rho_k)}{\varphi'(\rho_k)}}\sqrt{-\frac{\varphi(\alpha_i)}{\varpi'(\alpha_i)}}\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_i\partial\rho_k}.$$

En tenant compte de cette expression, l'équation (39) peut se mettre sous la forme

$$(42)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} c_{ik}\sqrt{\frac{\varphi'(\rho_k)}{f(\rho_k)}}\,d\rho_k = 2p_i\sqrt{-\frac{\varphi(\alpha_i)}{\varpi'(\alpha_i)}}\,d\alpha_i.$$

Si l'on élève les deux membres au carré et si l'on ajoute toutes les équations obtenues en donnant à i toutes les valeurs possibles, on aura

$$\sum \frac{\varphi'(\rho_k)}{f(\rho_k)}d\rho_k^2 = -4\sum \frac{\varphi(\alpha_i)}{\varpi'(\alpha_i)}p_i^2\,d\alpha_i^2$$

ou encore, en utilisant l'équation (21),

$$(43)\qquad ds^2 = -4M^2\sum \frac{\varphi(\alpha_i)}{\varpi'(\alpha_i)}p_i^2\,d\alpha_i^2.$$

Cette expression de l'élément linéaire de l'espace à n dimensions, étant débarrassée des rectangles, met en évidence que les fonctions α_i forment un système complètement orthogonal.

IV.

Des propositions établies dans l'article précédent résulte l'existence d'une infinité de systèmes orthogonaux nouveaux. Il est aisé en effet de démontrer que les équations (36), quoique en nombre surabondant, admettent des solutions, algébriques ou transcendantes, en nombre illimité, et que leur intégrale générale contient dans son expression n fonctions arbitraires d'une variable. Les systèmes orthogonaux définis par les formules (37)

$$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_i} = \frac{\partial F}{\partial\alpha_i} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

ont donc un degré assez grand de généralité.

Les équations précédentes se présentent sous forme transcendante, puisque θ a pour expression

$$\theta = \sum_{i=1}^{i=n} \int \sqrt{\frac{\varpi(\rho_i)}{f(\rho_i)}}\, d\rho_i;$$

mais nous allons voir qu'en s'appuyant sur la découverte fondamentale d'Abel relative aux intégrales algébriques, on peut, dans un nombre illimité de cas, les remplacer par des relations entièrement algébriques.

Considérons en effet l'équation

$$P^2 - Q^2 f(x)\varpi(x) = 0 \tag{44}$$

où P et Q désignent deux polynomes algébriques en x dont nous regardons les coefficients comme variables. Le théorème d'Abel nous apprend que, si on désigne par $x_1, x_2, \ldots,$ les racines de cette équation et si l'on suppose pour chacune d'elles le signe du radical défini par l'équation

$$\sqrt{f(x)\varpi(x)} = \frac{P}{Q}, \tag{45}$$

on aura, en supposant que les polynomes P et Q varient de δP et de δQ et en désignant par δx_i la variation correspondante de x_i,

$$\sum_i \frac{R(x_i)\delta x_i}{\sqrt{f(x_i)\varpi(x_i)}} = \prod \frac{2R(x)(P\delta Q - Q\delta P)}{P^2 - Q^2 f(x)\varpi(x)}; \tag{46}$$

$R(x)$ désignant un polynome quelconque et $\prod$ étant le signe qui exprime le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de l'expression soumise à ce signe suivant les puissances descendantes de x.

Supposons maintenant que les coefficients des polynomes P et Q varient d'un système de valeurs désigné par l'indice 0 à un autre système désigné par l'indice 1. Chacune des racines x_i passera d'une valeur x_i^0 à une valeur x_i^1; l'équation précédente, intégrée entre ces deux états, nous donnera la suivante

$$\sum_i \int_{x_i^0}^{x_i^1} \frac{R(x_i)dx_i}{\sqrt{f(x_i)\varpi(x_i)}} = \prod \frac{R(x)}{\sqrt{f(x)\varpi(x)}} \left| \log \frac{P + Q\sqrt{f(x)\varpi(x)}}{P - Q\sqrt{f(x)\varpi(x)}} \right|_0^1 \tag{47}$$

qui est due également à Abel.

Nous allons l'appliquer successivement à nos deux systèmes orthogonaux en prenant pour $\varpi(x)$ le polynome défini par l'équation (25) et pour $f(x)$ le polynome qui figure dans l'expression de l'élément linéaire.

Pour le premier des deux systèmes orthogonaux, ce polynome est du degré n. Choisissons P du degré $p+n$ et Q du degré $p-1$ et prenons pour système de valeurs initiales celui pour lequel P se réduit à son premier terme, tous les coefficients de Q étant nuls. Alors toutes les valeurs initiales x_i^0 seront nulles et il en sera de même de la valeur initiale de

$$\log \frac{P + Q\sqrt{f(x)\varpi(x)}}{P - Q\sqrt{f(x)\varpi(x)}}.$$

Choisissons maintenant pour l'état final celui dans lequel n des $2p+2n$ racines x_i sont égales à $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, les $2p+n$ autres se réduisant toutes à des constantes $h_1, h_2, \ldots, h_{2p+n}$. En exprimant que l'équation (44) admet toutes ces racines, nous aurons $2p+2n$ équations qui, par l'élimination des $2p+n$ coefficients de P et de Q, donneront n relations algébriques entre les quantités ρ_i, α_k, h_l. Ces relations algébriques donneront naissance, d'après la formule (47), aux relations transcendantes comprises dans la formule générale

$$\text{(48)} \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{\rho_i} \frac{R(\rho_i)d\rho_i}{\sqrt{f(\rho_i)\varpi(\rho_i)}} + \sum_{i=1}^{i=n+2p} \int_0^{h_i} \frac{R(h_i)dh_i}{\sqrt{f(h_i)\varpi(h_i)}}$$

$$= \prod \frac{R(x)}{\sqrt{f(x)\varpi(x)}} \log \frac{P + Q\sqrt{f(x)\varpi(x)}}{P - Q\sqrt{f(x)\varpi(x)}},$$

P et Q ayant les valeurs qui correspondent à l'état final, parce que, pour l'état initial, le logarithme qui figure dans la formule (47) se réduit à zéro. Ainsi les coefficients de P et Q sont déterminés par les conditions

$$\text{(49)} \qquad P(\rho_i) - Q(\rho_i)\sqrt{f(\rho_i)\varpi(\rho_i)} = 0,$$

$$\text{(50)} \qquad P(h_i) - Q(h_i)\sqrt{f(h_i)\varpi(h_i)} = 0,$$

qui permettraient évidemment d'écrire les expressions développées de ces polynomes.

Dans la formule (48), le second membre sera nul toutes les fois que $R(x)$ sera de degré inférieur à n. On aura donc

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{\rho_i} \frac{R(\rho_i)\,d\rho_i}{\sqrt{f(\rho_i)\varpi(\rho_i)}} = - \sum_{i=1}^{i=n+2p} \int_0^{h_i} \frac{R(h_i)\,dh_i}{\sqrt{f(h_i)\varpi(h_i)}},$$

pour tout polynome $R(x)$ de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

D'après cela, prenons pour $R(x)$ successivement les différents quotients $\dfrac{\varpi(x)}{x - a_k}$ que l'on obtient en supprimant un des facteurs de $\varpi(x)$. On aura les n équations

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{\rho_i} \frac{\sqrt{\varpi(\rho_i)}\,d\rho_i}{(\rho_i - a_k)\sqrt{f(\rho_i)}} = - \sum_{i=1}^{i=n+2p} \int_0^{h_i} \frac{\sqrt{\varpi(h_i)}\,dh_i}{(h_i - a_k)\sqrt{f(h_i)}} \tag{51}$$

auxquelles on peut donner la forme suivante.

Posons

$$\theta = \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{\rho_i} \sqrt{\frac{\varpi(\rho_i)}{f(\rho_i)}}\,d\rho_i, \tag{52}$$

$$F = - \sum_{i=1}^{i=n+2p} \int_0^{h_i} \sqrt{\frac{\varpi(h_i)}{f(h_i)}}\,dh_i. \tag{53}$$

Les équations (51) pourront s'écrire sous la forme abrégée

$$\frac{\partial \theta}{\partial a_i} = \frac{\partial F}{\partial a_i}. \tag{54}$$

Et comme la fonction F satisfait évidemment aux équations aux dérivées partielles (36), nous voyons que les équations (54) rentrent dans le type (37) donné plus haut et que les variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ déterminées par ces équations en fonction de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ sont les paramètres d'un système orthogonal. Comme les relations transcendantes (54) peuvent être remplacées par les équations algébriques que l'on obtient en éliminant entre les équations (49) et (50), les coefficients de P et de Q, on reconnait que tous les systèmes orthogonaux ainsi définis sont algébriques.

Les raisonnements précédents se rattachent au premier des deux systèmes orthogonaux définis aux articles I et II. Si nous envisageons le second, pour lequel $f(x)$ est du degré $n+2$, on pourra constituer une théorie analogue.

On prendra l'équation algébrique

$$P^2 - Q^2 f(x)\varpi(x) = 0 \tag{55}$$

où P sera maintenant un polynome de degré $n+p+1$ et Q un polynome de degré p. On exprimera qu'elle admet pour racines $\rho_1, \ldots, \rho_n$ et $n+2p+2$ constantes h_i. L'élimination des $n+2p+2$ coefficients de P et de Q entre les $2n+2p+2$ équations ainsi obtenues laissera n relations entre les variables ρ_i et les variables α_i qui définiront également un système orthogonal. Le raisonnement est le même que pour le cas précédent.

ON THE RELATION OF THE ABELIAN TO THE JACOBIAN ELLIPTIC FUNCTIONS

BY

J. W. L. GLAISHER

of CAMBRIDGE

1. The three Jacobian elliptic functions $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, their reciprocals and their quotients form a system of twelve functions which I have found it convenient to represent by a uniform notation viz. putting $\frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x} = \operatorname{sc} x$, $\frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} = \operatorname{cd} x$, $\frac{1}{\operatorname{sn} x} = \operatorname{ns} x$, &c, we have twelve functions, each denoted by a functional sign consisting of two of the letters s, c, d, n, and forming the following four groups, the members of each group having the same final letter:

$$\operatorname{sn} x, \operatorname{cn} x, \operatorname{dn} x; \quad \operatorname{cd} x, \operatorname{sd} x, \operatorname{nd} x; \quad \operatorname{dc} x, \operatorname{nc} x, \operatorname{sc} x; \quad \operatorname{ns} x, \operatorname{ds} x, \operatorname{cs} x.$$

Each of these four groups might have been selected as the standard group, the members of the other groups being derived from it merely as reciprocals and quotients. The actual selection of the first group by JACOBI was due to the fact that $(1 - x^2)(1 - c^2x^2)$ was LEGENDRE's standard form of the general quartic function, this form having been chosen by him in order that the denominator of the integral might be reducible to the form $\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}$.

2. In treating the Jacobian theory in my lectures on Elliptic Functions, I have been accustomed for many years to employ the twelve elliptic functions sn, cn, cd, dc, &c. and the four corresponding Zeta functions denoted, by a somewhat analogous notation, by zn, zd, zc, zs. These

sixteen functions form a complete system, of which, however, only twelve are doubly periodic.[1]

The *s*-group has some special properties, but with this exception all the four groups of the elliptic functions are similar to one another in all essential respects, and any one of the four might have been selected as the standard group.

We can pass from any one group to the other three either by forming the reciprocals and quotients of the members of the original group as indicated by the notation (i. e. $\frac{\operatorname{sd} x}{\operatorname{nd} x} = \frac{\operatorname{sc} x}{\operatorname{nc} x} = \frac{1}{\operatorname{ns} x} = \operatorname{sn} x$), or by increasing the arguments by K, iK', $K + iK'$. Thus, taking for example the *n*-group, we have

$$\operatorname{sn}(x+K) = \operatorname{cd} x, \qquad \operatorname{sn}(x+iK') = \frac{1}{k}\operatorname{ns} x,$$

$$\operatorname{cn}(x+K) = -k'\operatorname{sd} x, \qquad \operatorname{cn}(x+iK') = -\frac{i}{k}\operatorname{ds} x,$$

$$\operatorname{dn}(x+K) = k'\operatorname{nd} x, \qquad \operatorname{dn}(x+iK') = -i\operatorname{cs} x,$$

$$\operatorname{sn}(x+K+iK') = \frac{1}{k}\operatorname{dc} x,$$

$$\operatorname{cn}(x+K+iK') = -\frac{ik'}{k}\operatorname{nc} x,$$

$$\operatorname{dn}(x+K+iK') = ik\operatorname{sc} x.$$

3. The algebraical relations connecting the three members of each group are:

$$\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x = 1, \qquad k'^2\operatorname{sd}^2 x + \operatorname{cd}^2 x = 1,$$

$$k^2\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{dn}^2 x = 1, \qquad \operatorname{nd}^2 x - k^2\operatorname{sd}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{dn}^2 x - \operatorname{cn}^2 x = k'^2, \qquad k^2\operatorname{cd}^2 x + k'^2\operatorname{nd}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{nc}^2 x - \operatorname{sc}^2 x = 1, \qquad \operatorname{ns}^2 x - \operatorname{cs}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{dc}^2 x - k'^2\operatorname{sc}^2 x = 1, \qquad \operatorname{ns}^2 x - \operatorname{ds}^2 x = k^2,$$

$$\operatorname{dc}^2 x - k'^2\operatorname{nc}^2 x = k^2, \qquad \operatorname{ds}^2 x - \operatorname{cs}^2 x = k'^2,$$

[1] This system of twelve or sixteen functions is considered in the Messenger of Mathematics vol. XI, 81—95, 120—138 (1881—2), XV, 92—148 (1885), XVI, 67—86 (1886), XVII, 1—18 (1887), XVIII, 1—84 (1888).

and the formulæ giving the derivatives of the functions with respect to x are:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}'\,x &= \mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x, & \mathrm{cd}'\,x &= -k'^2\,\mathrm{sd}\,x\,\mathrm{nd}\,x,\\
\mathrm{cn}'\,x &= -\,\mathrm{dn}\,x\,\mathrm{sn}\,x, & \mathrm{sd}'\,x &= \mathrm{nd}\,x\,\mathrm{cd}\,x,\\
\mathrm{dn}'\,x &= -k^2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x, & \mathrm{nd}'\,x &= k^2\,\mathrm{cd}\,x\,\mathrm{sd}\,x,\\
\mathrm{dc}'\,x &= k'^2\,\mathrm{nc}\,x\,\mathrm{sc}\,x, & \mathrm{ns}'\,x &= -\,\mathrm{ds}\,x\,\mathrm{cs}\,x,\\
\mathrm{nc}'\,x &= \mathrm{sc}\,x\,\mathrm{dc}\,x, & \mathrm{ds}'\,x &= -\,\mathrm{cs}\,x\,\mathrm{ns}\,x,\\
\mathrm{sc}'\,x &= \mathrm{dc}\,x\,\mathrm{nc}\,x, & \mathrm{cs}'\,x &= -\,\mathrm{ns}\,x\,\mathrm{ds}\,x.
\end{aligned}$$

Certain multipliers such as k, k', &c. are connected with some of the functions, and attaching these quantities to the functions to which they belong, the four groups become

$$k\,\mathrm{sn}\,x\,,\ k\,\mathrm{cn}\,x\,,\ \mathrm{dn}\,x\,;\ k\,\mathrm{cd}\,x\,,\ kk'\,\mathrm{sd}\,x\,,\ k'\,\mathrm{nd}\,x\,;\ \mathrm{dc}\,x\,,\ k'\,\mathrm{nc}\,x\,,\ k'\,\mathrm{sc}\,x;$$

$$\mathrm{ns}\,x\,,\ \mathrm{ds}\,x\,,\ \mathrm{cs}\,x,$$

which, except for sign and the multiplier i, transform into one another by the addition of K, iK', $K+iK'$ to the argument.

4. It will be apparent by inspection of the above formulæ, and it becomes still more evident in working systematically with the twelve functions that, although each group might properly have been selected as the standard, still the groups differ from each other in points of detail which affect their convenience in use.

The s-group is the most regular, and is free from k-coefficients, but, like the cotangent and cosecant in trigonometry, the functions become infinite when x is zero. The c- and d-groups are very much alike. Although the d-group is the most encumbered by external factors, k and k' are involved in a quasi-symmetrical manner, and on this account this group appears to be preferable to the n- or c-group. In the s-group all three functions are uneven; in the other three groups one is uneven and two are even.

5. It is evident that the Abelian elliptic functions φ, f, F bear a close general resemblance to sn, cn, dn respectively, but the actual relations

between φ and sn, f and cn, &c. are complicated and inconvenient, the modulus of the Jacobian functions being imaginary. These relations are

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sn} cx}{c}$$

$$f(x) = \operatorname{cn} cx,$$

$$F(x) = \operatorname{dn} cx,$$

where k, the modulus of the Jacobian functions, $= \frac{ie}{c}$. The corresponding relations between the periods are also complicated viz.

$$\omega = \frac{2K}{c}; \qquad \varpi = \frac{2(iK - K')}{c}$$

the modulus k being $\frac{ie}{c}$ as before.

Thus, in spite of the general similarity between the functions, the direct transition from φ, f, F to sn, cn, dn is by no means convenient.

6. The special object of this note is to point out that it is quite otherwise if we identify φ, f, F not with sn, cn, dn but with sd, cd, nd; in fact these two sets of functions are practically the same and the transition is extremely simple.

Thus, if we put $a^2 = c^2 + e^2$, c and e being Abel's c and e, and take

$$k = \frac{e}{a}, \quad \text{so that} \quad k' = \frac{c}{a},$$

then

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sd} ax}{a},$$

$$f(x) = \operatorname{cd} ax,$$

$$F(x) = \operatorname{nd} ax,$$

and the relations between the periods are

$$\omega = \frac{2K}{a}, \qquad \varpi = \frac{2K'}{a}.$$

If we suppose c and e connected by the relation $c^2 + e^2 = 1$, so that

$a = 1$, then $\varphi(x)$, $f(x)$, $F(x)$ are the same as $\mathrm{sd}\,x$, $\mathrm{cd}\,x$, $\mathrm{nd}\,x$ and $\frac{1}{2}\omega$ and $\frac{1}{2}\varpi$ are the same as K and K', c and e being k' and k.

Thus, just as Jacobi selected the n-group, so did Abel select the d-group. The only other difference is that Abel's functions depend upon two disposable constants c and e, and Jacobi's upon only one k.

7. As already mentioned the d-group seems preferable to the n-group on account of its greater regularity. It has also certain other advantages; for example, considering the change of the argument x into ix, the formulæ for the twelve functions are:

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{sn}\,ix = i\,\mathrm{sc}(x, k'), & \mathrm{cd}\,ix = \mathrm{nd}(x, k'), \\
\mathrm{cn}\,ix = \mathrm{nc}(x, k'), & \mathrm{sd}\,ix = i\,\mathrm{sd}(x, k'), \\
\mathrm{dn}\,ix = \mathrm{dc}(x, k'), & \mathrm{nd}\,ix = \mathrm{cd}(x, k'), \\
\mathrm{dc}\,ix = \mathrm{dn}(x, k'), & \mathrm{ns}\,ix = -i\,\mathrm{cs}(x, k'), \\
\mathrm{nc}\,ix = \mathrm{cn}(x, k'), & \mathrm{ds}\,ix = -i\,\mathrm{ds}(x, k'), \\
\mathrm{sc}\,ix = i\,\mathrm{sn}(x, k'), & \mathrm{cs}\,ix = -i\,\mathrm{ns}(x, k').
\end{array}$$

Thus when the argument is multiplied by i the n-group transforms into the c-group and vice versa, but the d-group and the s-group transform each into itself. On account of the property $\mathrm{sd}\,ix = i\,\mathrm{sd}(x, k')$ the function $\mathrm{sd}\,x$ is perhaps the most convenient of the twelve to select when the choice is quite free as, e. g., when it is required to select an elliptic function as a subsidiary function.

8. The Jacobian function $\mathrm{sn}\,x$ was obtained by the inversion of the integral

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}$$

(this being Legendre's form with k instead of c), and the Abelian function $\varphi(x)$ by the inversion of the integral

[illegible]

and, except as regards sign, $\operatorname{cn} x$ and $\operatorname{dn} x$ may be defined by

$$\operatorname{cn}^2 x = 1 - \operatorname{sn}^2 x, \qquad \operatorname{dn}^2 x = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x,$$

and $f(x)$ and $F(x)$ by

$$f^2(x) = 1 - c^2\varphi^2(x), \qquad F^2(x) = 1 + e^2\varphi^2(x).$$

JACOBI's K was defined by

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}},$$

K' being the same function of k', and ABEL's quarter-periods were defined by

$$\frac{1}{2}\omega = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)}}, \qquad \frac{1}{2}\varpi = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{\sqrt{(1 - e^2x^2)(1 + c^2x^2)}}.$$

9. ABEL's selection of the d-group was not accidental. After stating in his 'Recherches' that his object is to consider the inverse of LEGENDRE's integral, he mentions that he had remarked that the formulæ become simpler by supposing c^2 negative in LEGENDRE's form $(1 - x^2)(1 - c^2x^2)$. He therefore puts $c^2 = - e^2$ and, for greater symmetry replaces $1 - x^2$ by $1 - c^2x^2$.

The property of $\varphi(x)$ which is equivalent to $\operatorname{sd} x = i\operatorname{sd}(x, k')$ was noticed at the very outset by ABEL who shows that, by the interchange of c and e, $\frac{\varphi(xi)}{i}$ is changed into $\varphi(x)$; whence also by the same interchange, $f(xi)$ and $F(xi)$ are changed into $F(x)$ and $f(x)$.[1]

10. Every elliptic function is of course the inverse of an integral of the form $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$, where X is a quartic (or cubic) function of x. The

[1] ABEL's form of elliptic function is peculiarly well adopted to the geometry of the lemniscate, and this may have helped to influence his choice of the form of integral, which reduces to that giving the length of the arc of a lemniscate when $c = e = 1$. The relation between r the radius vector, and s the arc of the lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, both measured from the pole, is $r = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{sd}\left(s\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

values of X which correspond to the twelve functions (as is evident from the formulæ in § 3) are:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sn} x,\ X = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, && \operatorname{cd} x,\ X = -\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},\\
&\operatorname{cn} x,\ X = \sqrt{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)}, && \operatorname{sd} x,\ X = \sqrt{(1+k^2x^2)(1-k'^2x^2)},\\
&\operatorname{dn} x,\ X = -\sqrt{(1-x^2)(x^2-k'^2)}, && \operatorname{nd} x,\ X = \sqrt{(1-k'^2x^2)(x^2-1)},\\
&\operatorname{dc} x,\ X = \sqrt{(x^2-1)(x^2-k^2)}, && \operatorname{ns} x,\ X = -\sqrt{(x^2-1)(x^2-k^2)},\\
&\operatorname{nc} x,\ X = \sqrt{(x^2-1)(k^2+k'^2x^2)}, && \operatorname{ds} x,\ X = -\sqrt{(x^2+k^2)(x^2-k'^2)},\\
&\operatorname{sc} x,\ X = \sqrt{(1+x^2)(1+k'^2x^2)}, && \operatorname{cs} x,\ X = -\sqrt{(x^2+1)(x^2+k'^2)}.
\end{aligned}$$

Among the groups the s-group is the most regular, but among the twelve functions the value of X is most symmetrical in the case of $\operatorname{sd} x$ and $\operatorname{ds} x$.

11. The addition formulæ for the Jacobian n-group are so well known that they need not be written down; those for the c-group which closely resemble them (the principal difference being the substitution of k'^2 for k^2) are:

$$\operatorname{sc}(u+v) = \frac{\operatorname{sc} u \operatorname{dc} v \operatorname{nc} v + \operatorname{sc} v \operatorname{dc} u \operatorname{nc} u}{1 - k'^2 \operatorname{sc}^2 u \operatorname{sc}^2 v},$$

$$\operatorname{nc}(u+v) = \frac{\operatorname{nc} u \operatorname{nc} v + \operatorname{sc} u \operatorname{dc} u \operatorname{sc} v \operatorname{dc} v}{1 - k'^2 \operatorname{sc}^2 u \operatorname{sc}^2 v},$$

$$\operatorname{dc}(u+v) = \frac{\operatorname{dc} u \operatorname{dc} v + k'^2 \operatorname{sc} u \operatorname{nc} u \operatorname{sc} v \operatorname{nc} v}{1 - k'^2 \operatorname{sc}^2 u \operatorname{sc}^2 v},$$

For the d-group the formulæ are

$$\operatorname{sd}(u+v) = \frac{\operatorname{sd} u \operatorname{cd} v \operatorname{nd} v + \operatorname{sd} v \operatorname{cd} u \operatorname{nd} u}{1 + k^2k'^2 \operatorname{sd}^2 u \operatorname{sd}^2 v},$$

$$\operatorname{cd}(u+v) = \frac{\operatorname{cd} u \operatorname{cd} v - k^2 \operatorname{sd} u \operatorname{sd} v \operatorname{nd} u \operatorname{nd} v}{1 + k^2k'^2 \operatorname{sd}^2 u \operatorname{sd}^2 v},$$

$$\operatorname{nd}(u+v) = \frac{\operatorname{nd} u \operatorname{nd} v + k'^2 \operatorname{sd} u \operatorname{sd} v \operatorname{cd} u \operatorname{cd} v}{1 + k^2k'^2 \operatorname{sd}^2 u \operatorname{sd}^2 v},$$

being practically the same as ABEL's formulæ, with k' and k in place of c and e.

For the s-group the formulæ are

$$\mathrm{ns}(u+v)=\frac{\mathrm{ns}\,u\,\mathrm{ds}\,v\,\mathrm{cs}\,v-\mathrm{ns}\,v\,\mathrm{ds}\,u\,\mathrm{cs}\,u}{\mathrm{ns}^2 v-\mathrm{ns}^2 u}, \qquad \mathrm{ds}(u+v)=\frac{\mathrm{ds}\,u\,\mathrm{cs}\,v\,\mathrm{ns}\,v-\mathrm{ds}\,v\,\mathrm{cs}\,u\,\mathrm{ns}\,u}{\mathrm{ns}^2 v-\mathrm{ns}^2 u},$$

$$\mathrm{cs}(u+v)=\frac{\mathrm{cs}\,u\,\mathrm{ns}\,v\,\mathrm{ds}\,v-\mathrm{cs}\,v\,\mathrm{ns}\,u\,\mathrm{ds}\,u}{\mathrm{ns}^2 v-\mathrm{ns}^2 u}.$$

Thus the formulæ for the d-group are more symmetrical than for the n- or c-group, but not so symmetrical as those for the s-group.

12. Although in this note I have spoken of selecting one of the groups as the standard group, because such a selection was made by JACOBI and by ABEL, and because otherwise the number of formulæ required is considerably increased, it should be noted that for the complete development of the theory, it is necessary to consider the twelve functions as a whole, without giving special prominence by notation or otherwise to any one group. For this purpose the two-letter notation is very convenient as all twelve functions are placed on exactly the same footing: it also adapts itself naturally to the fact that the elliptic functions are the quotients of theta functions viz. we may put $\mathrm{sn}\,x=\frac{\mathrm{s}(x)}{\mathrm{n}(x)}$, $\mathrm{cn}\,x=\frac{\mathrm{c}(x)}{\mathrm{n}(x)}$, $\mathrm{dn}\,x=\frac{\mathrm{d}(x)}{\mathrm{n}(x)}$ where $\mathrm{s}(x)$, $\mathrm{c}(x)$, $\mathrm{d}(x)$, $\mathrm{n}(x)$ differ from the Theta functions only by factors depending upon k.

13. With respect to the addition formulæ in § 11 the forms selected for the differents groups are those in which the denominators are rational (i. e. rational functions of any of the functions). There are however four forms[1] of the addition formulae for each group, and when all these forms are included, there is not much difference between the groups.

14. The Weierstrassian function $\wp(x)$ depends upon the s-group viz.

$$\wp(x)=e_1+\alpha^2\mathrm{cs}^2\alpha x=e_2+\alpha^2\mathrm{ds}^2\alpha x=e_3+\alpha^2\mathrm{ns}^2\alpha x$$

where

$$\alpha=\sqrt{e_1-e_3}, \qquad k=\sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}.$$

The corresponding functions derived from the c-, n-, and d-groups are $\wp(u+\omega)$, $\wp(u+\omega')$, and $\wp(u+\omega'')$ respectively.

[1] The four forms for the n-group are given in the Messenger, vol. IX, p. 106. The corresponding forms for the other groups are deducible from them at sight.

SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES CONSIDERÉES COMME FONCTIONS ALGÉBRIQUES DE FONCTIONS D'UNE VARIABLE

PAR

P. APPELL.
À PARIS.

Nous nous proposons d'appeler brièvement l'attention sur un intéressant problème qui réunit, dans un même souvenir, les noms d'ABEL et de JACOBI, d'HERMITE et de WEIERSTRASS.

Dans une lettre à HERMITE (Journal de mathématiques, t. 8), JACOBI démontre que les fonctions de deux variables qui résultent de l'inversion des intégrales ultraelliptiques sont des *fonctions algébriques de fonctions d'une variable.* Nous avons dans une Note insérée aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (t. 103, p. 1246, 2ème semestre 1886) indiqué d'une façon générale le mécanisme pas lequel se manifeste, dans ce mode d'expression, la quadruple périodicité des fonctions méromorphes de deux variables à quatre paires de périodes. Nous allons revenir sur cette question en en donnant des exemples élémentaires.

D'après WEIERSTRASS (Journal de Crelle, t. 89, p. 1) toute fonction méromorphe de deux variables u et v à quatre paires de périodes peut s'exprimer rationnellement à l'aide de trois fonctions particulières

$$(\mathrm{M}) \qquad X = f_1(u, v), \qquad Y = f_2(u, v), \qquad Z = f_3(u, v)$$

liées par une équation algébrique irreductible

$$F(X, Y, Z) = 0$$

représentant une certaine surface $\boldsymbol{S}$ lieu des points $\boldsymbol{M}$ de coordonnées

X, Y, Z. Il suffit donc de voir comment la quadruple périodicité se manifeste pour ces trois fonctions au point de vue qui nous occupe.

Considérons, en particulier, sur la surface $\boldsymbol{S}$, les deux suites de points m et m' obtenus en faisant successivement $v = 0$, $u = 0$:

$$(m) \qquad x = f_1(u, 0), \qquad y = f_2(u, 0), \qquad z = f_3(u, 0),$$

$$(m') \qquad x' = f_1(0, v), \qquad y' = f_2(0, v), \qquad z' = f_3(0, v).$$

Quand u varie le point m décrit sur $\boldsymbol{S}$ une courbe $\boldsymbol{C}$; de même quand v varie le point m' décrit sur $\boldsymbol{S}$ une courbe $\boldsymbol{C}'$.

D'après le théorème d'addition la fonction

$$X = f_1(u + 0, 0 + v)$$

est une fonction rationnelle de x, y, z, x', y', z'; de même pour Y et Z:

$$(1) \qquad \begin{aligned} X &= R_1(x, y, z; x', y', z'), \\ Y &= R_2(x, y, z; x', y', z'), \\ Z &= R_3(x, y, z; x', y', z'), \end{aligned}$$

R_1, R_2, R_3 étant trois fonctions rationnelles.

Soit maintenant (α, β) un groupe de périodes. D'après le théorème d'addition chaque fonction

$$f_1(u + \alpha, 0)$$

est une fonction rationnelle de $f_1(u, 0)$, $f_2(u, 0)$, $f_3(u, 0)$, et chaque fonction

$$f_1(0, v + \beta)$$

est une fonction rationnelle de $f_1(0, v)$, $f_2(0, v)$, $f_3(0, v)$. Donc par l'effet de l'addition de α à u le point $m(x, y, z)$ de $\boldsymbol{C}$ est remplacé par un point $m_1(x_1, y_1, z_1)$ de $\boldsymbol{C}$ dont les coordonnées sont fonctions rationnelles des x, y, z:

$$(m_1) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x, y, z), \\ y_1 &= \varphi_2(x, y, z), \\ z_1 &= \varphi_3(x, y, z). \end{aligned}$$

De même par l'effet de l'addition de β à v, le point $m'(x', y', z')$ de C', est remplacé par un point $m'_1(x'_1, y'_1, z'_1)$ de C' dont les coordonnées sont fonctions rationnelles de x', y', z':

$$(m'_1) \qquad \begin{aligned} x'_1 &= \psi_1(x', y', z'), \\ y'_1 &= \psi_2(x', y', z'), \\ z'_1 &= \psi_3(x', y', z'). \end{aligned}$$

Ainsi à chaque couple de périodes correspond une substitution rationnelle faite sur chacun des points m et m'. Mais comme le point $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ ne change pas quand on ajoute simultanément les deux périodes à u et v, les deux substitutions rationnelles (m_1) et (m'_1) doivent laisser invariables les fonctions rationnelles (1).

Rendons-nous compte de ce fait par des exemples élémentaires de fonctions dégénérées.

Premier exemple. Soit

$$\begin{aligned} X &= e^{u+v}, \\ Y &= e^{\omega u+\omega^2 v}, \\ Z &= e^{\omega^2 u+\omega v}, \end{aligned}$$

ω étant une racine cubique imaginaire de l'unité. Le point X, Y, Z décrit la surface

$$XYZ = 1.$$

Les fonctions exponentielles admettent les deux couples de périodes $(\alpha, \beta)(\alpha', \beta')$ définis pas

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2\pi i, \\ \omega\alpha + \omega^2\beta &= -2\pi i, \\ \omega^2\alpha + \omega\beta &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha' + \beta' &= 2\pi i, \\ \omega\alpha' + \omega^2\beta' &= 0, \\ \omega^2\alpha' + \omega\beta' &= -2\pi i. \end{aligned}$$

On a actuellement

$$x = e^u, \qquad y = e^{\omega u}, \qquad z = e^{\omega^2 u},$$
$$x' = e^v, \qquad y' = e^{\omega^2 v}, \qquad z' = e^{\omega v},$$
$$X = xx', \qquad Y = yy', \qquad Z = zz'.$$

Si on ajoute α à u et β à v, x, y, z subissent les substitutions

$$x_1 = xe^\alpha, \qquad y_1 = ye^{\omega\alpha}, \qquad z_1 = ze^{\omega^2\alpha},$$
$$x_1' = x'e^\beta, \qquad y_1' = y'e^{\omega^2\beta}, \qquad z_1' = z'e^{\omega\beta},$$

et les nouvelles valeurs de X, Y, Z sont égales aux anciennes, car

$$x_1x_1' = xx', \qquad y_1y_1' = yy', \qquad z_1z_1' = zz'.$$

Deuxième exemple. Prenons maintenant des fonctions à trois périodes comme celles qui ont été considérées par ROSENHAIN, mais en considérant pour abréger le cas le plus simple possible

$$X = e^u \frac{H(v-a)}{H(v-a-s)} \frac{H(a+s)}{H(a)},$$
$$Y = e^u \frac{H(v-b)}{H(v-b-s)} \frac{H(b+s)}{H(b)},$$
$$Z = e^u \frac{H(v-c)}{H(v-c-s)} \frac{H(c+s)}{H(c)}$$

a, b, c, s désignant des constantes. Ces fonctions admettent les trois couples de périodes

$$(2\pi i, 0), (0, 2K), (\alpha, 2iK')$$

où la quantité α est définie par la relation

$$\alpha + \frac{i\pi}{K}s = 0.$$

Les quotients $\frac{X}{Z}$ et $\frac{Y}{Z}$ étant des fonctions elliptiques de v, la surface lieu du point (X, Y, Z) est un cône.

Les points m et m' ont pour coordonnées

$$(m) \qquad x = e^u, \qquad y = e^u, \qquad z = e^u,$$

$$(m') \qquad x' = \frac{H(v-a)}{H(v-a-s)} \frac{H(a+s)}{H(a)}, \ \ldots$$

et on a

$$X = xx', \qquad Y = yy', \qquad Z = zz'.$$

L'addition des deux premiers groupes de périodes laisse les points m et m' inaltérés. L'addition du troisième groupe multiplie respectivement x, y, z et x', y', z' pas des facteurs inverses.

Il serait aisé de faire des vérifications analogues pour les fonctions mêmes considérées par Rosenhain; mais il y aurait surtout intérêt à prendre cette question par la voie algébrique et à chercher les groupes de substitutions possédant les propriétés précédentes.

EINIGE ANWENDUNGEN DER EULER-MACLAURIN'SCHEN SUMMENFORMEL, INSBESONDERE AUF EINE AUFGABE VON ABEL

VON

WILHELM WIRTINGER

in INNSBRUCK.

ABEL hat der Summation endlicher und unendlicher Reihen an vielen Stellen Interesse entgegengebracht und die EULER'sche Summenformel selbst in bemerkenswerther Weise umgeformt.[1] KRONECKER[2] ist hierauf in seinen Vorlesungen über bestimmte Integrale zurückgekommen.

Man hat aber diese Formel bis jetzt nicht, so viel mir bekannt, für functionentheoretische Zwecke verwendet. Wenn im folgenden die Formel zunächst einfach abgeleitet und dann in dieser Richtung verwendet wird, so mag es vielleicht zur Jahrhundertfeier ABEL's nicht unpassend erscheinen, sie zum Schlusse auf eine Aufgabe anzuwenden, welche ABEL[3] selbst gestellt hat, und welche verlangt, die Werthe einer durch eine Potenzreihe mit endlichem Convergenzkreis gegebenen Function auf dem Convergenzkreis aus dieser Reihe selbst zu finden.

Es ist natürlich, dass dieses Problem in seiner ganzen Allgemeinheit nicht erledigt werden kann. Es gelingt aber doch, den Fall, in welchem die Reihe unter die von GAUSS und WEIERSTRASS betrachteten gehört, wenn nämlich der Quotient zweier aufeinanderfolgender Coefficienten nach ganzen negativen Potenzen des Index entwickelt werden kann, vollständig durchzuarbeiten. Eine dieser Reihen, die Binomialreihe, ist von ABEL selbst erledigt worden.

---

[1] Oeuvres ed. SYLOW et LIE, I, p. 34, II, p. 1, 14.

[2] *Vorlesungen über die Theorie der einf. und vielf. Integrale*, herausgegeben von E. NETTO. Leipzig 1894. Vorlesung 8, 9.

[3] Oeuvres ed. SYLOW et LIE, I, p. 618.

Dass dabei auch auf die STIRLING'sche Formel und auf die neuerdings viel behandelte Function $\zeta(s)$ von RIEMANN eingegangen wird, sowie das GAUSS-WEIERSTRASS'sche Convergenzcriterium für solche Reihen eine neue Begründung erfährt, welche seinen eigentlichen Charakter darzuthun scheint, möge damit gerechtfertigt werden, dass eine vielseitigere Verwendung der EULER'schen Formel in diesem Sinne vielleicht nicht ohne Interesse ist.

I.

Wir bezeichnen mit x eine reelle positive Zahl und mit $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl. Wir setzen dann mit STIELTJES[1]

$$P_1(x) = [x] - x + \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Es ist dann $P_1(x+1) = P_1(x)$ und, wie man aus der Reihenentwicklung

$$l(1 - re^{-i\varphi}) = -\sum_0^\infty \frac{r^n e^{-n\varphi i}}{n}$$

für $r = 1$ leicht herleitet,

$$P_1(x) = \sum_0^\infty \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi} \tag{2}$$

für alle nicht ganzzahligen Werthe von x.

Aus dieser Function $P_1(x)$ leiten wir eine Kette von Functionen ab durch die Recursionsformeln

$$\left\{\begin{aligned} & P_k(x) = (-1)^k \frac{dP_{k+1}(x)}{dx}, \qquad 0 < x < 1, \\ & \int_0^1 P_{k+1}(x)dx = 0, \\ & P_{k+1}(x+1) = P_{k+1}(x). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Dadurch sind sämmtliche Functionen $P(x)$ durch die erste bestimmt.

Es ergiebt sich unmittelbar aus der Definition, dass

1) $P_k(x)$ eine ganze rationale Function von $x - [x]$ mit rationalen Coefficienten ist und daher die Werthe $P_k(x)$ für ganzzahliges x selbst rationale Zahlen werden.

[1] Journal des mathématiques (sér. IV) V. 1889.

2) Dass die Functionen $P_k(x)$ für k grösser als 1 stetig sind für alle Werthe von x, auch die ganzzahligen, da nach (3)

$$P_{k+1}(1) - P_{k+1}(0) = (-1)^k \int_0^1 P_k(x)dx = 0.$$

3) Folgt aus der Entwicklung 2)

$$(4) \qquad \begin{cases} P_{2k}(x) = \sum_1^\infty \dfrac{\cos 2n\pi x}{2^{2k-1} n^{2k} \pi^{2k}}, \\ P_{2k+1}(x) = \sum_1^\infty \dfrac{\sin 2n\pi x}{2^{2k} n^{2k+1} \pi^{2k+1}}. \end{cases}$$

Hieraus folgt unmittelbar die Identität unserer Functionen mit den gewöhnlich als BERNOULLI'sche bezeichneten, sowie die bekannten Sätze, dass die Functionen $P_{2k+1}(x)$ für ganzzahliges x verschwinden. Die Functionen $P_{2k}(x)$ nehmen aber für solche x rationale Werthe an. Es ist dann nach (4)

$$(5) \qquad P_{2k}(r) = 2^{-2k+1} \pi^{-2k} \zeta(2k)$$

wo, wie üblich

$$\zeta(s) = \sum_1^\infty n^{-s}$$

gesetzt ist.

Aus den Formeln (3) kann man leicht Recursionsformeln für die $P_{2k}(0)$ erhalten, doch gehe ich hierauf nicht weiter ein, weil es sich um längst bekannte Dinge handelt, welche für unsern Zweck nicht nöthig sind.

II.

Sei nun $F(x)$ eine reelle oder complexe Function der reellen Veränderlichen x, welche im Intervall von a bis $a + Nb$ überall eine stetige Derivirte hat. Dabei sei b positiv und N eine positive ganze Zahl. Dann gilt die Gleichung

$$(6) \qquad F(a + Nb) - F(a + nb) = b \int_n^N F'(a + zb)dz.$$

Setzt man hier $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, N$ und summiert die so erhaltenen Gleichungen, so erhält man

$$(7) \qquad (N+1)F(a+Nb) - \sum_0^N F(a+nb) = b\sum_0^N \int_n^N F'(a+zb)dz.$$

Denkt man sich auf der rechten Seite jedes Integral zerlegt in die Integrale zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen k und $k+1$, so sieht man, dass jedes Theilintegral genau $k+1$ mal vorkommt. Man kann daher schreiben

$$(8) \qquad \sum_0^N \int_n^N F'(a+zb)dz = b\int_0^N ([z]+1)F'(a+zb)dz.$$

Nun ist nach (1)

$$1 + [z] = P_1(z) + z + \frac{1}{2}.$$

Führt man diesen Ausdruck in (8) ein, so erhält man für die rechte Seite nach Ausführung der Integration des von $\frac{1}{2}$ stammenden und partieller Integration des mit z multiplizierten Gliedes:

$$b\int_0^N P_1(z)F'(a+zb)dz + \frac{1}{2}(F(a+Nb) - F(a))$$
$$+ NF(a+Nb) - \int_0^N F(a+zb)dz.$$

Nach Einführung in (7) und gehöriger Reduction kommt so

$$(9) \qquad \sum_0^N F(a+nb) = \int_0^N F(a+zb)dz + \frac{1}{2}(F(a+Nb)+F(a))$$
$$- b\int_0^N P_1(z)F'(a+zb)dz.$$

Dies ist bereits der Hauptsache nach die Euler'sche Summenformel, welche also wesentlich eine identische Umformung ist.

Hat die Function $F(x)$ in dem betrachteten Intervall noch weitere stetige Derivirte, so kann das letzte Glied in (9) durch partielle Integration weiter entwickelt werden. Man erhält so mit Rücksicht auf die

Periodicität der Functionen $P_k(x)$ und das Verschwinden der Functionen $P_{2k+1}(x)$ für ganzzahliges x aus (9):

$$(10)\qquad \sum_0^N F(a+nb) = \int_0^N F(a+zb)dz + \frac{1}{2}(F(a+Nb)+F(a))$$

$$+\sum_{h=0}^{k}(-1)^h P_{2h+2}(0)(F^{(2h+1)}(a+Nb) - F^{(2h+1)}(a))b^{2h+1} + \theta_k,$$

$$\theta_k = (-1)^{k+2}b^{2k+3}\int_0^N P_{2k+3}(z)F^{(2k+3)}(a+bz)dz$$

$$= (-1)^{k+1}b^{2k+2}\int_0^N P_{2k+2}(z)F^{(2k+2)}(a+bz)dz$$

also gerade die Euler'sche oder auch Euler-Maclaurin'sche Summenformel.

III.

Als erste Anwendung zeigen wir, wie diese Formel gleichzeitig zum Gauss'schen Product für die Function $\Gamma(y)$ als auch zur Stirling'schen Formel, und zwar für alle nicht negativen Werthe von y führt.

Wir setzen in (9) $F(x) = l(y+x)$, wo y irgend eine reelle oder complexe Zahl, ausgenommen die reellen negativen Zahlen bedeuten kann. Wir nehmen ferner $a = 0$, $b = 1$ und geben dem Logarithmus seinen Hauptwerth. Dann folgt aus (9)

$$(11)\quad \sum_0^N l(y+n) = \int_0^N l(y+z)dz + \frac{1}{2}(l(y+N)+l(y)) - \int_0^N \frac{P_1(z)}{y+z}dz$$

$$= \left(y+N+\frac{1}{2}\right)l(y+N) - \left(y-\frac{1}{2}\right)l(y) - N - \int_0^N \frac{P_1(z)}{y+z}dz.$$

Setzt man in (11) $y = 1$ und subtrahirt, so kommt nach beiderseitiger Subtraction von $(y-1)lN$:

$$(12)\qquad \sum_0^N l\frac{y+n}{1+n} - (y-1)lN = (y-1)l\left(1+\frac{y}{N}\right)$$

$$+\left(1+N+\frac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{y-1}{1+N}\right) - \left(y-\frac{1}{2}\right)l(y) - \int_0^N \frac{P_1(z)}{y+z}dz + \int_0^N \frac{P_1(z)}{1+z}dz.$$

Die rechte Seite in (12) convergirt zu einem bestimmten Grenzwerth für unendliches N, wie man an den Integralen entweder direct oder einfacher nach einmaliger partieller Integration sieht, daher convergirt auch die linke Seite, und man hat für jedes nicht reell negative y die Gleichung:

$$\lim_{N=\infty} l \frac{y(y+1)(y+2)(y+3)\ldots(y+N)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (N+1)} N^{-y+1}$$

$$= \left(-y+\frac{1}{2}\right) ly + y - 1 - \int_0^N \frac{P(z)}{y+z} dz + \int_0^N \frac{P(z)}{1+z} dz.$$

Kehrt man hier die Zeichen um, subtrahirt auf beiden Seiten ly und lässt in der Grenze den irrelevanten Factor $\frac{N}{N+1}$ weg, so erhält man

(13) $$\lim_{N=\infty} l \frac{(y+1)(y+2)\ldots(y+N)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots N} N^{-y}$$

$$= \left(y+\frac{1}{2}\right) ly - y + 1 - \int_0^\infty \frac{P_1(z)}{1+z} dz + \int_0^\infty \frac{P_1(z)}{y+z} dz.$$

Hier steht links genau dass GAUSS'sche Product und rechts die STIRLING-sche Formel, wie sie STIELTJES dargestellt und weiter entwickelt hat. Die weiteren Glieder der Formel können wie bei STIELTJES durch partielle Integration gefunden und eingeschätzt werden.

Die EULER'sche Formel hat also hier unmittelbar auf die beiden wichtigsten Ausdrücke in der Theorie der Gammafunction geführt und deren Gleichheit dargethan.

IV.

Eine weitere Anwendung machen wir auf die harmonische Reihe und die Function $\zeta(s)$. Setzen wir in Formel (9) $F(x) = x^{-s}$, $a = 1$, $b = 1$ so erhalten wir:

(14) $$\sum_0^N (1+n)^{-s}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{1-s} + \frac{(1+N)^{-s+1}}{1-s} + \frac{1}{2}(1+N)^{-s} + s\int_0^N P_1(z)(1+z)^{-s-1} dz.$$

So lange der reelle Theil von s grösser ist als 1, kann man auf beiden Seiten zur Grenze für unendliches N übergehen und erhält

$$(15) \qquad \zeta(s) = \sum_{1}^{\infty} n^{-s} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1-s} + s\int_{0}^{\infty} P_1(z)(1+z)^{-s-1}dz.$$

Hier ist die linke Seite zunächst nur definirt, so lange der reelle Theil von s grösser ist als eins, dagegen aber stellt die rechte Seite eine analytische Function von s dar, so lange der reelle Theil von s positiv bleibt, da ja das Integral so lange gleichmässig convergirt. Daher haben wir in (15) in ganz unmittelbarer und elementarer Weise die analytische Fortsetzung von $\zeta(s)$ für das Gebiet der s-Werthe mit positiven reellen Theil vor uns.

Die Anwendung der Formel (10) würde ergeben:

$$(16) \quad \zeta(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1-s} + \sum_{0}^{k}(-1)^h P_{2h+2}(0)s(s+1)(s+2)(s+3)\ldots(s+2h)$$
$$+ s(s+1)(s+2)(s+3)\ldots(s+2k+1)\int_{0}^{\infty} P_{2k+2}(z)(1+z)^{-s-2k-2}dz.$$

Da das Integral wegen der Endlichkeit von $P(z)$ endlich und gleichmässig convergent bleibt, so lange der reelle Theil von (s) grösser als $-2k-1$, so erhalten wir durch diese Formel unmittelbar die analytische Fortsetzung von $\zeta(s)$ für dieses Gebiet, und weil k beliebig gross genommen werden kann, sehen wir, dass die Function $\zeta(s)$ sich über die ganze Ebene fortsetzen lässt, ohne andere Singularitäten als den Pol bei $s = 1$ aufzuweisen. Dies ist wohl der einfachste und directeste Beweis des grundlegenden Satzes aus der Theorie dieser Function. Für $s = 0$ finden wir unmittelbar $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

Aus (15) folgt noch

$$|\zeta(s)| \leqq |s| \left(\frac{1}{2|s|} + \frac{1}{|3(s-1)|} + \frac{1}{2\alpha}\right),$$

wenn $s = \alpha + \beta i$ gesetzt wird, so lange α positiv ist. Hieraus aber fliessen sofort die Sätze, welche Hadamard über das Verhalten der Function $\xi(t)$ gegeben hat für grosse Werthe von t, insbesondere erhält man durch Anwendung der Hadamard'schen Sätze über ganze Functionen, dass $\xi(t)$

vom Range Null ist, und durch Anwendung des Satzes von Schou den Näherungsausdruck für die Anzahl der Wurzeln von $\xi(t)$.

Zerlegt man in (15) das Integral rechts in Theilintegrale zwischen je zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen n und $n+1$, so ist in einem Intervall $P(z) = n - z + \frac{1}{2}$ und man kann die Integration ausführen. Man erhält so bei gehöriger Reduction

$$\zeta(s) = \tag{17}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1-s}\sum_{1}^{\infty}\left((1+n)^{-s}\left(n+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}s\right) - (2+n)^{-s}\left(n+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}s\right)\right)$$

wo nun die Reihe unter dem Summenzeichen zu Folge ihrer Herleitung convergirt, so lange der reelle Theil von s positiv ist. Für ein s dessen reeller Theil grösser als 1 ist, reducirt sich diese Reihe identisch auf die ursprüngliche Reihe für $\zeta(s)$. Auch die Formel (18) kann in dieser Weise behandelt werden, liefert aber mit steigendem k erheblich complicirtere Resultate. Man kann bemerken, dass die Formel (17) sich für ein s mit positiven reellen Theil auf die bekannte

$$\zeta(s) = \lim_{N=\infty}\left(\sum_{0}^{N}(1+n)^{-s} - \frac{(1+N)^{-s}}{1-s}\right)$$

reducirt, und analog die aus (16) hergeleiteten Formeln auf die bekannten Grenzausdrücke.[1] Man erhält diese auch leicht unmittelbar aus der Euler'schen Formel.

Entwickelt man (14) durch partielle Integration und subtrahirt davon (16) so erhält man die ebenfalls bekannte Formel

$$\sum_{0}^{N}(1+n)^{-s} = \zeta(s) + \frac{(1+N)^{-s+1}}{1-s} + \frac{1}{2}(1+N)^{-s} \tag{18}$$

$$- \sum_{0}^{k}(-1)^h P_{2h}(0)s(s+1)(s+2)\ldots(s+2h)(N+1)^{-s-2h-1}$$

$$- s(s+1)(s+2)\ldots(s+2k+1)\int_{N}^{\infty} P_{2k+2}(z)(1+z)^{-s-2k-2}dz.$$

[1] vgl. Stolz, *Allgem. Arithmetik*, II, p. 224 ff.

Für $s = 1$ dagegen erhält man durch unmittebare Anwendung von (9)

$$(19)\quad \sum_0^N (1+n)^{-1} = \frac{1}{2} + l(1+N) + \frac{1}{2}(1+N)^{-1} + \int_0^N P_1(z)(1+z)^{-2}dz$$

und durch Grenzübergang zu unendlichem N

$$(20)\quad \lim_{N=\infty}\left(\sum_0^N (1+n)^{-1} - l(N+1)\right) = \int_0^\infty P_1(z)(1+z)^{-2}dz = E$$

wo E die Euler'sche Constante bedeutet.

Subtrahiert man (20) von (19) so erhält man noch

$$(21)\quad \sum_0^N (1+n)^{-1} = l(1+N) + E + \frac{1}{2}(1+N)^{-1} - \int_N^\infty P_1(z)(1+z)^{-2}dz$$

wo das Integral wieder durch partielle Integration entwickelt werden kann, und so die bekannte Summenformel liefert.

Wenn auch viele von den Formeln dieses Paragraphen bekannt sind, scheint mir doch die Einfachheit und der geringe Aufwand an Rechnung durch welchen sie aus der Euler'schen Summenformel hervorgehen, bemerkenswerth.

V.

Als eine weitere Anwendung von (9) setzen wir $F(z) = e^{-z^\lambda \pi x}$ und $a = 0$, $b = 1$; x werde reell und positiv angenommen.

Man hat dann

$$(22)\quad \sum_0^N e^{-n^\lambda \pi x} = \int_0^N e^{-z^\lambda \pi x}dz + \frac{1}{2}(e^{-N^\lambda \pi x} + 1) + \lambda\pi x\int_0^N P_1(z)e^{-z^\lambda \pi x}z^{\lambda-1}dz.$$

Ist λ reell und positiv, so kann man auf beiden Seiten zu unendlich grossem N übergehen und erhält

$$(23)\quad \sum_0^\infty e^{-n^\lambda \pi x} = \frac{1}{\lambda}\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)\pi^{-\frac{1}{\lambda}}x^{-\frac{1}{\lambda}} + \frac{1}{2} + \lambda\pi x\int_0^\infty P_1(z)e^{-z^\lambda \pi x}z^{\lambda-1}dz.$$

Setzt man in dem letzten Integral $z^\lambda \pi x = q$, so kommt

$$(24)\qquad x^{\frac{1}{\lambda}} \sum_0^\infty e^{-n^\lambda \pi x} = \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) \pi^{-\frac{1}{\lambda}} + x^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{1}{2} + \int_0^\infty P_1\left(q^{\frac{1}{\lambda}} \pi^{-\frac{1}{\lambda}} x^{-\frac{1}{\lambda}}\right) e^{-q} dq \right)$$

Da $|P_1(z)|$ immer kleiner oder gleich $\frac{1}{2}$ ist, so ist das noch vorkommende Integral ebenfalls absolut kleiner oder höchstens gleich $\frac{1}{2}$ und man erhält

$$(25)\qquad x^{\frac{1}{\lambda}} \sum_0^\infty e^{-n^\lambda \pi x} = \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) \pi^{-\frac{1}{\lambda}} + \theta x^{\frac{1}{\lambda}}$$

wo θ zwischen Null und Eins liegt.

Für $\lambda = 1$ bestätigt man diese Formel leicht direct, für $\lambda = 2$ erhält man sie auch aus der bekannten Jacobi'schen Formel

$$x^{\frac{1}{4}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \pi x} = x^{-\frac{1}{4}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{x}}.$$

VI.

Die unter IV. entwickelten Formeln geben zugleich vollständigen Aufschluss über die Convergenz und Divergenz der harmonischen Reihe, welche aus (14) für unendlich grosses N hervorgeht. Insbesondere zeigt (14) auch die Divergenz für solche Werthe von s, deren reeller Theil grösser als Null, dagegen kleiner als eins ist, und ausserdem noch für den Fall in welchem der imaginäre Theil von s von Null verschieden der reelle aber gleich eins ist. Die Divergenz für $s = 1$ ist aber durch (21) erledigt, und für ein s dessen reeller Theil gleich Null ist, unmittelbar ersichtlich.

Dagegen convergiren die Reihen

$$(26)\qquad \sum_0^\infty e^{in\varphi}(1 + n)^{-s}$$

für jedes s dessen reeller Theil grösser ist als eins und beliebiges reelles φ, und für ein s dessen reeller Theil von Null verschieden und kleiner oder gleich eins ist für alle reellen Werthe von φ ausgenommen Null und ganze vielfache von 2π, divergiren aber in allen andern Fällen.

Die Behauptungen über das Verhalten der Reihe für $\varphi = 0$ oder ganze vielfache von 2π sind im vorigen enthalten, für die übrigen Werthe von φ gehen sie unmittelbar aus der ABEL'schen Umformung[1] der Reihe (26) hervor. Es ist danach identisch

$$(27)\quad \sum_0^N e^{ni\varphi}(1+n)^{-s} = \sum_0^N \frac{1 - e^{i(n+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}(n^{-s} - (n+1)^{-s}) + \frac{1 - e^{i(N+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}(N+1)$$

und hieraus folgt unmittelbar die Behauptung, da für jedes s

$$\lim_{n=\infty} \frac{(n^{-s} - (n+1)^{-s})}{n^{-s-1}} = s$$

ist, und die Factoren $\dfrac{1 - e^{i(n+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$ endliche Grenzen nicht überschreiten. Diese Bemerkungen genügen um den Beweis der GAUSS-WEIERSTRASS'schen Convergenzcriterien in sehr einfacher Weise zu führen, wobei der eigentliche Charakter derselben scharf hervortritt. Darüber hinaus aber gestattet die EULER'sche Formel auch über das Verhalten der durch solche Reihen definirten Functionen auf dem Convergenzkreis auch in dem Falle bestimmte Angaben zu machen, wo die Reihen auf dem Convergenzkreis divergiren.

Sei eine Zahlenfolge c_n $(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ gegeben, so dass sich der Quotient zweier aufeinanderfolgender c_n von einem bestimmten n an in eine nach fallenden ganzen Potenzen von n fortschreitende Reihe entwickeln lässt

$$(28)\qquad \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1 + \frac{\alpha + i\beta}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \ldots$$

dann besagen diese Criterien, dass die Reihe $\sum_0^\infty c_n x^n$ divergirt für $|x| = 1$, wenn α positiv oder Null ist, dass sie für alle diese Werthe ausgenommen $x = 1$ convergirt, wenn α negativ aber grösser oder gleich -1 ist, dagegen absolut convergirt, wenn α kleiner als -1 ist. Zum Beweis nehme man in (28) die Logarithmen und entwickle rechts nach negativen ganzen Potenzen von n. Diese Entwicklung muss zufolge der

---

[1] Oeuvres, ed. SYLOW et LIE, I. p. 222.

gemachten Voraussetzung über die Grössen c_n wenigstens von einem bestimmten n an convergiren. Man erhält so

$$lc_{n+1} - lc_n = \frac{\alpha + i\beta}{n} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_\nu}{n^{1+\nu}}. \tag{29}$$

Es sei nun n_1 die kleinste ganze Zahl für welche (29) gilt. Setzt man nun der Reihe nach für n, $n_1 + 1$, $n_1 + 2$, $n_1 + 3$, ..., $n_1 + k$ und addirt, so kommt

$$lc_{n_1+k+1} = lc_{n_1+1} + (\alpha + i\beta) \sum_1^k \frac{1}{n_1 + h} + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sum_1^k \frac{1}{(n_1 + h)^{1+\nu}}. \tag{30}$$

Ersetzt man hier die Summen nach n durch die aus (21) resp. (18) sich ergebenden Formeln

$$\sum_1^k (n_1 + h)^{-1} = l(n_1 + k) - ln_1 + \frac{1}{2}(n_1 + k)^{-1} - \frac{1}{2} n_1^{-1}$$

$$- \int_{n_1+k-1}^{\infty} P_1(z)(1 + z)^{-2} dz + \int_{n_1}^{\infty} P_1(z)(1 + z)^{-2} dz,$$

$$\sum_1^k (n_1 + h)^{-1-\nu} = \frac{n_1^{-\nu} - (n_1 + k)^{-\nu}}{\nu} - \frac{1}{2}(n_1^{-\nu-1} - (n_1 + k)^{-\nu-1})$$

$$+ (1 + \nu) \int_{n_1}^{\infty} P_1(z(1 + z)^{-2-\nu} dz - (1 + \nu) \int_{n_1+k-1}^{\infty} P_1(z)(1 + z)^{-2-\nu} dz$$

so erhält man auf der rechten Seite den von k unabhängigen Theil

$$C = lc_{n_1} - (\alpha + i\beta) ln_1 - \frac{1}{2} n_1^{-1} + (\alpha + \beta i) \int_{n_1}^{\infty} P_1(z)(z + 1)^{-2} dz$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \left(\frac{n_1^{-\nu}}{\nu} - \frac{1}{2} n_1^{-\nu-1} + (1 + \nu) \int_{n_1}^{\infty} P_1(z)(1 + z)^{-2-\nu} dz \right)$$

und den von k abhängigen Theil

$$(\alpha + i\beta) l(n_1 + k) + \frac{1}{2}(n_1 + k)^{-1} - (\alpha + i\beta) \int_{n_1+k-1}^{\infty} P_1(z)(1 + z)^{-2} dz \tag{31}$$

$$- \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \left(\frac{(n_1 + k)^{-\nu}}{\nu} - \frac{1}{2}(n_1 + k)^{-\nu-1} + (1 + \nu) \int_{n_1+k-1}^{\infty} P_1(z)(1 + z)^{-2-\nu} dz \right).$$

Man sieht sogleich, dass die auftretenden unendlichen Reihen in der That convergiren, sowie dass die von $(\alpha + i\beta)l(n_1 + k)$ verschiedenen Glieder sich in die Form setzen lassen

$$\frac{\eta}{n_1 + k}$$

wo $|\eta|$ unter einer von k unabhängigen Grenze bleibt.

Damit erhält man

$$c_{n_1+k+1} = C(n_1 + k)^{\alpha+i\beta}\left(1 + \frac{\eta}{n_1 + k}\right) \tag{32}$$

und die Beurtheilung der Convergenz oder Divergenz der Reihe S ist also auf die der harmonischen Reihe zurückgeführt, und zwar nach den an Formel (27) geknüpften Bemerkungen auch für den Fall $|x| = 1$. Damit ergeben sich unmittelbar die angeführten Criterien von Gauss und Weierstrass, und zugleich die Einsicht in das Gesetz der Abnahme der c, also den eigentlich massgebenden Umstand.

Im Falle der hypergeometrischen Reihe, für welchen ja Gauss ursprünglich seine Untersuchungen angestellt hat, kann man die Gleichung (31) unmittelbar bestätigen. Es ist hier

$$c_n = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha + n)\Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\gamma + n)\Gamma(n + 1)}.$$

Benützt man hier für die Gammafunctionen, welche n enthalten, die Stirling'sche Formel, so erhält man nach leichter Umrechnung für genügend grosses n

$$c_n = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} n^{\alpha+\beta-\gamma-1}\left(1 + \frac{\theta}{n}\right)$$

wo $|\theta|$ eine von n unabhängige Grösse nicht überschreitet. Hieraus entnimmt man unmittelbar die für das Verhalten der hypergeometrischen Reihe auf dem Einheitskreis geltenden Regeln.

VII.

Entwickelt man in der Formel (31) die Integrale durch partielle Integration soweit, dass in dem Restintegral

$$(1+\nu)(2+\nu)\dots(r+\nu)\int\limits_{n_1+k-1}^{\infty} P_r(z)(1+z)^{-r-1-\nu}dz$$

der Exponent $-\nu-1-r<-3-\alpha$, so werden diese selbst absolut kleiner als

$$2^{-r+1}\pi^{-r+1}\zeta(r)(1+\nu)(2+\nu)\dots(r+\nu-1)(n_1+k-1)^{-\nu-r}$$

und man erhält dann aus Formel (31) durch Übergang von den Logarithmen zu den Zahlen

$$(33)\quad c_{n_1+k+1}=C(n_1+k)^{\alpha+i\beta}\left(1+\frac{d_1}{(n_1+k)}+\frac{d_2}{(n_1+k)^2}+\dots+\frac{d_{r-1}}{(n_1+k)^{r-1}}+\frac{\omega_r}{(n_1+k)^r}\right)$$

wo ω_r wieder unter einer von k unabhängigen Grenze bleibt. Dabei ist dann zu Folge der Wahl von r die Differenz $r-\alpha>1$.

Die so erhaltene Entwicklung kann möglicherweise ins unendliche fortgesetzt convergiren und c_{n_1+k+1} darstellen. Im Allgemeinen wird dies jedoch nicht der Fall sein, sondern man wird so nur asymptotische Formeln für c_{n_1+k+1} erhalten.

Auf alle Fälle aber liefert die Entwicklung (33) das Mittel, das Verhalten der durch die Reihe $\sum\limits_0^{\infty} c_n x^n$ dargestellten Function auf dem Convergenzkreis vollständig anzugeben, und so für diese Reihen das von Abel gestellte und in der Einleitung erwähnte Problem vollständig zu lösen.

Betrachten wir nämlich zuerst der Binomialreihe, welche Abel selbst der Anlass zur Entwicklung grundlegender Sätze über Potenzreihen war, und setzen

$$(1-x)^s=\sum_0^{\infty}(-1)^n\binom{s}{n}x^n$$

so können wir die Coefficienten schreiben

$$(-1)^n\binom{s}{n} = \frac{\Gamma(-s+n)}{\Gamma(-s)\Gamma(n+1)}$$

ausser wenn s eine ganze positive Zahl oder Null ist.

Für genügend grosses n erhalten wir dann durch Anwendung der Stirling'schen Formel und Übergang von den Logarithmen zu den Zahlen

$$\frac{\Gamma(-s+n)}{\Gamma(-s)\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-s)}(n-1)^{-s-1}\left(1 + \frac{a_{s,1}}{n-1} + \frac{a_{s,2}}{(n-1)^2} + \frac{a_{s,3}}{(n-1)^3} + \ldots + \frac{\theta_{s,r}}{(n-1)^r}\right)$$

wo $|\theta_{s,r}|$ eine von n unabhängige Schranke nicht überschreitet. Ferner steht uns noch die Formel zur Verfügung

$$l(1-x) = -\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Sei nun

$$f(x) = \sum_0^{\infty} c_n x^n$$

und die Coefficienten c_n für jedes n grösser als N darstellbar nach (33) in der Gestalt

$$c_n = C(n-1)^{\alpha+i\beta}\left(1 + \frac{d_1}{n-1} + \frac{d_2}{(n-1)^2} + \ldots + \frac{d_{r-1}}{(n-1)^{r-1}} + \frac{\omega_r}{(n-1)^r}\right)$$

und wird $\alpha + i\beta = -s-1$ gesetzt, r aber so gewählt, dass $r-\alpha > 1$, wobei das Ungleichheitszeichen im strengen Sinn zu nehmen ist, bilden wir ferner die Function

$$(34)\qquad \psi(x) = f(x) - \sum_{m=0}^{r-1} g_m(1-x)^{s+m}\Gamma(-s-m) = \sum_0^{\infty} q_n x^n$$

in welcher die g_m bestimmt sind durch die Gleichungen

$$(35)\qquad \begin{cases} g = C, \\ g_1 + g_0\alpha_{s,1} = Cd_1, \\ g_2 + g_1\alpha_{s+1,1} + g_0\alpha_{s,2} = Cd_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{r-1} + g_{r-2}\alpha_{s+r-1,1} + g_{r-3}\alpha_{s+r-2,2} + \ldots + g_0\alpha_{s,r-1} = Cd_{r-1} \end{cases}$$

so sieht man sogleich, dass von einem bestimmten n angefangen die Formel gilt

$$q_n = \frac{\Omega_r}{(n-1)^{r-\alpha-i\beta}}$$

wobei Ω_r sich linear aus Grössen zusammenzetzt, welche von n unabhängige Schranken nicht überschreiten, und daher dieselbe Eigenschaft hat.

Die Potenzreihe für $\varphi(x)$ convergirt daher wegen $r-\alpha > 1$ am ganzen Convergenzkreis und kann unmittelbar zur Berechnung des Werthes unserer Reihe dienen. Wenn aber, was bisher ausgeschlossen war, s gleich einer positiven ganzen Zahl ist, so ist die ursprüngliche Reihe unmittelbar zur Berechnung von $f(x)$ brauchbar, ausgenommen für $s = 0$, $\alpha = -1$. Dann aber liefert die Addition der Reihe für $Cl(1-x)$ zu $f(x)$ eine convergente Reihe.

Mann kann daher folgenden Satz aussprechen:

Ist eine Function durch eine Potenzreihe definirt, und haben die Coefficienten die in (28) *beschriebene Beschaffenheit, so lassen sich immer r Zahlen $g_0, g_1, g_2, \ldots$ und erforderlichen falls eine Grösse h so bestimmen, dass*

$$(36)\quad f(x) = hl(1-x) + \sum_{m=0}^{r-1} g_m \Gamma(\alpha+i\beta-m+1)(1-x)^{-\alpha-i\beta+m-1} + \sum_0^\infty q_n x^n$$

wo die letzte Potenzreihe rechts am ganzen Convergenzkreis der ersten Reihe convergirt und ebenfalls zu dem hier betrachteten Typus gehört. Dabei ist r eine beliebige ganze Zahl, welche grösser ist als $1+\alpha$. Das logarithmische Glied tritt niemals auf, wenn nicht $\beta = 0$ und α eine ganze Zahl ist, welche grösser oder gleich -1 ist.

Die Function $f(x)$ hat daher höchstens für $x = 1$ keinen endlichen Werth.

Es sei noch bemerkt, dass man dieselben Methoden auch dann anwenden kann, wenn eine Entwicklung des Quotienten zweier aufeinanderfolgender Coefficienten statt nach ganzen Potenzen von n^{-1} nach solchen von $n^{-\rho}$ möglich ist, wo ρ eine Zahl mit positiven reellem Theil bedeutet.

Doch werden die Resultate sehr complicirt und die Fallunterscheidungen sehr zahlreich. Ich begnüge mich daher mit dem blossen Hinweis, um somehr als mir keine für die Analysis wichtigere Reihe mit dieser Eigenschaft bekannt ist. Dagegen ist das hier aufgestellte Theorem aus dem Grunde bemerkenswerth, weil die Beschaffenheit der Function auf

dem Convergenzkreis aus den Coefficienten gefolgert wird, und zwar auch dann, wenn die Reihe dort divergirt.

Da ferner r beliebig gross gewählt werden kann, so wäre es von Interesse zu untersuchen, unter welchen Bedingungen man auf diesem Wege zu einer Entwicklung um die Stelle $x = 1$ gelangen kann. Schon die hypergeometrischen Reihe zeigt, dass das im allgemeinen nicht der Fall ist. Es wäre ferner interessant zu untersuchen, unter welchen Umständen die erste Summe rechts in (36) überhaupt für $r = \infty$ convergirt, und welche Bedeutung sie dann für die Function $f(x)$ hat. Ferner könnte man die Frage aufwerfen unter welchen Bedingungen die hier betrachteten Reihen über den Convergenzkreis hinaus analytisch fortsetzbar sind, und was für Functionen so entstehen. Es ist zu erwarten, dass auch für diese Fragen die Euler'sche Summenformel ein werthvolles Hilfsmittel bieten wird

SUR QUELQUES POINTS FONDAMENTAUX DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES DE DEUX VARIABLES

PAR

EMILE PICARD

à PARIS.

ABEL a consacré plusieurs mémoires à l'étude des intégrales abéliennes réductibles à des combinaisons algébrico-logarithmiques. Malgré ses efforts et ceux des géomètres qui l'ont suivi, cette difficile question provoquera sans doute encore de nombreuses recherches. L'étude des intégrales de différentielles totales dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables soulève des questions dont quelques-unes présentent des analogies avec le problème d'ABEL; il semble qu'un examen de ces questions, même très incomplet et soulevant plus de problèmes qu'il n'en résout, ne sera pas déplacé dans cette commémoration de la mémoire du grand géomètre norwégien.

1. Considérons, comme je le fais habituellement dans mes recherches sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables, une surface

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

disposée arbitrairement par rapport aux axes et n'ayant que des singularités ordinaires (ligne double avec points triples). J'ai développé longuement dans mes mémoires antérieurs et dans le tome I de ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* l'étude des intégrales de différentielles totales de *seconde* espèce, et j'ai fait connaître récemment (Annales de l'Ecole normale, 1901) un théorème fondamental relatif aux intégrales de troisième espèce. Il existe pour la surface f un certain nombre entier λ jouissant de la propriété suivante:

On peut, sur la surface, tracer λ courbes algébriques irréductibles particulières

$$C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$$

telles qu'il n'existe pas d'intégrales de différentielles totales de troisième espèce

$$\int P dx + Q dy \quad (P \text{ et } Q \text{ rationnelles de } x, y, z)$$

ayant seulement pour courbes logarithmiques une ou plusieurs de ces courbes C et de la courbe à l'infini de la surface, mais telles que, si l'on envisage une $\lambda + 1^{\text{ème}}$ courbe arbitraire irréductible $C_{\lambda+1}$, il existera une intégrale de troisième espèce ayant seulement pour courbes logarithmiques la courbe $C_{\lambda+1}$ et la totalité ou une partie des courbes $C_1, \ldots, C_\lambda$ et de la courbe à l'infini. Remarquons d'ailleurs que les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ sont dans une large mesure arbitraires.

La démonstration assez délicate de ce théorème ne fait malheureusement connaître qu'une limite *supérieure* du nombre λ, et ce serait un point important de pouvoir obtenir ce nombre d'une manière tout à fait précise.

2. Une question se pose, pour les intégrales de différentielles totales de troisième espèce, dont la réponse était immédiate pour les intégrales abéliennes relatives aux courbes. Etant donnée une courbe algébrique *arbitraire*

$$f(x, y) = 0$$

une intégrale abélienne arbitraire

$$\int R(x, y) dx$$

relative à cette courbe est certainement une fonction de x ne se ramenant pas à une combinaison algébrico-logarithmique. Si maintenant nous prenons une surface algébrique *arbitraire*

$$f(x, y, z) = 0,$$

une intégrale arbitraire de différentielle totale relative à cette surface

$$\int P dx + Q dy \tag{2}$$

sera-t-elle une fonction de x, y et z ne se ramenant pas à une combinaison algébrico-logarithmique? Déjà, et c'est par là que j'ai commencé jadis ce

genre de recherches, on sait que si la surface f n'est pas *spéciale*, et si l'intégrale (2) est de *seconde espèce*, cette intégrale se réduit à une fonction rationnelle de x, y et z. En fait, en dehors des surfaces ayant des intégrales de seconde espèce non rationnelles, je ne connais pas d'exemples de surfaces dont les intégrales de différentielles totales ne se réduisent pas à une combinaison algébrico-logarithmique.

Sans préjuger la réponse à la question posée, on peut faire une remarque curieuse sur les surfaces pour lesquelles toute intégrale de différentielle totale est une combinaison algébrico-logarithmique. Soit f une telle surface, et considérons les courbes

$$C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$$

de l'énoncé rappelé plus haut. En désignant ensuite par $C_{\lambda+1}$ une $\lambda+1^{\text{ème}}$ courbe algébrique irréductible tracée sur la surface, nous pouvons former une intégrale

$$\int P dx + Q dy$$

de différentielle totale de troisième espèce, ayant seulement pour courbes logarithmiques la courbe $C_{\lambda+1}$ et la totalité ou une partie des courbes $C_1, \ldots, C_\lambda$ et de la courbe à l'infini.

D'après l'hypothèse faite, l'intégrale précédente est de la forme

$$A_1 \log R_1(x,y,z) + A_2 \log R_2(x,y,z) + \ldots + A_k \log R_k(x,y,z) + P(x,y,z)$$

où les R sont rationnelles en x, y et z ainsi que P, et où l'on peut supposer, en réduisant l'entier k à son minimum, qu'il n'y a pas entre les constantes A de relations homogènes et linéaires à coefficients entiers. Dans ces conditions, une des fonctions R au moins s'annulera ou deviendra infinie certainement (avec un degré convenable de multiplicité) le long de la courbe $C_{\lambda+1}$ et le long de la totalité ou d'une partie des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ et de la courbe à l'infini (également avec des degrés convenables de multiplicité), et de plus elle ne s'annulera ni ne deviendra infinie le long d'aucune autre courbe. Nous avons donc ce résultat curieux:

Etant considérées sur la surface les λ courbes algébriques irréductibles $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ (arbitraires d'ailleurs dans une large mesure), la courbe à

l'infini, et une courbe $C_{\lambda+1}$ irréductible entièrement arbitraire, il existera une fonction rationnelle

$$R(x\,,\,y\,,\,z)$$

devenant nulle le long de la courbe $C_{\lambda+1}$, devenant nulle ou infinie le long de quelques-unes ou de la totalité des autres, et ne devenant nulle ou infinie le long d'aucune autre courbe.

Ces lignes de zéro ou d'infini sont de degrés convenables de multiplicité, et il ne faut pas oublier dans cet énoncé qu'il s'agit de surfaces dont toutes les intégrales de différentielles totales sont des combinaisons algébrico-logarithmiques. Il pourra paraître singulier qu'une surface arbitraire (par exemple la surface la plus générale de son degré) jouisse de cette propriété, surtout si on modifie encore un peu la forme de l'énoncé.

Soient sur notre surface $\lambda + 2$ courbes algébriques irréductibles entièrement arbitraires

$$\Gamma_1\,,\,\Gamma_2\,,\,\ldots\,,\,\Gamma_{\lambda+2}$$

on pourra former une première fonction rationnelle devenant nulle le long de Γ_1, et ne devenant en outre nulle ou infinie que le long de quelques-unes ou de la totalité des courbes $C_1\,,\,\ldots\,,\,C_\lambda$ et de la courbe à l'infini. On aura de même une fonction rationnelle correspondant à $\Gamma_2\,,\,\ldots\,,\,\Gamma_{\lambda+2}$. En les élevant à des puissances entières convenables, positives ou négatives et en faisant leur produit, *on formera immédiatement une fonction rationnelle, s'annulant le long de certaines des courbes Γ et devenant infinie le long des autres (avec des degrés convenables de multiplicité), et n'ayant aucune autre ligne de zéros, ou d'infinis.*

Une proposition analogue, dans laquelle les courbes Γ seraient remplacées par des points est évidemment inexacte pour les courbes algébriques; pour une courbe algébrique prise arbitrairement, on ne peut trouver une fonction rationnelle dont les pôles et les racines devraient nécessairement être compris parmi des points donnés, les degrés de multiplicité n'étant d'ailleurs pas fixés à l'avance.

3. Les remarques précédentes feraient donc plutôt penser que les intégrales de différentielles totales de troisième espèce ne se ramènent pas en général à des combinaisons algébrico-logarithmiques; mais malheureusement, comme je l'ai dit plus haut, je ne suis pas en mesure de donner

un exemple d'une surface n'ayant pas d'intégrale transcendante de seconde espèce (ou de connexion linéaire égale à l'unité, d'après un théorème fondamental que j'ai établi autrefois) et possédant une intégrale de troisième espèce qui ne soit pas du type algébrico-logarithmique.

Je citerai quelques exemples assez étendus de surfaces algébriques pour lesquelles on est assuré que toutes les intégrales sont au contraire du type algébrico-logarithmique. Un premier exemple très simple me sera fourni par la surface célèbre du quatrième degré qui porte le nom de KUMMER. A leur sujet, M. HUMBERT a démontré une proposition très élégante; toutes les courbes algébriques tracées sur cette surface sont de degré pair, et si $2m$ désigne le degré d'une telle courbe de la surface, on peut le long de cette courbe circonscrire à la surface une surface de degré m, ne la coupant pas en dehors de la courbe considérée. Ici, le nombre λ des énoncés précédents doit être regardé comme égal à zéro, c'est à dire que si l'on prend sur la surface deux courbes algébriques quelconques

$$\Gamma_1 , \Gamma_2$$

il existera une intégrale de troisième espèce n'ayant d'autres courbes logarithmiques que ces deux courbes. Si en effet

$$f_1(x , y , z) = 0 \quad \text{et} \quad f_2(x , y , z) = 0$$

représentent les deux surfaces de degrés m_1 et m_2 donnant les deux courbes d'après le théorème de M. HUMBERT, la fonction

$$\log \frac{f_1^{m_2}}{f_2^{m_1}}$$

peut être regardée comme une intégrale de troisième espèce possédant la propriété demandée.

4. Les considérations que nous avons développées plus haut s'appliquent avec des modifications peu importantes aux surfaces données par les équations

$$z^2 = f(x , y) \tag{3}$$

où f est un polynome en x et y, et ici nous allons voir se poser des pro-

blèmes qui, plus difficiles encore que le problème d'Abel, présentent avec lui un air de famille. Les courbes tracées sur la surface

$$z^2 = f(x, y) \tag{3}$$

sont de deux sortes. Pour une courbe de la première sorte en désignant par

$$A(x, y) = 0$$

l'équation de sa projection sur le plan des (x, y), il arrive que le cylindre $A(x, y) = 0$, rencontre la surface suivant *une seule* courbe irréductible. Pour une courbe de la seconde sorte au contraire, le cylindre précédent rencontrera la surface suivant *deux* courbes irréductibles; il arrivera alors que le polynome irréductible $A(x, y)$ est un diviseur d'une expression de la forme

$$P^2 - Q^2.f(x, y)$$

P et Q étant deux polynomes premiers entre eux, et les équations des courbes sont

$$A(x, y) = 0, \qquad z = +\frac{P}{Q},$$

$$A(x, y) = 0, \qquad z = -\frac{P}{Q}.$$

que l'on peut appeler des courbes conjuguées.

Toutes les intégrales de différentielles totales relatives à la surface (3) sont une somme de deux intégrales de différentielles totales de la forme

$$\int \frac{Pdx + Qdy}{\chi(y)AB\ldots L\sqrt{f(x, y)}} + \int P_1 dx + Q_1 dy$$

P et Q étant des polynomes en x et y, $\chi(y)$ étant un polynome en y, et $A, B, \ldots, L$ des polynomes irréductibles en x et y, premiers entre eux et avec f. Quant à P_1 et Q_1, ce sont des fractions rationnelles de x et y. La seconde intégrale est sans intérêt, car elle se réduit manifestement à une expression

$$\sum C \log R(x, y) + \rho(x, y)$$

les R et ρ étant des fonctions rationnelles de x et y, et les C des constantes. La première de ces intégrales est seule intéressante, et un point

important, est que ses courbes logarithmiques à distance finie sont des courbes de la seconde sorte. Il est impossible en effet que le cylindre

$$A(x, y) = 0$$

coupe notre surface suivant une seule courbe, car l'expression

$$2\pi i . \frac{P}{\chi(y)\frac{\partial A}{\partial x} B \ldots L\sqrt{f(x, y)}}$$

doit nécessairement se réduire à une constante (période logarithmique) quand $A(x, y) = 0$. Donc, en vertu de cette dernière relation, $\sqrt{f(x, y)}$ est une fonction rationnelle de x et y, et nous avons deux courbes de la surface correspondant à une même projection sur le plan des xy.

J'ai montré antérieurement que, par la soustraction de logarithmes de fractions rationnelles de x, y et z, on pourrait se borner, dans l'étude des intégrales de troisième espèce, à considérer le cas où dans la courbe

$$A(x, y) = 0$$

x n'entre qu'au degré $\frac{m-1}{2}$, si le degré m du polynome $f(x, y)$ par rapport à x est impair. Si ce degré m est pair, on pourra ramener au degré $\frac{m}{2}$ ou $\frac{m}{2} - 1$.

Nous avons d'ailleurs ici un théorème tout à fait analogue à celui que nous rappelions au début. A la surface correspond un nombre λ, tel que si on prend sur la surface λ couples arbitraires de courbes conjuguées, il n'existe pas d'intégrale de troisième espèce n'ayant à distance finie que ces courbes logarithmiques, mais tel que si on prend un $\lambda + 1^{\text{ème}}$ couple quelconque de courbes conjuguées, on puisse former une intégrale n'ayant à distance finie comme courbes logarithmiques que les courbes de ce couple et des couples précédents (en totalité ou en partie).

Ce serait un problème intéressant que de fixer exactement ce nombre λ, dont on obtient seulement facilement une limite supérieure. Il ne serait pas moins important d'étudier les polynomes $A(x, y)$ correspondant aux courbes conjuguées. En supposant, pour fixer les idées, le polynome $f(x, y)$

de degré impair m par rapport à x, il faudrait aussi rechercher les polynomes $A(x, y)$ de degré $\frac{m-1}{2}$ par rapport à x, tels que pour

$$A(x, y) = 0$$

le polynome $f(x, y)$ soit le carré d'une fonction rationnelle de x et y. S'il n'existe pas de tels polynomes A, on est assuré que toutes les intégrales de différentielles totales relatives à la surface

$$z^2 = f(x, y)$$

se ramènent, par la soustraction d'expressions algébrico-logarithmiques, à la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x, y)}}$$

où P et Q sont des polynomes en x, de degrés respectivement égaux à $m-2$ et $m-1$. Ce cas se présente pour $m = 3$, quand on prend

$$z^2 = a(y)x^3 + b(y)x^2 + c(y)x + d(y), \tag{4}$$

a, b, c, d étant des polynomes *non spéciaux* en y, car on ne peut satisfaire à cette équation en prenant pour z et x des fonctions rationnelles de y. Il en résulte aisément que, pour la surface générale (4), *toute intégrale de différentielle totale se ramène à une combinaison algébrico-logarithmique.*

4. Revenons maintenant aux surfaces à singularités ordinaires

$$f(x, y, z) = 0$$

considérées au début, et traitons une question d'un caractère tout à fait général; je veux parler des relations entre la théorie *des intégrales doubles de seconde espèce* et celle *des intégrales de différentielles totales de troisième espèce.*

J'ai montré, comme on se le rappelle peut-être, que toutes les *intégrales doubles de seconde espèce*, se ramènent aux intégrales

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

le polynome Q s'annulant pour la courbe double de la surface.[1] Le degré de ce polynome Q est limité, et ses coefficients satisfont à certaines relations que nous avons appris à former. Mais toutes les intégrales doubles ainsi obtenues ne sont pas distinctes, et il faut indiquer la marche à suivre pour trouver exactement le nombre des intégrales *distinctes* de seconde espèce, c'est à dire des intégrales dont aucune combinaison lineaire n'est de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dx dy,$$

A et B étant rationnelles en x, y et z. On répondra aisément à cette question, si on sait reconnaître à quelles conditions l'expression donnée

$$\frac{Q(x, y, z)}{f'_z}$$

est de la forme

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

A et B étant rationnelles en x, y et z; bien entendu z est regardé comme fonction de x et y, quand on fait les différentiations partielles. Ce problème est la généralisation d'une question très simple relative à une courbe algébrique $f(x, y) = 0$. A quelles conditions l'expression

$$\frac{Q(x, y)}{f'_y}$$

est-elle de la forme

$$\frac{dA}{dx},$$

A étant rationnelle en x et y? Mais, tandis que ce dernier problème est aisé à traiter, la question que nous pose la théorie des surfaces est beaucoup plus complexe. La raison essentielle en est que l'on ne sait pas à priori pour quelles courbes de la surface A et B peuvent devenir infinies, tandis que pour les courbes les infinis de A sont connus à l'avance.

[1] On pourra voir en particulier ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (tome 2, chap. 7) et Annales de l'Ecole Normale (février 1902).

5. Soit l'identité

$$\frac{Q(x, y, z)}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}. \tag{5}$$

Désignons par $G(x, y) = 0$, la projection de la courbe double sur le plan des xy, et par $g(x, y) = 0$ la projection sur le même plan de la courbe de la surface avec un cylindre parallèle à Oz. On montre aisément qu'on ne diminue pas la généralité en supposant que A et B sont de la forme

$$A = \frac{U(x, y, z)}{g(x, y) G(x, y) \varphi_1(x, y) \ldots \varphi_r(x, y) f'_z},$$

$$B = \frac{V(x, y, z)}{g(x, y) G(x, y) \varphi_1(x, y) \ldots \varphi_r(x, y) f'_z},$$

où on représente par $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ des polynomes irréductibles en x et y, premiers entre eux et premiers avec g et G; quant à $U(x, y, z)$ et $V(x, y, z)$, ils représentent des polynomes en x et z, à coefficients rationnels en y. Toute la difficulté provient de la présence possible de ces polynomes φ en nombre d'ailleurs inconnu, et elle est très réelle. On peut cependant la lever, si on suppose connu un système des λ courbes C dont il a été question au paragraphe I; c'est là un point capital dans ma théorie des intégrales doubles de seconde espèce. Soit Γ une courbe de la surface, se projetant suivant $\varphi_1(x, y) = 0$, et le long de laquelle A et B deviennent infinies. On pourra former une intégrale de troisième espèce ayant pour courbe logarithmique Γ et la totalité ou une partie des courbes C et de la courbe à l'infini; et cette intégrale sera de la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\varphi_1(x, y) g_1(x, y) \ldots g_\lambda(x, y) f'_z},$$

en désignant par $g_1(x, y) = 0, \ldots, g_\lambda(x, y) = 0$ les projections des λ courbes C, et par P et Q des polynomes en x et z, à coefficients rationnels en y. Les fonctions P et Q s'annuleront le long des courbes de la surface se projetant suivant

$$\varphi_1 = 0, \quad g_1 = 0, \quad \ldots, \quad g_\lambda = 0$$

distinctes de Γ et des courbes C. On aura d'ailleurs la relation d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{\varphi_1 g_1 \ldots g_\lambda f'_z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{\varphi_1 g_1 \ldots g_\lambda f'_z}\right) = 0$$

et de plus, le long de la courbe Γ l'expression

$$\frac{P}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} g_1 \cdots g_\lambda f'_z}$$

se réduira à une constante différente de zéro, puisque elle représente au facteur $2\pi i$ près une période logarithmique de l'intégrale.

Revenons à l'identité (5), en supposant que (x, y, z) reste dans le voisinage d'un point M d'ailleurs arbitraire de la courbe Γ. Le premier membre de (5) ne devenant pas infinie dans ces conditions, on pourra écrire

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

λ étant une fonction holomorphe de x et y dans le voisinage de M. Donc

$$\int B dx - (A - \lambda) dy$$

est une intégrale de différentielle totale ayant autour du point M la courbe Γ comme courbe logarithmique, et on en déduit de suite que le quotient

$$\frac{V(x, y, z)}{g(x, y) G(x, y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_r f'_z}$$

se réduit à une constante sur la courbe Γ, car il représente au facteur $2\pi i$ près une période logarithmique. Or le second membre de l'identité (5) peut s'écrire

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(A - C \cdot \frac{Q}{\varphi_1 g_1 \cdots g_\lambda f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B + C \frac{P}{\varphi_1 g_1 \cdots g_\lambda f'_z}\right),$$

C désignant une constante arbitraire, et on peut choisir la constante C de manière que

$$\frac{V(x, y, z)}{g \cdot G \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_r f'_z} + C \frac{P}{g_1 \cdots g_\lambda f'_z},$$

s'annule sur Γ, d'après les deux remarques ci-dessus. Par suite, pour un tel choix de C, la fonction sous le signe $\frac{\partial}{\partial y}$ dans (6) ne deviendra pas infinie le long de Γ.

Nous avons ainsi fait disparaître la ligne Γ comme ligne d'infini pour les fonctions figurant dans l'identité (5). En allant ainsi de proche en

proche, nous arrivons à une identité de la forme (5), et où A et B ont alors la forme

$$A = \frac{M(x, y, z)}{g \cdot G \cdot g_1 \cdot g_2 \ldots g_\lambda f'_z}, \qquad B = \frac{N(x, y, z)}{g \cdot G \cdot g_1 \cdot g_2 \ldots g_\lambda f'_z},$$

M et N étant des polynomes en x et z à coefficients rationnels en y; les fonctions au dénominateur sont complètement déterminées.

Il est facile de voir ensuite que les degrés des polynomes M et N en x et z peuvent être limités, et alors on est assuré de pouvoir *par un nombre limité d'opérations* reconnaître si l'identité

$$\frac{Q(x, y, z)}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}$$

est ou non possible.

On voit par ce qui précède, et c'est ce que je voulais montrer sommairement ici, *le lien étroit entre la théorie des intégrales doubles de seconde espèce et celle des intégrales de différentielles totales de troisième espèce.*

6. Le problème dont nous venons de parler, de reconnaître si une fonction rationnelle de x, y et z (z étant une fonction algébrique de x et y) est susceptible de se mettre sous la forme

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

A et B étant rationnelles en x, y et z, devient particulièrement simple, quand on considère seulement des fonctions rationnelles de x et y et qu'on se demande *si une fonction rationnelle R de x et y peut se mettre sous la forme*

$$R = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}, \tag{7}$$

U et V étant rationnelles en x et y.

Les considérations développées dans le cas général trouvent ici une application facile, mais on peut encore suivre une autre voie, comme je l'ai fait récemment dans mon cours.[1] La condition nécessaire et suffisante

[1] Voir Bulletin des sciences mathématiques (1902): *Sur les intégrales doubles de fonctions rationnelles dont tous les résidus sont nuls.*

cherchée est susceptible d'une forme très élégante. Envisageons l'intégrale double

$$\iint R(x, y)\,dx\,dy. \tag{8}$$

La fonction rationnelle R a, à distance finie, un certain nombre de lignes d'infini. A chacune de ces lignes correspondent des *résidus* de l'intégrale double, au sens de M. Poincaré dans sa théorie des résidus des intégrales doubles de fonctions rationnelles. La condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse satisfaire à la condition (7) est que *tous les résidus de l'intégrale* (8) *soient nuls.*

L'énoncé se trouve être identique à celui qui exprime qu'une fonction rationnelle $R(x)$ est la dérivée $\frac{dU}{dx}$ d'une fonction rationnelle U de x, et qui peut se formuler en disant que tous les résidus de l'intégrale simple

$$\int R(x)\,dx$$

sont nuls. La similitude des deux énoncés est d'une grande élégance.

GEOMETRISCHER BEWEIS EINES ALGEBRAISCHEN SATZES VON JACOBI

VON

A. V. BÄCKLUND

in LUND

I.

Ein Satz von Abel.

In einer kurzen Note im Bande 4 des CRELLE'schen Journals für das Jahr 1829 mit dem Titel: *Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe des fonctions transcendantes* (Oeuvres complètes de NIELS HENRIK ABEL. Nouvelle Édition, Christiania 1881, I, p. 515), hat ABEL einen Satz entwickelt, der für die Theorie der Integrale der algebraischen Funktionen von grundlegender Bedeutung geworden ist und der so lautet:

»Wenn y definirt wird durch die Gleichung:

$$p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \dots + p_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0, \tag{1}$$

wo $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ *ganze* Funktionen von x bedeuten, und eine zweite Gleichung hinzugezogen wird:

$$q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \dots + q_{n-1} y^{n-1} = 0, \tag{2}$$

wo $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ gleichfalls *ganze* Funktionen von x sind, in denen aber die Koefficienten gewisser Potenzen des x als variable Parameter $a, a', a'', \dots$ betrachtet werden, und man das Integral bildet:

$$\phi(x) = \int f(x, y) dx, \tag{3}$$

wo $f(x, y)$ irgend welche *rationale* Funktion von x, y bedeutet, so findet man, dass es sein muss:

$$\sum_{i=1}^{\mu} \phi(x_i) = u + \sum_{m=1}^{n} k_m \log v_m, \tag{4}$$

falls links über alle Wurzeln $x_1, x_2, \ldots$ der durch Elimination von y aus (1) und (2) entspringenden Endgleichung für x summirt wird und unter $k_1, k_2, \ldots$ Konstanten, unter $u, v_1, v_2, \ldots$ rationale Funktionen von $a, a', a'', \ldots$ verstanden werden.»

Der Beweis dieses Satzes ruht darauf, dass wegen (1) und (2) y als rationale Funktion von x und $a, a', a'', \ldots$ erhalten wird, und dass ferner die aus (1) und (2) entspringende Endgleichung für x giebt

$$dx_i = \alpha da + \alpha' da' + \ldots$$

wo $\alpha, \alpha', \ldots$ rationale Funktionen von $x_i, a, a', a'', \ldots$ werden. Aus diesem Grunde kommt nämlich

$$\sum_{i=1}^{\mu} f(x_i, y_i) dx_i$$

gleich einer Summe:

$$da \sum \varphi(x_i, a, a', a'', \ldots) + da' \sum \varphi_1(x_i, a, a', a'', \ldots) + \ldots$$

die, als Funktion von den Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ der erwähnten Endgleichung für x betrachtet, als symmetrisch anzusehen ist. Jede symmetrische und rationale Funktion der Wurzeln x_i ist aber in $a, a', a'', \ldots$ rational. Also ist

$$\sum_{i=1}^{\mu} \psi(x_i)$$

als Integral einer Summe rationaler Funktionen von $a, a', a'', \ldots$ aufzufassen. Desshalb wird diese Summe von der Form (4). — (Obenstehendes ist eine beinahe wörtliche Uebersetzung der citirten Note von Abel.)

Wenn p das Geschlecht der Kurve (1) bezeichnet, — dann x, y als Koordinaten der Punkte einer Ebene gedeutet, — so giebt es bekanntlich p verschiedene Integrale (3), die überall *endlich* und *stetig* sind. Falls man den Satz (4) auf irgend eines *dieser* Integrale und auf die Schnittpunkte der Kurve (1) mit einer variablen Kurve eines algebraischen Kurven-Büschels (2) anwendet, und wenn λ, anstatt der vorigen Zeichen $a, a', \ldots$, den Parameter des Kurven-Büschels darstellt, und dieser somit die Gleichung hat:

$$\Phi(x, y) + \lambda \Psi(x, y) = 0, \tag{5}$$

so findet man, dass

$$\frac{d}{d\lambda}\sum_{i=1}^{\mu}\phi(x_i)$$

gleich sei einer *rationalen* Funktion von λ, die *nirgends* unendlich wird. Aber jede eindeutige und stetige analytische Funktion von λ, die nirgends unendlich wird, muss *konstant* sein. Weil ferner $\sum\phi(x_i)$ aus einer endlichen Zahl von allenthalben endlichen Integralen (3) zusammengesetzt ist, kann sie nicht mal für $\lambda = \infty$ unendlich werden. Daher soll jene jetzt auftretende Konstante Null sein, und desshalb

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{d\lambda}\sum_{i=1}^{\mu}\phi(x_i), \quad \text{d. i.} \quad \sum_{i=1}^{\mu} f(x_i\,,\,y_i)\frac{dx_i}{d\lambda} = 0,$$

wenn die Summe über alle Schnittpunkte $(x_i\,,\,y_i)$ zwischen der Kurve (1) und irgend einer der Kurven (5) ausgedehnt wird, und wenn, wie gesagt, ϕ ein allenthalben endliches und stetiges Integral ausmacht.[1]

Sei zweitens ϕ ein Integral *dritter* Gattung, welches in zwei Punkten, — die α und β heissen mögen, — unstetig und daselbst unendlich wie $\log(x - a)$ für $x = a$ wird, aber an allen anderen Stellen endlich und stetig ist, und seien $\xi_1\,,\,\eta_1\,;\,\xi_2\,,\,\eta_2$ die Koordinaten jener Unendlichkeitspunkte, und sei das fragliche Integral speciell von der Form eines Normalintegrals, das in jenen Unendlichkeitspunkten genau gleich

$$\log\frac{x - \xi_1}{x - \xi_2}$$

wird, so folgt aus dem ABEL'schen Satze (4) oder lieber aus dessen Beweise, wenn man diesen Satz auf das Schnittpunktssystem (1) und (5) anwendet, aber mit jenem Integrale dritter Gattung, das ich jetzt mit $S_{\alpha\beta}$ bezeichne, eingeführt statt ϕ, dass

$$\frac{d}{d\lambda}\sum_{i=1}^{\mu} S_{\alpha\beta}(x_i)$$

eine solche rationale Funktion von λ sein muss, welche in der komplexen λ-Ebene an nur zwei Stellen unstetig und unendlich wird und dann gleich

$$\frac{d}{d\lambda}\log\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2},$$

[1] Diese und nächstfolgende Beweisführung findet man bei RIEMANN in dessen *Theorie der Abel'schen Funktionen* (Art. 14). Ges. Werke von RIEMANN. S. 123

wenn λ_1 und λ_2 die Werthe des Parameters λ in den Unendlichkeitspunkten vorstellen, also

$$\lambda_1 = -\frac{\Phi(\xi_1, \eta_1)}{\Psi(\xi_1, \eta_1)},$$

$$\lambda_2 = -\frac{\Phi(\xi_2, \eta_2)}{\Psi(\xi_2, \eta_2)}.$$

Eine solche Funktion, wenn sie in allen anderen Punkten λ endlich sein soll, kann nur die Form besitzen:

$$\frac{d}{d\lambda}\log\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda-\lambda_2} + C.$$

Damit aber für $\lambda = \infty$ die fragliche $\Sigma\psi$ nicht unendlich werde, muss sein $C = 0$; desshalb:

$$\text{(B)} \qquad d\sum_{i=1}^{\mu} S_{\alpha\beta}(x) = d\lambda\frac{d}{d\lambda}\log\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda-\lambda_2}.$$

II.

Zwei Folgerungen des Vorangehenden.

Man trage in (A) für $\frac{dx}{d\lambda}$ seinen Werth aus (1), kürzer

$$F(x, y) = 0,$$

und (5) ein. Man wende also die zwei folgenden Gleichungen an:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{d\lambda} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\frac{dx}{d\lambda} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)\frac{dy}{d\lambda} + \Psi = 0,$$

und man wird somit, wenn der Kürze wegen

$$(AB) \text{ statt } \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}$$

geschrieben wird, erhalten:

$$(6) \qquad \frac{dx}{d\lambda} = \frac{\Psi\frac{\partial F}{\partial y}}{(F\Phi) + \lambda(F\Psi)}.$$

Es soll die in (A) auftretende Funktion $f(x, y)$ rational sein, also gleich dem Quotienten zweier ganzer Funktionen. Soll aber das Integral

$$\phi = \int f(x, y) dx$$

eben der ersten Gattung werden, so muss, wenn $f = \infty$, dx verschwinden, also f gleich

$$\frac{M}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

sein, M eine ganze Funktion und zugleich die Doppel- und Rückkehrpunkte der Kurve $F = 0$ als Nullpunkte habend. Ferner muss, damit das Integral auch im Unendlichen endlich werde, M, falls F vom Grade m ist, selbst vom Grade $m - 3$ sein.

Die Gleichung (A) besagt somit, dass es sei

$$\text{(A')} \qquad \sum_{i=1}^{\mu} \frac{M\Psi}{(F\Phi)} = 0,$$

falls die Summe über alle Schnittpunkte: $F = 0$, $\Phi = 0$, ausgedehnt wird.

Das zur Gleichung (1) oder zur Kurve $F = 0$ zugehörige Integral dritter Gattung allgemeinster Art ist der Form

$$\text{(7)} \qquad \int \frac{N dx}{(ax + by + c)\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Dann liegen die beiden Unstetigkeitspunkte des Integrals auf der Gerade:

$$\text{(8)} \qquad ax + by + c = 0,$$

und N soll eine ganze Funktion $m - 2^{\text{ten}}$ Grades bedeuten, die für die übrigen $m - 2$ Schnittpunkte der Kurve $F = 0$ mit der Gerade (8) sowie für die Doppel- und Rückkehrpunkte jener Kurve $F = 0$ verschwindet. Hieraus geht eine wichtige Beschränkung der Funktion N hervor. Falls die beiden Unstetigkeitspunkte des Integrals mit α und β und die $m - 2$

Schnittpunkte der Gerade $\alpha\beta$, d. i. der Gerade (8), und der Kurve $N=0$ mit a, a', a'', ... bezeichnet werden, so muss sein:

(9) $$\frac{\alpha a \,.\, \alpha a' \dots}{\beta a \,.\, \beta a' \dots} = \frac{N(\xi_1, \eta_1)}{N(\xi_2, \eta_2)}.$$ [1]

Weil aber dieselben Punkte a, a', a'', ... zusammen mit α und β die Schnittpunkte der Kurve $F=0$ und der Gerade (8) ausmachen, so muss sein:

(10) $$\left|\begin{aligned} \alpha\beta \,.\, \alpha a \,.\, \alpha a' \dots &= (-1)^{m-1} \frac{\alpha_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \alpha_2 \frac{\partial F}{\partial \eta_1}}{F_m(\alpha_1, \alpha_2)}, \\ \alpha\beta \,.\, \beta a \,.\, \beta a' \dots &= (-1)^{m} \frac{\alpha_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + \alpha_2 \frac{\partial F}{\partial \eta_2}}{F_m(\alpha_1, \alpha_2)}, \end{aligned}\right.$$

α_1, α_2 die Richtungscosinus der Gerade $\alpha\beta$ bezeichnend und $F_m(\alpha_1, \alpha_2)$ das Aggregat der Glieder m^{ten} Grades in Bezug auf x, y von F, nachdem α_1, α_2 statt x bez. y eingeführt worden sind, darstellend.

Nun ist

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{b}{a}$$

und wir werden also aus (9) und (10) zu schliessen haben, dass

(11) $$\frac{N(\xi_1, \eta_1)}{a\frac{\partial F}{\partial \eta_1} - b\frac{\partial F}{\partial \xi_1}} = -\frac{N(\xi_2, \eta_2)}{a\frac{\partial F}{\partial \eta_2} - b\frac{\partial F}{\partial \xi_2}}.$$

In der Nähe des Punktes α wird das Differential des Integrals (7) der Form:

(12) $$\frac{N(\xi_1, \eta_1)\,dx}{(a(x-\xi_1) + b(y-\eta_1))\frac{\partial F}{\partial \eta_1}}$$

und in der Nähe des Punktes β der Form:

(13) $$\frac{N(\xi_2, \eta_2)\,dx}{(a(x-\xi_2) + b(y-\eta_2))\frac{\partial F}{\partial \eta_2}}.$$

[1] Wir stützen uns hierbei auf die folgende Entwickelung einer ganzen Funktion n^{ten} Grades $f(x, y)$: $f(\xi + \rho\alpha_1, \eta + \rho\alpha_2) = f(\xi, \eta) + \rho\left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \xi} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) + \dots \rho^n f_n(\alpha_1, \alpha_2)$, und interpretiren ρ als Radius vektor vom Punkte (ξ, η) und α_1, α_2 als seine Richtungscosinus.

Im ersten Falle soll der Punkt (x, y) auf der Kurve $F = 0$ und unendlich nahe an α liegen, wesshalb

$$(x - \xi_1)\frac{\partial F}{\partial \xi_1} + (y - \eta_1)\frac{\partial F}{\partial \eta_1} = 0,$$

folglich (12) von der Form werden:

$$\frac{N(\xi_1, \eta_1)dx}{(x - \xi_1)\left(a\frac{\partial F}{\partial \eta_1} - b\frac{\partial F}{\partial \xi_1}\right)} = K\frac{dx}{x - \xi_1}.$$

Im Ausdrucke (13) soll (x, y) unendlich nahe dem Punkte β, dennoch auf der Kurve $F = 0$ gelegen sein, und daher (13), auf Grund von (11), die Form annehmen:

$$K\frac{dx}{x - \xi_2}.$$

Im obigen in (B) eingehenden Integrale $S_{\alpha\beta}$ ist N mit einem solchen Faktor versehen, dass die entsprechende Grösse K eben gleich Eins wird.

Die Gleichung (B) giebt daher für $\lambda = 0$ und nach Einführung des Werthes (6) den Satz:

(B′) $$\sum_{i=1}^{\mu}\frac{N\Psi}{(ax + by + c)(F\Phi)} = \left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)_\alpha - \left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)_\beta,$$

falls die Summe über alle Schnittpunkte zwischen $F = 0$ und $\Phi = 0$ ausgedehnt wird.

Der Satz (A′) ist von Jacobi in einer etwas allgemeineren Form gegeben worden, nämlich in der Form:

(14) $$\sum\frac{\Omega}{(F\Phi)} = 0,$$

wobei F, Φ und Ω beliebige ganze Funktionen der Grade m bez. n und $m + n - 3$ darstellen und die Summirung über alle Schnittpunkte zwischen $F = 0$ und $\Phi = 0$ auszudehnen ist.

Dieser Satz zusammen mit einem anderen, den Satz (B′) umfassenden, wurde von Jacobi entwickelt im B. 14, S. 281 des Journals von Crelle. Man siehe auch die *Theorie der Abel'schen Funktionen* von Clebsch und Gordan, Leipzig 1866, wo diese Sätze von Jacobi zum Beweise der Abel'schen Sätze (A) und (B) benutzt worden sind.

Der von JACOBI gegebene Beweis seiner Sätze ist rein algebraischer Natur, elementär, jedoch im Vergleich zu den oben vorgetragenen Beweisen komplicirt. Es giebt aber eine rein geometrische Beweisführung jenes Satzes (14), die an Einfachkeit und Uebersichtlichkeit Nichts zu wünschen übrig lässt, die freilich einen Satz von LIOUVILLE in T. VI, p. 345 des Journal de Mathématiques (1841) über den Schwerpunkt der Schnittpunkte zweier Kurven voraussetzt, aber dieser Satz kann, wie ich früher in einer Abhandlung *Om geometriska kurvor med dubbel krökning* in T. VIII der Jahresschrift der Universität zu Lund (1871) gezeigt habe, sehr leicht auf rein geometrischem Wege gewonnen werden. Hiervon wird das Nächstfolgende handeln.

III.

Ein Satz von Liouville.

Folgende Bemerkung schicke ich voran:

Wenn eine solche einfach-unendliche und stetige Kurven-Schaar vom Index μ:

$$(15) \qquad f(x, y, \lambda) = 0,$$

vorgelegt ist, die zwar μ Kurven durch einen beliebig genommenen Punkt, aber durch einen Punkt O besonderer Lage nur $\mu - r + 1$ Kurven schickt, und dabei immer O für eine der letzteren r-fach ist, und O nur in derartigem Falle für eine der Kurven (15) vielfacher Punkt wird, so bilden die geraden Polaren von O in Bezug auf die Kurven der gegebenen Schaar eine Schaar vom Index $\mu - r + 1$.

Für den Beweis zeige ich zunächst, dass im angenommenen Falle diejenige Kurve der Schaar (15), die O als r-fachen Punkt besitzt, für r verschiedene Kurven gezählt werden muss, deren nur eine O als r-fachen, aber eine andere ihn als $r - 1$-fachen, eine dritte ihn als $r - 2$-fachen Punkt besitzt, u. s. f. Es soll nämlich jetzt für einen gewissen Werth λ^0 von λ der obigen Voraussetzung gemäss sein:

$$f(\lambda^0) = 0, \qquad f'(\lambda^0) = 0, \quad \ldots, \quad f^{r-1}(\lambda^0) = 0,$$

falls statt x und y die Koordinaten von O eingetragen werden. Aber diese Gleichungen führen die folgenden mit sich:

$$1^\circ \qquad f(\lambda_1) = 0, \qquad f'(\lambda_1) = 0, \quad \ldots, \quad f^{r-2}(\lambda_1) = 0,$$

wenn $\lambda_1 = \lambda_0 + d\lambda$ und $d\lambda$ unendlich klein ist; ferner

$$2^\circ \qquad f(\lambda_2) = 0, \qquad f'(\lambda_2) = 0, \quad \ldots, \quad f^{r-3}(\lambda_2) = 0,$$

falls $\lambda_2 = \lambda_1 + d\lambda$, $d\lambda$ unendlich klein; u. s. f.; endlich

$$(r-1)^\circ \qquad f(\lambda_{r-1}) = 0,$$

$\lambda_{r-1} = \lambda_{r-2} + d\lambda$, $d\lambda$ unendlich klein.

Sei dann

$$(a_1) \qquad f(x, y, \lambda^0) = 0$$

die Gleichung der Kurve mit O als r-fachem Punkte.[1] Sie ist nach dem eben Angemerkten als zusammenfallend zu betrachten mit einer zweiten Kurve

$$(a_2) \qquad f(x, y, \lambda_1) = 0$$

mit O als $r-1$-fachem Punkte,[2] und mit einer dritten Kurve

$$(a_3) \qquad f(x, y, \lambda_2) = 0$$

mit O als $r-2$-fachem Punkte, u. s. f., schliesslich mit einer Kurve

$$(a_r) \qquad f(x, y, \lambda_{r-1}) = 0$$

mit O als einfachem Punkte.

Sei dann p ein Punkt allgemeiner Lage in der x, y-Ebene, so finden wir, dass unter den *ersten* Polaren von p in Bezug auf die Kurven (15 jedenfalls $r-1$ Polaren, nämlich diejenigen in Bezug auf $(a_1), (a_2), (a_3), \ldots (a_{r-1})$, durch O gehen. Unter den *geraden* Polaren des letzteren Punktes in Bezug auf die Kurven (15) gehen also immer diejenigen, welche den Kurven $(a_1), (a_2), (a_3), \ldots, (a_{r-1})$ zugehören, durch den *beliebig* genom-

[1] Also mit r Zweigen durch O.

[2] Nämlich, nach 1°, mit $r-1$ Zweigen durch O.

menen Punkt p und werden folglich unbestimmt. Nun kann aber die Schaar der geraden Polaren irgend eines Punktes in Bezug auf die Kurven (15) höchstens vom Index μ werden, so dass höchstens μ derselben durch irgend einen beliebigen Punkt p gehen.[1] Vom Punkte O gilt daher insbesondere, dass unter seinen geraden Polaren in Bezug auf die Kurven der Schaar (15), — wenn die Kurve mit O als Multipelpunkte ausgeschlossen wird, — nur $\mu - r + 1$ derselben durch p gehen, oder dass *jene gerade Polaren des Punktes O eine Kurve der $\mu - r + 1^{\text{sten}}$ Klasse umhüllen.*

Ich betrachte jetzt eine Kurve (K) der m^{ten} Klasse und eine Schaar von Kurven C', C'', ..., n^{ter} Klasse, welche letztere sämmtlich von denselben n^2 Geraden berührt sein sollen. K und C' hat eine Tangentengruppe gemein, die ich mit Γ' bezeichne, K und C'' eine derartige, die Γ'' heisse, u. s. f. Es bilden diese Γ', Γ'', ... eine Kurvenschaar vom Index m, denn durch jeden Punkt (p) der Ebene gehen m Tangenten der Kurve K und jede dieser Tangenten wird von einer, aber auch nur einer der Kurven C', C'', ... berührt. Diese, jene Tangenten berührenden Kurven C bestimmen ihrerseits die einzigen Tangentengruppen Γ', Γ'', ... die durch den Punkt p hindurchgehen. Wir sehen ferner, dass, wenn O ein r-facher Punkt einer Γ' wird, es nur $m - r$ andere durch O hindurchgehende Γ'', Γ''', ... geben kann, weil nämlich jetzt r von den Tangenten an K, von O aus gezogen, von ein und derselben Kurve C berührt werden. Die Schaar der Kurven Γ', Γ'', ... ist also gerade des oben postulirten Charakters.

Auf diese Kurvenschaar können wir daher den obigen Satz anwenden. Thun wir es, so erkennen wir sogleich, dass die geraden Polaren irgend eines Punktes O in Bezug auf die der Kurve K und den verschiedenen Kurven C', C'', ... gemeinsamen Tangentengruppen im Allgemeinen, wenn O ausserhalb K liegt, eine Kurve der m^{ten} Klasse umhüllen, die mit K die von O aus zu ziehenden m Tangenten gemein hat;

wenn aber O zwar ausserhalb K liegt, aber Schnittpunkt zweier gemeinsamer Tangenten von K und einer der Kurven C ist, so wird die Klassenzahl der umhüllten Kurve nur $m - 1$;

[1] Es gilt nämlich μ als Index für die Schaar der Polaren beliebiger Ordnungszahl irgend eines Punktes in Bezug auf die Kurven (15).

und wenn r der von O ausgehenden Tangenten an K zugleich ein und dieselbe Kurve C berühren, so wird die Klasse der von jenen geraden Polaren von O umhüllten Kurve nur $m - r + 1$.

Aber wenn insbesondere die Kurve K im Berührungspunkte einer der Tangenten durch O von einer Kurve C^0 berührt wird, so gilt von der *ersten* Polare eines beliebigen anderen Punktes p in Bezug auf die den beiden Kurven K und C^0 gemeinsame Tangentengruppe, dass sie durch jenen Berührungspunkt beider Kurven geht und diese dort auch berührt. Dieselbe Polare muss ferner die Schnittpunkte der Tangente von K und C^0 im gemeinsamen Berührungspunkte mit den übrigen diesen Kurven gemeinsamen Tangenten enthalten, weil diese Punkte Doppelpunkte der fraglichen Tangentengruppe, als Kurve betrachtet, ausmachen. Die Anzahl solcher Punkte ist nur $mn - 2$, weil die Tangente im gemeinsamen Berührungspunkte für zwei Individuen der fraglichen Tangentengruppe zählt. Hieraus würde aber folgen, dass jene erste Polare mit der Tangente im gemeinsamen Berührungspunkte der K und C^0 mindestens mn Punkte, nämlich zwei mit jenem Berührungspunkte zusammenfallende und die eben erwähnten $mn - 2$ Doppelpunkte, gemein haben müsste. Die Ordnungszahl der Polare ist doch nur $mn - 1$. Die Tangente im angenommenen Berührungspunkte zwischen K und C^0 gehört daher in ihrer ganzen Erstreckung der ersten Polare von p zu, die daher durch O geht. Die *gerade* Polare von O in Bezug auf die für K und C^0 gemeinsame Tangentengruppe geht folglich durch p. Aber p war ganz beliebig zu nehmen. Die letzt-erwähnte gerade Polare wird daher unbestimmt. Es gehen aber durch O noch $m - 1$ andere erste Polaren von p in Bezug auf eben so viele andere Tangentengruppen, die für K und gewisse, von der Lage von p abhängige der Kurven C', C'', ... gemeinsam sind. Die geraden Polaren von O in Bezug auf diese Tangentengruppen werden im Allgemeinen vollkommen bestimmt und die einzigen derartigen, die durch p gehen.

Hieraus können wir ferner schliessen, dass, wenn K von einer der Kurven C', C'', ... in k Punkten berührt wird, und die Tangenten in diesen Punkten durch O gehen, die geraden Polaren von O in Bezug auf die Gruppen gemeinsamer Tangenten von K und C', von K und C'', etc., eine Kurve der Klasse $m - k$ umhüllen, deren von O ausgehende Tangenten ebenfalls K berühren.

Vermittels des Korrelationsprincips oder einfach des Princips der reciproken Polaren in Bezug auf einen Kreis mit O zum Mittelpunkte werden wir von den eben angeführten Sätzen zu anderen sehr einfacherer Form gelangen. Aus der Kurve K wird nämlich jetzt eine Kurve m^{ter} Ordnung allgemeinster Art, aus der Kurvenschaar C', C'', ... ein Büschel von Kurven C', C'', ... n^{ter} Ordnung mit n^2 gemeinsamen Schnittpunkten, aus der Gruppe Γ' der gemeinsamen Tangenten von K und C' die Gruppe (γ') der Schnittpunkte der entsprechenden Kurven, und endlich, weil dem Punkte O die unendlich entfernte Gerade entspricht, wird die gerade Polare von O in Bezug auf Γ' in den Schwerpunkt der Gruppe γ' transformirt, hierbei doch alle Punkte in γ' mit gleich grossen Massen versehen gedacht.

Dies giebt uns folgende Sätze:

Wenn K eine nicht-parabolische Kurve m^{ter} Ordnung und C', C'', ... Kurven n^{ter} Ordnung eines Büschels sind, so werden im Allgemeinen die Schwerpunkte der Schnittpunktssysteme der K und C', der K und C'', u. s. f., eine Kurve m^{ter} Ordnung erfüllen, deren Asymptoten denen der Kurve K parallell laufen.

Wenn aber eine der Kurven C durch r der unendlich entfernten Punkte von K hindurchgeht, also r Asymptoten hat parallell mit eben so vielen Asymptoten der Kurve K, so kann die Ordnungszahl jener Schwerpunktskurve höchstens $m - r + 1$ sein;

und *wenn insbesondere r Asymptoten einer C mit eben so vielen Asymptoten der K zusammenfallen, wird jene Ordnungszahl nur $m - r$, und die Asymptoten der Schwerpunktskurve laufen mit den übrigen Asymptoten von K parallell.*

Denken wir uns C' als eine Kurve n^{ter} Ordnung allgemeinster Art und C'' aus den Asymptoten von C' gebildet, so giebt es in dem von diesen C' und C'' gebildeten Büchsel eine dritte Kurve, C''', die aus der unendlich entfernten Gerade, zwei mal gezählt, und einer Kurve $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung zusammengesetzt ist. Diese C''' muss als die Kurve K in sämmtlichen ihren unendlich entfernten Punkten berührend angesehen werden, und daher liegt jetzt ein Fall der zuletzt betrachteten Art vor, und zwar mit $r = m$. Wir kommen aber dann gerade zu demjenigen Satze von Liouville, von dem am Ende des vorigen Abschnittes die Rede war und der folgendermassen lautet:

»Der Schwerpunkt der Schnittpunkte zweier nicht parabolischer Kurven fällt mit dem Schwerpunkte der Schnittpunkte der einen Kurve mit den Asymptoten der anderen und also mit dem Schwerpunkte der Schnittpunkte der Asymptoten beider Kurven zusammen.»[1]

IV.

Ein Satz von Jacobi.

1. Die Kurven des Büschels

$$\varphi + \lambda\psi = 0, \qquad \lambda \text{ var. Parameter,} \tag{16}$$

besitzen sämmtlich dieselben Asymptoten, falls, wie ich annehme, φ des n'^{ten} und ψ des $n' - 2^{\text{ten}}$ Grades in Bezug auf x, y sind. Sei F m^{ten} Grades und

$$F = 0 \tag{17}$$

die Gleichung der Kurve (1), die ich K nenne. Der Schwerpunkt der mn' Schnittpunkte der Kurve K mit einer der Kurven (16) wird jetzt, nach dem oben bewiesenen Satze von LIOUVILLE, von λ unabhängig. Wenn daher die Koordinaten jener Schnittpunkte mit

$$x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \ldots$$

bezeichnet werden, so muss sein:

$$\sum_{i=1}^{mn} dx_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{mn} dy_i = 0, \tag{18}$$

wenn mit dx_i, dy_i die aus der Aenderung $d\lambda$ von λ erfolgenden Aenderungen von x_i und y_i bezeichnet werden. Diese Aenderungen sind aber durch die Gleichung (6) im Abschnitte II bestimmt worden. Dadurch bekommt man aus der ersten der Gleichungen (18) die Gleichung:

$$\sum \frac{\psi \dfrac{\partial F}{\partial y}}{(F\varphi) + \lambda(F\psi)} = 0, \tag{19}$$

[1] Auch andere Sätze dieser Art betreffend Kurven doppelter Krümmung und Flächen sind in derselben Weise von mir in der oben citirten Abhandlung in T. VIII der Jahresschrift der Universität zu Lund hergeleitet worden.

wo über alle mn' Schnittpunkte der zwei Kurven (17) und (16) summirt werden soll.

Es kann sein $\varphi = V \cdot \Phi$, wo Φ eine ganze Funktion des n^{ten} und V eine ganze Funktion des $n' - n^{\text{ten}}$ Grades sind ($n < n'$). Man hat dann:

$$(F\varphi) = V(F\Phi) + \Phi(FV),$$

also aus (19) für $\lambda = 0$:

$$\sum_{(\Phi=0)} \frac{\psi \frac{\partial F}{\partial y}}{V(F\Phi)} + \sum_{(V=0)} \frac{\psi \frac{\partial F}{\partial y}}{\Phi(FV)} = 0, \tag{20}$$

falls die erste Summe über die Schnittpunkte: $F = 0$, $\Phi = 0$ und die zweite Summe über die der Kurven $F = 0$, $V = 0$ ausgedehnt werden.

2. Wenn gesetzt wird

$$V = \frac{\partial F}{\partial y},$$

und demgemäss $n' - n = m - 1$, so fällt in vorangehender Formel die zweite Summe weg, und man hat den Jacobi'schen Satz (14):

$$\sum \frac{\psi}{(F\Phi)} = 0,$$

wo ψ eine ganze Funktion des Grades $n' - 2 = m + n - 3$, F und Φ ganze Funktionen der Grade m bez. n vorstellen, und über sämmtliche mn Schnittpunkte der Kurven $F = 0$, $\Phi = 0$ summirt wird.

3. Wenn dagegen

$$V = (ax + by + c)\frac{\partial F}{\partial y},$$

und demgemäss $n' - n = m$, so muss sein:

$$\begin{aligned}(FV) &= (ax + by + c)\left(F\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial y}(F\, ax + by + c)\\ &= (ax + by + c)\left(F\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial y}\left(b\frac{\partial F}{\partial x} - a\frac{\partial F}{\partial y}\right),\end{aligned}$$

und die Gleichung (20) nimmt die Form an:

$$\sum_{\Phi=0} \frac{\psi}{(ax + by + c)(F\Phi)} + \sum_{(ax+by+c=0)} \frac{\psi}{\Phi\left(b\frac{\partial F}{\partial x} - a\frac{\partial F}{\partial y}\right)} = 0. \tag{21}$$

Es muss nach dem Obigen ψ eine ganze Funktion des Grades $n' - 2 = m + n - 2$ sein. Sei sie ausserdem so gewählt, dass $m - 2$ der m Schnittpunkte der Gerade $ax + by + c = 0$ mit der Kurve $F = 0$ Nullpunkte für sie werden, so reducirt sich die zweite Summe in (21) auf bloss zwei Glieder

$$\left(\frac{\psi}{\Phi}\right)_\alpha \frac{1}{\left(b\frac{\partial F}{\partial x} - a\frac{\partial F}{\partial y}\right)_\alpha} + \left(\frac{\psi}{\Phi}\right)_\beta \frac{1}{\left(b\frac{\partial F}{\partial x} - a\frac{\partial F}{\partial y}\right)_\beta}, \tag{22}$$

deren das erste ein Substitutionsresultat der Koordinaten einer der übriggebliebenen zwei Schnittpunkte: $ax + by + c = 0$, $F = 0$, ausmacht, das zweite Glied sich in derselben Weise auf den zweiten dieser Punkte bezieht. α heisst der erste, β der zweite Punkt.

Aber oben, aus der Gleichung (11), haben wir gesehen, dass, falls N eine ganze Funktion des $m - 2^{\text{ten}}$ Grades ist, die für die oben angenommenen, für F, ψ und $ax + by + c$ gemeinsamen $m - 2$ Nullpunkte verschwindet, so ist

$$\left(\frac{N}{b\frac{\partial F}{\partial x} - a\frac{\partial F}{\partial y}}\right)_\alpha = -\left(\frac{N}{b\frac{\partial F}{\partial x} - a\frac{\partial F}{\partial y}}\right)_\beta.$$

Wenn daher angenommen wird

$$\psi = N \,.\, \Psi,$$

wobei Ψ eine ganze Funktion des n^{ten} Grades bedeuten soll, so wird der Ausdruck (22) der Form

$$K\left(\left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)_\alpha - \left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)_\beta\right),$$

K eine Konstante gleich

$$\left(\frac{N}{b\frac{\partial F}{\partial x} - a\frac{\partial F}{\partial y}}\right)_\alpha.$$

Die Gleichung (21) giebt somit die Formel:

$$\sum_{(\Phi=0)} \frac{N\Psi}{(ax + by + c)(F\Phi)} = K\left(\left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)_\alpha - \left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)_\beta\right),$$

die, wenn der Kürze wegen N statt $\frac{N}{K}$ geschrieben wird, in die Formel (B′) des Abschnittes II übergeht.

V.

Die Abel'sche Transcendente $T_{\alpha\beta}(x)$.

Für die Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems spielt die Transcendente

$$T_{\alpha\beta}(x) = \sum_{i=1} \int_r d\Pi_{\alpha\beta}$$

eine Hauptrolle. Die hier angewandten Bezeichnungen haben die folgende Bedeutung: α, β sind zwei Punkte auf der Kurve K ($F = 0$), $\Pi_{\alpha\beta}$ ist ein Integral dritter Gattung, das sich auf die Kurve K bezieht und nur die Punkte α, β als Unstetigkeitspunkte besitzt. Es soll aber überdies $\Pi_{\alpha\beta}$ ein besonderes $S_{\alpha\beta}$ sein, nämlich aus einem allgemeinen $S_{\alpha\beta}$ und Integralen erster Gattung in linearer Weise so zusammengesetzt werden, dass bei geschickter Wahl der Integrationswege:

$$\int_{\xi'}^{\xi''} d\Pi_{\alpha\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} d\Pi_{\xi'\xi''}, \tag{23}$$

unter ξ', ξ'' zwei beliebige Punkte auf K verstanden. Ferner soll p das Geschlecht der Kurve K bedeuten und durch das Zeichen

$$\int_i \qquad (i = 1 \text{ oder } 2, 3, \ldots, p)$$

eine Integration zwischen zwei bestimmten Punkten auf K, die ich kürzlich als Punkte x_i, y_i bezeichne, vorgeschrieben sein; *aber sämmtliche $2p$ Punkte x und y sollen zusammen mit den ausser α und β befindlichen $m - 2$ Schnittpunkten zwischen K und der Gerade $\alpha\beta$ sammt den Doppel- und Rückkehrpunkten von K auf ein und derselben Kurve $m - 2^{\text{ter}}$ Ordnung liegen.*

Es gilt dann der für jene Transcendente $T_{\alpha\beta}(x)$ fundamentale Satz, dass dieselbe die Differenz zweier Funktionen ausmacht, deren eine nur von α und x, die andere nur von β und x abhängt.[1] Diesen Satz werde ich hier aus dem Carnot'schen Theoreme über die Schnittpunkte dreier Transversalen mit einer algebraischen Kurve (K) ableiten.

[1] Man siehe Clebsch und Gordan: *Theorie der Abel'schen Funktionen,* Leipzig 1866. S. 154—160.

Sei γ ein Punkt auf K, der nicht mit α und β in gerader Linie liegt, übrigens aber beliebig fixirt ist, und seien die ausser α, β und γ vorhandenen Schnittpunkte der Kurve K mit den Seiten $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ mit $a_1, a_2, \ldots$ bez. $b_1, b_2, \ldots$ und $c_1, c_2, \ldots$ bezeichnet. Durch die p Punkte (x), die Doppel- und Rückkehrpunkte von K und jene Punkte (a) bez. (b) und (c) werden drei Kurven $m - 2^{\text{ter}}$ Ordnung gelegt, die durch die Gleichungen $\Phi = 0$ bez. $\Psi = 0$, $\chi = 0$ vertreten sein möchten und die ich der Kürze wegen mit Φ, Ψ, χ bezeichne. Jede dieser Kurven schneidet K in noch p Punkten, die für die Kurve Φ $t_1, t_2, \ldots$ für die Kurve Ψ $z_1, z_2, \ldots$ und für die Kurve χ $y_1, y_2, \ldots$ heissen mögen. Die Abel'sche Gleichung (B) des Abschnittes I, auf $\Pi_{\alpha\gamma}$ statt $S_{\alpha\beta}$ angewandt, werde jetzt von den Schnittpunkten der Kurven K und Ψ als unteren zu denen der Kurven K und χ als oberen Grenzpunkten, oder, wie ich kürzer sagen könne, von Ψ zu χ integrirt.[1] Es kommt dann die folgende Gleichung heraus:

$$\sum_{i=1}^{p}\int_{x_i}^{y_i} d\Pi_{\alpha\gamma} + \sum_{i=1}^{m-2}\int_{b_i}^{c_i} d\Pi_{\alpha\gamma} + \sum_{i=1}^{p}\int_{z_i}^{x} d\Pi_{\alpha\gamma} = \log\left[\left(\frac{\chi}{\Psi}\right)_\alpha \left(\frac{\Psi}{\chi}\right)_\gamma\right]. \tag{24}$$

Und wenn man dieselbe Gleichung (B) auf $\Pi_{\beta\gamma}$ anwendet und von χ zu Φ integrirt, bekommt man:

$$\sum_{i=1}^{p}\int_{x_i}^{t_i} d\Pi_{\beta\gamma} + \sum_{i=1}^{m-2}\int_{c_i}^{a_i} d\Pi_{\beta\gamma} + \sum_{i=1}^{p}\int_{y_i}^{x_i} d\Pi_{\beta\gamma} = \log\left[\left(\frac{\Phi}{\chi}\right)_\beta \left(\frac{\chi}{\Phi}\right)_\gamma\right]. \tag{25}$$

Die Dreiecksseiten $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ seien durch die Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ vertreten. Dann kann ich sagen, dass, wenn man die zwei Differentialgleichungen (B) für $\Pi_{\alpha'\gamma'}$, $\Pi_{\beta'\gamma'}$ von B zu C bez. C zu A integrirt, die folgenden Relationen gewonnen werden:

$$\sum_{i=1}^{m-2}\int_{b_i}^{c_i} d\Pi_{\alpha'\gamma'} + \int_{\gamma}^{\beta} d\Pi_{\alpha'\gamma'} = \log\left[\left(\frac{C}{B}\right)_{\alpha'} \left(\frac{B}{C}\right)_{\gamma'}\right], \tag{26}$$

[1] Die Wege, welche die Schnittpunkte: $F = 0$, $\Psi + \lambda\chi = 0$, oder bez. der Gleichung (25) die Schnittpunkte: $F = 0$, $\chi + \lambda\Phi = 0$, beschreiben, wenn λ stetig von 0 bis ∞ variirt, werden zu Integrationswegen benutzt. Es werden aber noch Wege von x_i nach y_i hinzugefügt und ferner Integrationen von x_i nach z_i und von x_i nach t folgendermassen definirt:

$$\int_x^z = \int_x^y + \int_y^z, \qquad \int_x^t = \int_x^y + \int_y^t.$$

$$(27)\qquad \sum_{i=1}^{m-2}\int_{c_i}^{a_i} d\Pi_{\beta'\gamma'} + \int_{\alpha} d\Pi_{\beta'\gamma'} = \log\left[\left(\frac{A}{C}\right)_{\beta'}\left(\frac{C}{A}\right)_{\gamma'}\right],$$

hierbei α', β', γ' Punkte auf K bezeichnend, die unendlich nahe an α bez. β und γ liegen.

Es ist aber nach (23):

$$\int_{\gamma}^{\beta} d\Pi_{\alpha'\gamma'} = \int_{\alpha'}^{\gamma'} d\Pi_{\gamma\beta} = -\int_{\alpha'}^{\gamma'} d\Pi_{\beta\gamma},$$

und daher:

$$\int_{\alpha}^{\gamma} d\Pi_{\beta'\gamma'} + \int_{\gamma}^{\beta} d\Pi_{\alpha'\gamma'} = \int_{\alpha}^{\gamma} d\Pi_{\beta'\gamma'} - \int_{\alpha'}^{\gamma'} d\Pi_{\beta\gamma},$$

gleich *Null*, wenn α', β' und γ' den kürzesten Weg nach α bez. β und γ rücken. Durch Addition von (26) und (27) erfolgt somit:

$$(28)\qquad \sum_{i=1}^{m-2}\left(\int_{b_i}^{c_i} d\Pi_{\alpha\gamma} + \int_{c_i}^{a_i} d\Pi_{\beta\gamma}\right) = \lim \log\left[\left(\frac{B}{A}\right)_{\gamma'}\left(\frac{A}{C}\right)_{\beta'}\left(\frac{C}{B}\right)_{\alpha'}\right].$$

Aber, wenn A, B, C in der Hesse'schen Normalform gegeben sind:

$$\left(\frac{B}{A}\right)_{\gamma'} = \frac{\text{Länge des Lothes von } \gamma' \text{ auf } \alpha\gamma}{\text{Länge des Lothes von } \gamma' \text{ auf } \beta\gamma} = \frac{\sin\gamma'\gamma\alpha}{\sin\gamma'\gamma\beta},$$

$$\left(\frac{A}{C}\right)_{\beta'} = \frac{\text{Länge des Lothes von } \beta' \text{ auf } \gamma\beta}{\text{Länge des Lothes von } \beta' \text{ auf } \alpha\beta} = \frac{\sin\beta'\beta\gamma}{\sin\beta'\beta\alpha},$$

$$\left(\frac{C}{B}\right)_{\alpha'} = \frac{\text{Länge des Lothes von } \alpha' \text{ auf } \beta\alpha}{\text{Länge des Lothes von } \alpha' \text{ auf } \gamma\alpha} = \frac{\sin\alpha'\alpha\beta}{\sin\alpha'\alpha\gamma}.$$

Es werden beim Grenzübergange $\alpha'\alpha$, $\beta'\beta$, $\gamma'\gamma$ Tangenten der Kurve K in den Punkten α, β, γ bezw. Ich werde sie mit τ_α, τ_β, τ_γ bezeichnen. Bemerken wir hernach, dass der Formel (9) des Abschnittes II zufolge:

$$\frac{\chi_\alpha}{\chi_\beta} = \frac{\alpha c_1 \cdot \alpha c_2 \cdot \alpha c_3 \ldots}{\beta c_1 \cdot \beta c_2 \cdot \beta c_3 \ldots},$$

$$\frac{\psi_\gamma}{\psi_\alpha} = \frac{\gamma b_1 \cdot \gamma b_2 \cdot \gamma b_3 \ldots}{\alpha b_1 \cdot \alpha b_2 \cdot \alpha b_3 \ldots},$$

$$\frac{\Phi_\beta}{\Phi_\gamma} = \frac{\beta a_1 \cdot \beta a_2 \cdot \beta a_3 \ldots}{\gamma a_1 \cdot \gamma a_2 \cdot \gamma a_3 \ldots},$$

so finden wir durch Addition der Gleichungen (24) und (25) und nachfolgende Subtraktion von (28):

$$(29)\qquad \sum_{i=1}^{p}\int_{x_i}^{y_i}(d\Pi_{\alpha\gamma} - d\Pi_{\beta\gamma}) + \sum_{i=1}^{p}\int_{x_i}^{t_i} d\Pi_{\beta\gamma} - \sum_{i=1}^{p}\int_{x_i}^{z_i} d\Pi_{\alpha\gamma} =$$

$$\log\left[\frac{\sin(\tau_\beta\,,\,\beta\alpha)\,\beta a_1\,.\,\beta a_2\,\ldots\,\sin(\tau_\gamma\,,\,\gamma\beta)\,\gamma b_1\,.\,\gamma b_2\,\ldots\,\sin(\tau_\alpha\,,\,\alpha\gamma)\,\alpha c_1\,.\,\alpha c_2\,\ldots}{\sin(\tau_\beta\,,\,\beta\gamma)\,\beta c_1\,.\,\beta c_2\,\ldots\,\sin(\tau_\gamma\,,\,\gamma\alpha)\,\gamma a_1\,.\,\gamma a_2\,\ldots\,\sin(\tau_\alpha\,,\,\alpha\beta)\,\alpha b_1\,.\,\alpha b_2\,\ldots}\right].$$

Aber nach dem CARNOT'schen Theoreme, wie es, wenn die Ecken des Dreiecks $(\alpha\beta\gamma)$ auf der Kurve (K) fallen, zu formuliren ist (siehe CHASLES, *Mémoire de Géométrie, Suite d'Aperçu historique* etc., p. 727, 846), wird der eingeklammerte Ausdruck gleich *eins*. Ferner muss nach (23) sein:

$$\int_{x_i}^{y_i} d\Pi_{\alpha\gamma} - \int_{x_i}^{y_i} d\Pi_{\beta\gamma} = \int_{\alpha}^{\gamma} d\Pi_{x_i y_i} - \int_{\beta}^{\gamma} d\Pi_{x_i y_i} = \int_{\alpha}^{\beta} d\Pi_{x_i y_i} = \int_{x_i}^{y_i} d\Pi_{\alpha\beta}.$$

Damit erfolgt aus (29) die Relation:

$$\sum_{i=1}^{p}\int_{x_i}^{y_i} d\Pi_{\alpha\beta} + \sum_{i=1}^{p}\int_{x_i}^{t_i} d\Pi_{\beta\gamma} + \sum_{i=1}^{p}\int_{x_i}^{z_i} d\Pi_{\gamma\alpha} = 0,$$

also nach der Definition der Transcendente T:

$$T_{\alpha\beta}(x) = T_{\alpha\gamma}(x) - T_{\beta\gamma}(x).$$

Es genüge hier γ als konstant, dagegen α, β und x als variabel anzusehen, damit wir in der letzten Formel den wichtigen Satz erblicken, dass die ABEL'sche Transcendente $T_{\alpha\beta}$ eine Differenz zweier Funktionen ausmacht, deren eine nur von α und den p Punkten x, die andere nur von β und denselben p Punkten x abhängt. W. z. z. w.

SUR UNE IDENTITÉ D'ABEL ET SUR D'AUTRES FORMULES ANALOGUES

PAR

J. L. W. V. JENSEN
à COPENHAGUE.

ABEL[1] à démontré l'extension suivante de la formule du binôme

$$(x + \alpha)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \alpha(\alpha - \nu\beta)^{\nu-1}(x + \nu\beta)^{n-\nu}. \tag{1}$$

Dans une note à la mémoire d'ABEL, LIE[2] a dit que la formule (1) n'est qu'un cas spécial d'une formule donnée autérieurement par CAUCHY.[3] Voici la formule à laquelle se rapporte l'observation de LIE

$$\frac{(x + a + n)^n - (x + n)^n}{a} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n}{\nu}(\alpha + n - \nu)^{n-\nu-1}(x + \nu)^\nu, \tag{2}$$

où nous avons seulement changé les noms des variables. On voit aisément que la formule de CAUCHY se déduit de celle d'ABEL en prenant dans la dernière $\beta = -1$ et en remplaçant x par $x + n$. L'assertion de LIE n'est donc pas bien fondée, car c'est la formule (1) qui a la forme la plus générale. Du reste on peut déduire celle-ci de la formule (2) en faisant dans la dernière les substitutions

$$x \Big| -\frac{x}{\beta} - n\,,\ \alpha \Big| -\frac{\alpha}{\beta}.$$

---

[1] *Démonstration d'une expression de laquelle la formule binôme est un cas particulier.* Journal für die Mathematik, t. 1, p. 159 (1826) = Oeuvres complètes (l'édition de SYLOW et LIE), t. I, p. 102.

[2] Oeuvres d'ABEL, l'édition citée, t. II, p. 294.

[3] Exercices de Mathématiques, 1ère année, p. 53, formule (36), (1826).

La démonstration d'Abel qui se réduit à une induction complète[1] ne laisse pas entrevoir la méthode qu'a suivi l'illustre géomètre pour trouver sa formule. C'est dans une mémoire posthume[2] que l'on trouve l'origine de la formule (1). Le problème qu'Abel se pose est de développer la fonction $\varphi(x+\alpha)$ en termes de la forme $\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x+n\beta)$ et il le réduit, par des méthodes d'une grande portée, à celui de »développer $e^{\alpha v}$ suivant les puissances de $ve^{\beta v}$». Il trouve ainsi la formule

$$\varphi(x+\alpha) = \varphi(x) + \frac{\alpha}{|\underline{1}}\frac{d\varphi(x+\beta)}{dx} + \frac{\alpha(\alpha-2\beta)}{|\underline{2}}\frac{d^2\varphi(x+2\beta)}{dx^2} + \dots \tag{3}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-\nu\beta)^{\nu-1}}{|\underline{\nu}} \varphi^{(\nu)}(x+\nu\beta),$$

de laquelle la formule (1) est un cas spécial. La méthode d'Abel est loin d'être rigoureuse, et c'est sans donte pour cette raison qu'il n'a pas publié le mémoire cité,[2] en donnant seulement un des résultats sûrs qu'il avait trouvé.

Quant à la formule (3) Halphen[3] a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle soit exacte, en montrant en même temps qu'elle peut souvent conduire à des résultats inexacts.

Nous étudierons, dans cette note, quelques séries qui sont intimement liées à la formule d'Abel (1) et à d'autres formules analogues, qui seront établies dans la suite.

1. Soit d'abord z une variable complexe, et soient $\Phi(z)$ et $(1:f(z))$ des fonctions holomorphes dans les environs de $z=0$, on sait par la théorie de l'inversion des séries qu'on peut développer $\Phi(z)$ en série entière de $(z:f(z))$ pour z *suffisamment petite*. En se servant de la série de Lagrange on trouve, comme il est bien connu,

$$\Phi(z) = \Phi(0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\underline{\nu}} \left[\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}(f(z))^{\nu}\Phi'(z)\right]_{z=0} \left(\frac{z}{f(z)}\right)^{\nu}. \tag{4}$$

[1] Pour une autre démonstration du même genre, mais plus élémentaire, voir: M. E. Netto, Lehrbuch der Combinatorik, p. 52 (1901).

[2] *Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes.* Oeuvres, t. II, p. 72, probl. IV.

[3] *Sur une série d'Abel.* Bulletin de la société mathématique, t. X, p. 67, et Comptes Rendus, t. 93, p. 1003 (1881).

L'autre forme de la série de LAGRANGE[1] nous donne de même

$$(5)\qquad \frac{\Phi(z)}{1 - z\dfrac{f'(z)}{f(z)}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}} \left[\frac{d^\nu}{dz^\nu}(f(z))^\nu \Phi(z)\right]_{z=0} \left(\frac{z}{f(z)}\right)^\nu.$$

Prenons maintenant $\Phi(z) = e^{\alpha z}$, $f(z) = e^{\beta z}$, $u = ze^{-\beta z}$, α et β étant des constantes quelconques, nous aurons les développements suivants

$$(6)\qquad e^{\alpha z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+\nu\beta)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} u^\nu = 1 + \frac{\alpha}{\underline{|1}} ze^{-\beta z} + \frac{\alpha(\alpha+2\beta)^1}{\underline{|2}} z^2 e^{-2\beta z} + \ldots$$

et

$$(7)\qquad \frac{e^{\alpha z}}{1-\beta z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\nu\beta)^\nu}{\underline{|\nu}} u^\nu = 1 + \frac{(\alpha+\beta)^1}{\underline{|1}} ze^{-\beta z} + \frac{(\alpha+2\beta)^2}{\underline{|2}} z^2 e^{-2\beta z} + \ldots$$

valables pour z et u suffisamment petites. De ces formules la premiere (6) est bien connue, et on sait que la série au deuxième membre converge pour $|\beta u| < e^{-1}$, ou $|\beta z| e^{1-R(\beta z)} < 1$. On sait aussi que l'égalité entre les deux membres n'est assurée que si la condition supplémentaire $|\beta z| < 1$ est satisfaite. La formule (7) est moins connue[2]; ses conditions d'existence sont les mêmes que celles pour la formule (6).

Signalons incidemment les deux autres formules que voici:

$$\left.\begin{aligned} &(8)\qquad z^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{n(n+\nu)^{\nu-1}\beta^\nu}{\underline{|\nu}} u^{n+\nu}, \qquad n > 0, \\ &\text{et} \\ &(9)\qquad \frac{z^n}{1-\beta z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(n+\nu)^\nu \beta^\nu}{\underline{|\nu}} u^{n+\nu}, \qquad n \geqq 0, \end{aligned}\right\} u = ze^{-\beta z}.$$

On les déduit des formules (6) et (7) en prenant dans celles-ci $\alpha = n\beta$ et en multipliant les deux membres par u^n, n étant un entier.

Revenons maintenant à la formule (6). En posant respectivement $\alpha = a$ et $\alpha = b$ et en multipliant les deux formules qui en résultent membre par membre on trouve

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{u^\nu}{\underline{|\nu}} (a+b)(a+b+\nu\beta)^{\nu-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{u^\nu}{\underline{|\nu}} a(a+\nu\beta)^{\nu-1} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{u^\nu}{\underline{|\nu}} b(b+\nu\beta)^{\nu-1}.$$

---

[1] Voir C. HERMITE. Cours professé pendant le 2e sémestre, 1881—82, 19eme leçon.

[2] Elle est peut-être nouvelle, quoique il me semble peu probable qu'une formule aussi élégante soit échappée à l'attention des géomètres.

En comparant les coefficients de u^n dans les deux membres, nous aurons

$$(10) \quad (a+b)(a+b+n\beta)^{n-1} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a(a+\nu\beta)^{\nu-1} b(b+(n-\nu)\beta)^{n-\nu-1},$$

qui est une nouvelle forme symétrique de l'identité d'Abel. Il est même aisé d'en déduire la formule (1) par un calcul facile.

De l'identité

$$\frac{e^{(a+b)z}}{1-\beta z} = e^{az} \frac{e^{bz}}{1-\beta z}$$

on deduit de la même manière en employant les formules (6) et (7),

$$(a+b+n\beta)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a(a+\nu\beta)^{\nu-1}(b+(n-\nu)\beta)^{n-\nu},$$

qui se réduit à la formule (1) quand on prend $a = \alpha$, $b + n\beta = x$ et puis échange β en $-\beta$.

2. Ces résultats nous engagent de faire d'autres substitutions dans les formules (4) et (5). Posons $\Phi(z) = (1+z)^\alpha$ et $f(z) = (1+z)^\beta$, α et β étant des constantes quelconques et les puissances ayant toujours leurs valeurs principales, nous aurons les formules

$$(11) \quad (1+z)^\alpha = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\nu} \binom{\alpha-1+\nu\beta}{\nu-1} v^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha+\nu\beta} \binom{\alpha+\nu\beta}{\nu} v^\nu,$$

et

$$(12) \quad \frac{(1+z)^\alpha}{1-\beta\dfrac{z}{1+z}} = \frac{(1+z)^{\alpha+1}}{1-(\beta-1)z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha+\nu\beta}{\nu} v^\nu,$$

$$v = z(1+z)^{-\beta},$$

qui sont valables pour z suffisamment petit. Pour le moment ce fait nous suffit. Les conditions de convergence seront données dans un appendice à la fin de cette note. En prenant, dans les deux formules que nous venons de démontrer, $\beta = 0$ l'une et l'autre se reduit à la formule binôme

$$(1+z)^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} z^\nu$$

à exposant quelconque, et elles constituent ainsi des généralisations de la dernière formule. Aussi pour $\beta = 1$ on retrouve cette formule.

On peut de la même manière généraliser le développement de la valeur principale du logarithme

$$l(1+z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu} z^{\nu}.$$

Posons dans (4) $\Phi(z) = l(1+z)$ et $f(z) = (1+z)^{\beta}$, nous aurons la formule

$$(13) \qquad l(1+z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \binom{\nu\beta - 1}{\nu - 1} v^{\nu}, \qquad v = z(1+z)^{-\beta},$$

z ayant toujours une valeur absolue suffisamment petite.

Remarquons encore deux autres formules qui se déduisent de (11) et (12), en prenant $\alpha = n\beta$ et en multipliant les deux membres par v^n:

$$(14) \qquad z^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{n}{n+\nu} \binom{(n+\nu)\beta}{\nu} v^{n+\nu}, \qquad n > 0,$$

et

$$(15) \qquad \frac{z^n}{1 - \beta \dfrac{z}{1+z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{(n+\nu)\beta}{\nu} v^{n+\nu}, \qquad n \geqq 0,$$

$$v = z(1+z)^{-\beta},$$

n étant un entier.

On remarquera l'analogie parfaite qui existe entre les formules (6) et (11), (7) et (12), (8) et (14), (9) et (15). Cette analogie s'étend aux identités algébriques qu'on peut en déduire.

Développons des deux membres de l'identité $(1+z)^{a+b} = (1+z)^a(1+z)^b$ en séries entières de v d'après la formule (11), on trouve en égalant les coefficients de v^n dans les deux membres,

$$(16) \quad \frac{a+b}{a+b+n\beta} \binom{a+b+n\beta}{n} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a}{a+\nu\beta} \binom{a+\nu\beta}{\nu} \frac{b}{b+(n-\nu)\beta} \binom{b+(n-\nu)\beta}{n-\nu},$$

ou en remplaçant b par $b - n\beta$

$$(16 \text{ bis}) \qquad \frac{a+b-n\beta}{a+b} \binom{a+b}{n} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a}{a+\nu\beta} \binom{a+\nu\beta}{\nu} \frac{b-n\beta}{b-\nu\beta} \binom{b-\nu\beta}{n-\nu},$$

ce qui constitue une relation entre les coefficients du binôme. La formule symétrique (16) peut être regardée comme étant une généralisation

du »binôme de Vandermonde» exactement de la même manière que la formule symétrique (10) constitue une généralisation du binôme de Newton à exposant positif et entier.

De l'identité

$$\frac{(1+z)^{a+b}}{1-\beta\dfrac{z}{1+z}} = (1+z)^a \frac{(1+z)^b}{1-\beta\dfrac{z}{1+z}}$$

et des formules (11) et (12) on déduit pareillement l'identité algébrique

$$\binom{a+b+n\beta}{n} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a}{a+\nu\beta}\binom{a+\nu\beta}{\nu}\binom{b+(n-\nu)\beta}{n-\nu},$$

ou

$$(17) \qquad \binom{a+b}{n} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a}{a+\nu\beta}\binom{a+\nu\beta}{\nu}\binom{b-\nu\beta}{n-\nu},$$

formule qui est analogue à l'identité d'Abel (1).

Les formules (16 bis) et (17) sont dues à M. I. G. Hagen en ce sens qu'elles sont comprises dans la formule

$$\frac{a(p+q-nd)+bnq}{(p+q)(p-nd)q}\binom{p+q}{n} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a+b\nu}{(q+d\nu)(p-d\nu)}\binom{q+d\nu}{\nu}\binom{p-d\nu}{n-\nu},$$

qu'il donne sans démonstration.[1] D'autre part la formule ci-dessus peut être déduite des deux formules (16 bis) et (17), qui sont très générales. Presque toutes les relations connues entre les coefficients du binôme s'en déduisent.

3. De la formule (17) nous allons déduire une formule très curieuse. Il s'agit de développer la somme

$$(a, b, n) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{a+\nu\beta}{\nu}\binom{b-\nu\beta}{n-\nu}$$

[1] Synopsis der höheren Mathematik, t. I, p. 67, formule C. 17 (1891).

d'après les puissances entières de β. Voici comment nous procédons. La formule (17) peut s'écrire

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{a+\nu\beta}{\nu}\binom{b-\nu\beta}{n-\nu} - \beta \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu}{a+\nu\beta}\binom{a+\nu\beta}{\nu}\binom{b-\nu\beta}{n-\nu}$$

$$= (a\,,\,b\,,\,n) - \beta \sum_{\nu=1}^{n} \binom{a-1+\nu\beta}{\nu-1}\binom{b-\nu\beta}{n-\nu}$$

$$= (a\,,\,b\,,\,n) - \beta \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{a-1+\beta+\nu\beta}{\nu}\binom{b-\beta-\nu\beta}{n-1-\nu}$$

ou

$$(a\,,\,b\,,\,n) \qquad -\beta(a-1+\beta,\, b-\beta,\, n-1) = \binom{a+b}{n},$$

et par suite

$$\beta(a-1+\beta, b-\beta, n-1) \quad -\beta^2(a-2+2\beta, b-2\beta, n-2) = \beta\binom{a+b-1}{n-1},$$

$$\beta^2(a-2+2\beta, b-2\beta, n-2) - \beta^3(a-3+3\beta, b-3\beta, n-3) = \beta^2\binom{a+b-2}{n-2},$$

. . . .

$$\beta^{n-1}\big(a-(n-1)(1-\beta),\, b-(n-1)\beta,\, 1\big) - \beta^n = \beta^{n-1}\binom{a+b-n+1}{1},$$

$$\beta^n \qquad = \beta^n \binom{a+b-n}{0}.$$

En sommant on trouve la formule nouvelle et élégante

$$(18) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \binom{a+\nu\beta}{\nu}\binom{b-\nu\beta}{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{a+b-\nu}{n-\nu}\beta^\nu,$$

qui exprime le résultat cherché.

Dans le cas où $a+b=p$, p étant un entier positif ou nul et plus petit que n, on peut trouver la somme dans le deuxième membre. On a en effet

$$\binom{p-\nu}{n-\nu} = \frac{(p-\nu)(p-\nu-1)\ldots(p-n+1)}{|\underline{n-\nu}} = (-1)^{n-\nu}\binom{n-p-1}{n-\nu}$$

et par suite

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{p-\nu}{n-\nu} \beta^{\nu} = (-1)^n \sum_{\nu=0}^{n} (-\beta)^{\nu} \binom{n-p-1}{n-\nu}$$

$$= (-1)^n \sum_{\nu=0}^{n} (-\beta)^{n-\nu} \binom{n-p-1}{\nu} = \beta^{p+1}(\beta-1)^{n-p-1},$$

d'où la formule

$$(19) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \binom{a+\nu\beta}{\nu} \binom{p-a-\nu\beta}{n-\nu} = \beta^{p+1}(\beta-1)^{n-p-1}, \qquad 0 \leq p < n.$$

Dans le cas où $p = n$ on trouve directement

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{a+\nu\beta}{\nu} \binom{n-a-\nu\beta}{n-\nu} = \frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}.$$

4. Les identités (1), (10), (16), (17), (18) et (19) que nous avons démontré plus haut ne sont que des cas particuliers des relations plus générales que nous allons maintenant développer.

Remarquons d'abord que les formules (6), (7), (11) et (12) doivent se réduire à des identités quand on développe leurs deux membres suivant les puissances de z.

Cela posé, soit Ω une opération fonctionnelle, *distributive* et *commutative avec une constante* ou, en d'autres termes, soit

$$\Omega . (aA + bB) = a\Omega A + b\Omega B,$$

où a, b désignent des constantes, A, B des fonctions de la variable x par rapport a laquelle l'opération est effectuée. On sait qu'on peut effectuer des calculs avec des polynômes en Ω, ayant des coefficients constants, exactement comme si les symboles Ω étaient des véritables quantités, pourvu que ces polynômes portent sur des fonctions de x.

Or on peut faire de plus. Soit A une fonction entière et rationnelle de x et soit Ω telle que ΩA est d'un degré moins élevée que A, et $\Omega a = 0$. Sous ces conditions on peut substituer Ω dans des séries entières et effectuer tous les calculs avec ces *opérateurs* comme si Ω était une quantité (suffisamment petite), les opérations portant sur une fonction A. Car dans ce cas on peut regarder les séries entières comme des polynômes de degrés fixes mais suffisamment élevés.

L'opération Δ, définie par l'équation $\Delta\varphi(x) = \varphi(x + 1) - \varphi(x)$ est une telle Ω, $\frac{d}{dx} = D_x$ est une autre.

De l'identité symbolique

$$\varphi(x + 1) = (1 + \Delta) \,.\, \varphi(x)$$

on déduit cette autre

$$\varphi(x + n) = (1 + \Delta)^n \,.\, \varphi(x)$$

ou, en développant, l'identité ordinaire

$$\varphi(x + n) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \Delta^\nu \varphi(x).$$

Dans le cas où $\varphi(x)$ est une fonction entière et rationnelle, ce que nous supposons dans la suite, nous pouvons écrire l'identité ci-dessus de la manière suivante

$$\varphi(x + n) = \sum_{\nu=0}^{p} \binom{n}{\nu} \Delta^\nu \varphi(x),$$

p étant le degré de $\varphi(x)$. Comme les deux membres sont des polynômes en n qui sont égaux pour $n = 1, 2, \ldots,$ nous pourrons remplacer n par une quantité quelconque α. De cette manière nous avons démontré la formule connue

$$\varphi(x + \alpha) = \sum_{\nu=0}^{p} \binom{\alpha}{\nu} \Delta^\nu \varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} \Delta^\nu \varphi(x)$$

ou en forme symbolique

$$\varphi(x + \alpha) = (1 + \Delta)^\alpha \,.\, \varphi(x).$$

En développant les deux membres d'après les puissances entières de α et en comparant les coefficients de α, ce qui est parfaitement rigoureux, on aura la formule symbolique

$$\varphi'(x) = D\varphi(x) = l(1 + \Delta) \,.\, \varphi(x).$$

Après ces préliminaires nous allons développer les relations mentionnées plus haut.

Substituons $l(1+\Delta)$ à z dans la formule (6), en laissant les deux membres se porter sur $\varphi(x)$, on trouve la formule symbolique

$$(1+\Delta)^{\alpha}\,.\,\varphi(x) = \sum_{\nu=0} \frac{\alpha(\alpha+\nu\beta)^{\nu-1}}{|\underline{\nu}} D^{\nu}(1+\Delta)^{-\nu\beta}\,.\,\varphi(x)$$

ou en forme ordinaire

$$\varphi(x+\alpha) = \sum_{\nu=0} \frac{\alpha(\alpha+\nu\beta)^{\nu-1}}{|\underline{\nu}} \varphi^{(\nu)}(x-\nu\beta).$$

C'est la formule d'Abel dans un des cas où elle est rigoureuse. Remarquons que nous avons omis le ∞ au-dessus de la signe de sommation pour indiquer que la série est finie et doit être continuée jusqu'à ce que les termes deviennent zéro.

Faisons maintenant la même substitution dans la formule (7), nous aurons

$$\frac{(1+\Delta)^{\alpha}}{1-\beta D}\,.\,\varphi(x) = \left((1+\Delta)^{\alpha} + \beta(1+\Delta)^{\alpha} D + \beta^2(1+\Delta)^{\alpha} D^2 + \ldots\right).\,\varphi(x)$$

$$= \sum_{\nu=0} \frac{(\alpha+\nu\beta)^{\nu}}{|\underline{\nu}} D^{\nu}(1+\Delta)^{-\nu\beta}\,.\,\varphi(x)$$

ou en forme ordinaire

$$(20)\qquad \varphi(x+\alpha) + \beta\varphi'(x+\alpha) + \beta^2\varphi''(x+\alpha) + \ldots = \sum_{\nu=0} \frac{(\alpha+\nu\beta)^{\nu}}{|\underline{\nu}} \varphi^{(\nu)}(x-\nu\beta).$$

La formule nouvelle que nous venons de démontrer peut du reste être déduite de la formule analogue d'Abel par un calcul facile.

Remplaçons, dans la formule (11), z par Δ, nous aurons

$$(1+\Delta)^{\alpha}\,.\,\varphi(x) = \sum_{\nu=0} \frac{\alpha}{\alpha+\nu\beta}\binom{\alpha+\nu\beta}{\nu} \Delta^{\nu}(1+\Delta)^{-\nu\beta}\,.\,\varphi(x)$$

ou

$$(21)\qquad \varphi(x+\alpha) = \sum_{\nu=0} \frac{\alpha}{\alpha+\nu\beta}\binom{\alpha+\nu\beta}{\nu} \Delta^{\nu}\varphi(x-\nu\beta)$$

formule d'interpolation très remarquable, qui n'a pas été signalée jusqu'ici que dans quelques cas très particuliers $\left(\beta = 1,\ \frac{1}{2},\ \text{etc.}\right)$.

De la formule (12) on déduit de la même manière

$$\frac{(1+\Delta)^\alpha}{1-\beta\frac{\Delta}{1+\Delta}}\cdot\varphi(x)=\left((1+\Delta)^\alpha+\beta\Delta(1+\Delta)^{\alpha-1}+\beta^2\Delta^2(1+\Delta)^{\alpha-2}+\ldots\right)\cdot\varphi(x)$$

$$=\frac{(1+\Delta)^{\alpha+1}}{1-(\beta-1)\Delta}\cdot\varphi(x)$$

$$=\left((1+\Delta)^{\alpha+1}+(\beta-1)\Delta(1+\Delta)^{\alpha+1}+(\beta-1)^2\Delta^2(1+\Delta)^{\alpha+1}+\ldots\right)\cdot\varphi(x)$$

$$=\sum_{\nu=0}\binom{\alpha+\nu\beta}{\nu}\Delta^\nu(1+\Delta)^{-\nu\beta}\cdot\varphi(x)$$

ou en forme ordinaire

$$(22)\begin{cases}\varphi(x+\alpha)+\beta\Delta\varphi(x+\alpha-1)+\beta^2\Delta^2\varphi(x+\alpha-2)+\ldots\\=\varphi(x+\alpha+1)+(\beta-1)\Delta\varphi(x+\alpha+1)+(\beta-1)^2\Delta^2\varphi(x+\alpha+1)+\ldots\\=\sum_{\nu=0}\binom{\alpha+\nu\beta}{\nu}\Delta^\nu\varphi(x-\nu\beta).\end{cases}$$

Signalons encore la formule

$$(23)\qquad \varphi'(x)=\sum_{\nu=1}\frac{1}{\nu}\binom{\nu\beta-1}{\nu-1}\Delta^\nu\varphi(x-\nu\beta),$$

qui se déduit de même de (13).

Les formules ci-dessus me semblent aussi remarquables.

On voit immédiatement que les identités précédemment données ne sont que des cas particuliers des formules générales que nous venons de démontrer. Peut-être reviendrons-nous un jour sur ces formules en examinant sous quelles conditions elles sont valables pour d'autres fonctions $\varphi(x)$ que des polynômes.

Remarques sur la convergence de la série (12). La recherche du rayon de convergence de la série entière $\sum\binom{\alpha+\nu\beta}{\nu}v^\nu$ tombe un peu en dehors des cadres de cette note. Comme les démonstrations sont assez longues je me contente d'énoncer les résultats qui ne me semblent pas dépourvus d'interêt.

Soit pour plus de simplicité $A_\nu = \binom{\alpha + \nu\beta}{\nu}$, où α, β sont des quantités complexes quelconques. Nous omettons pourtant les cas $\beta = 0, 1$ qui sont banales.

1°. $\beta - 1$ *n'est pas réelle et négative.* Le quotient $A_n : A_{n+1}$ tend, pour n infinie, vers une limite définie $\frac{(\beta - 1)^{\beta - 1}}{\beta^\beta}$, où les puissances ont leurs valeurs principales. Donc le rayon de convergence est égal à $\left|\frac{(\beta - 1)^{\beta - 1}}{\beta^\beta}\right|$, et le point singulier de la série le plus proche de zéro est égal à $v = \frac{(\beta - 1)^{\beta - 1}}{\beta^\beta}$ (d'après le théorème de M. Lecornu, précisé et démontré pour la première fois par M. Fabry).

2°. $\beta - 1$ *est réelle et négative.* Le quotient $A_n : A_{n+1}$ ne tend pas vers une limite. Si β est rationnelle le quotient oscille ente q limites différentes, q étant le dénominateur de β. Deux cas sont maintenant à distinguer.

a) β *est négative.* La limite de $\left|\frac{1}{\sqrt[n]{A_n}}\right|$, pour n infinie, existe et a la valeur $\frac{(-\beta)^{-\beta}}{(1 - \beta)^{1-\beta}}$, qui est le rayon de convergence.

b) β *est positive.* La limite ci-dessus n'existe pas. Le rayon de convergence est égal à $\underline{\lim}_{n=\infty} \left|\frac{1}{\sqrt[n]{A_n}}\right| = \frac{1}{\beta^\beta(1 - \beta)^{1-\beta}}$, où nous avons employé la notation de M. Pringsheim pour indiquer »la limite inférieure pour n infinie».

ÜBER ZWEI NACHGELASSENE ARBEITEN ABEL'S UND DIE SICH DARAN ANSCHLIESSENDEN UNTERSUCHUNGEN IN DER THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

L. FUCHS.[1]

I.

In zwei nachgelassenen Abhandlungen (t. II, N:o VIII und N:o IX der von Sylow und Lie besorgten Ausgabe der Abel'schen Werke von 1881) hat Abel die Sätze Legendre's über Vertauschung von Parameter und Argument bei den elliptischen Integralen dritter Gattung auf lineare Differentialgleichungen ausgedehnt.

Diese Arbeiten Abel's sind alsdann von Jacobi (Crelle Journal, B. 32, p. 185) durch eine abweichende Darstellung derselben in ein helles Licht gestellt worden.

Sind $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ganze rationale Functionen von x, so betrachtet Jacobi neben dem Differentialausdrucke

$$[y]_1 = A_0 y + A_1 y' + \ldots + A_n y^{(n)},$$

[1] Die Abhandlung, welche wir hier veröffentlichen, ist die letzte, welche aus der Hand des verewigten Verfassers stammt. Als die Abhandlung schon im Druck war, wurde der Verfasser am 26. April plötzlich auf der Strasse von der Krankheit betroffen, welche nach wenigen Minuten seinem ruhmreichen, der mathematischen Wissenschaft mit so grosser Hingabe und so seltenem Erfolg geweihten Leben ein Ende machte. Die Zeit und der Platz fehlen uns augenblicklich um eine angemessene Schilderung zu geben von der Stellung, welche Fuchs in der mathematischen Wissenschaft einnimmt, sowie von dem gewaltigen Einflusse, welchen er auf die Entwickelung der Mathematik in den letzten 37 Jahren, seit dem Erscheinen seiner berühmten Abhandlung *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen* ausgeübt hat. Eine solche Schilderung wird jedoch, wie wir erfahren, nicht lange ausbleiben. *Die Redaktion.*

wo die oberen Accente Ableitungen nach x bedeuten, den Differentialausdruck

$$[y]_2 = -A_0 y + D_x(A_1 y) - D_x^2(A_2 y) + \ldots \pm D_x^n(A_n y)$$
$$= B_0 y + B_1 y' + \ldots + B_n y^{(n)}$$

welchen wir jetzt als den zu $[y]_1$ *adjungirten* [1] bezeichnen. Da nach Lagrange $z[y]_1 + y[z]_2$ für willkürliche Functionen y, z ein vollständiger Differentialquotient ist, so setzt Jacobi

$$\int \{z[y]_1 + y[z]_2\} dx = [y, z].$$

Wenn die unabhängige Variable x in $[y]_1$, $[y]_2$, $[y, z]$ mit einer unabhängigen Variablen α vertauscht wird, so sollen diese Ausdrücke mit $[y]_1^{(\alpha)}$, $[y]_2^{(\alpha)}$, $[y, z]^{(\alpha)}$, und im Gegensatze hierzu die ursprünglichen auf x bezüglichen Ausdrücke mit $[y]_1^{(x)}$, $[y]_2^{(x)}$, $[y, z]^{(x)}$ bezeichnet werden.

Sei $\mathfrak{A}_k$ dieselbe Function von α wie A_k von x und

$$\frac{A_k - \mathfrak{A}_k}{x - \alpha} = P_k,$$

so ist

$$U = -P_0 + \frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \ldots \pm \frac{\partial^n P_n}{\partial x^n}$$

eine ganze rationale Function von x und α,

$$\text{(A)} \qquad U = \sum C_{mp} \alpha^m x^p,$$

wo C_{mp} den Coefficienten von x^p in $[x^{-m-1}]_2$ bedeutet. Jacobi findet nun die Beziehung

$$\left[\frac{1}{x - \alpha}\right]_1^{(\alpha)} + \left[\frac{1}{x - \alpha}\right]_2^{(x)} = U,$$

aus welcher er die andere ableitet:

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[y, \frac{\mathfrak{z}}{x - \alpha}\right]^{(x)} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{y}{\alpha - x}, \mathfrak{z}\right]^{(\alpha)} = U y \mathfrak{z},$$

wo y eine Lösung der Gleichung $[y]_1^{(x)} = 0$, $\mathfrak{z}$ eine Lösung der Gleichung $[\mathfrak{z}]_2^{(\alpha)} = 0$ bedeutet.

Ist $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein linear unabhängiges System von Lösungen der Gleichung $[y]_1 = 0$, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ebenso ein linear unabhängiges System

[1] Vergl. Crelle Journ. B. 76, p. 183.

von Lösungen der adjungirten Gleichung $[z]_2 = 0$, die beiden Systeme so gewählt, dass $[y_i , z_i] = 1$, $[y_i , z_k] = 0$ für $i \neq k$, so folgt aus den Gleichungen

$$[y_k , z] = r_k \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

für eine beliebige Function z

$$(1) \qquad z^{(\lambda)} = z_1^{(\lambda)} r_1 + z_2^{(\lambda)} r_2 + \ldots + z_n^{(\lambda)} r_n \qquad (\lambda=0,1,\ldots,n-1)$$

und ebenso aus den Gleichungen

$$[y , z_k] = s_k \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

für eine beliebige Function y

$$(2) \qquad y^{(\lambda)} = y_1^{(\lambda)} s_1 + y_2^{(\lambda)} s_2 + \ldots + y_n^{(\lambda)} s_n .$$

Setzt man mit JACOBI in r_i für z

$$z = \int \frac{\mathfrak{z}\,d\alpha}{x - \alpha},$$

wo $\mathfrak{z}$ eine Lösung der Gleichung $[\mathfrak{z}]_2^{(\alpha)} = 0$ bedeutet, so folgt unter Anwendung der Gleichungen (B), (1), (2) das Resultat:

$$(C) \qquad \Pi(k) \cdot \sum_1^n{}_\lambda\, z_\lambda^{(i)} \int \frac{y_\lambda\,dx}{(x-\alpha)^{k+1}} - \Pi(i) \sum_1^n{}_\lambda\, \mathfrak{y}_\lambda^{(k)} \int \frac{\mathfrak{z}_\lambda\,d\alpha}{(\alpha - x)^{i+1}}$$

$$= \sum C_{mp} \mathfrak{y}_g^{(k)} z_h^{(i)} \int \alpha^m \mathfrak{z}_g\,d\alpha \int x^p y_h\,dx ,$$

wo $\mathfrak{y}_\lambda , \mathfrak{z}_\lambda$ resp. dieselben Functionen von α sind wie y_λ , z_λ von x, und wo die Summation auf der rechten Seite sich auf $g = 1 , 2 , \ldots , n$; $h = 1 , 2 , \ldots , n$ und auf dieselben Combinationen von m , p wie in Gleichung (A) bezieht.

Für $i = 0 , 1 , \ldots , n - 1$, $k = 0 , 1 , \ldots , n - 1$ stellt (C) n^2 Gleichungen dar, welche gestatten die n^2 Grössen $\int \frac{y_i\,dx}{(x-\alpha)^{k+1}}$ linear durch die n^2 Grössen $\int \frac{\mathfrak{z}_i\,d\alpha}{(\alpha - x)^{k+1}}$ und umgekehrt auszudrücken.

Sie liefern die vollständige Lösung des Problems, welches sich ABEL in der N:o IX der bezeichneten Abhandlungen gestellt hatte.

II.

N:o 1.

Am Schlusse seiner Abhandlung (Crelle Journal, B. 32, p. 196) sagt JACOBI: »Um das aufgestellte Theorem in ein vollständiges Licht zu setzen, und insbesondere die Anfangsgrenzen der Integrale zu bestimmen, und die nothwendigen Beschränkungen des Theorems anzugeben, ist es nöthig, den Character der Lösungen der linearen Differentialgleichungen, deren Coefficienten ganze rationale Functionen der Variablen sind, näher zu ergründen, wofür, wenn man die zweite Ordnung überschreitet, noch wenig von den Mathematikern geschehen ist.»

Nachdem mir die Resultate meiner Untersuchungen über die Natur dieser Functionen die Mittel hierzu gewährt hatten, unternahm ich es die ABEL-JACOBI'schen Theoreme zu präcisiren. Es gelang mir gleichzeitig, auf diese präcisirte Formulirung mich stützend, Consequenzen dieser Theoreme von wie es scheint weittragender Bedeutung zu ziehen. Die Resultate dieser Untersuchung habe ich im Crelleschen Journal, B. 76, p. 177, ff. unter dem Titel »über Relationen, welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden» veröffentlicht.

In dieser Arbeit beschränken wir uns auf Differentialgleichungen der Klasse, welche ich in meiner Arbeit (Crelle Journal, B. 66, p. 146, Gl. 12) dahin characterisirt hatte, dass in den zur Umgebung jedes der singulären Punkte gehörigen Entwickelungen nicht unendlich viele negative Potenzen auftreten, welche also für jeden singulären Punkt eine determinirende Fundamentalgleichung aufweisen.

Nachdem nachgewiesen ist, dass die adjungirte Differentialgleichung jeder Gleichung dieser Klasse ebenfalls zu derselben Klasse gehört und dieselben singulären Punkte besitzt, werden die Beziehungen erörtert, welche zwischen den zu demselben singulären Punkte gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichungen und ihrer adjungirten stattfinden.

Es wird die Differentialgleichung jener besonderen Klasse in die Form gesetzt:

$$\text{(D)} \qquad [y]_1^{(x)} = \sum_0^n {}_{\mathfrak{a}} F_{(n-\mathfrak{a})(\rho-1)}(x) \,.\, F(x)^{\mathfrak{a}} \,.\, y^{(\mathfrak{a})} = 0\,,$$

wo $F_k(x)$ eine ganze rationale Function k^{ten} Grades bedeutet, und

$$F(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_\rho)$$

ist.

Nun wird nachgewiesen, dass bei vorgeschriebenen singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ die Coefficienten der Functionen $F_{(n-\mathfrak{a})(\rho-1)}(x)$ so gewählt werden können, dass die Wurzeln der zu jedem a_k gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Gleichung (D) von einander verschieden und ihre realen Theile negativ und absolut kleiner als Eins sind; was zur Folge hat, dass auch für die zu (D) adjungirte Differentialgleichung

$$\text{(E)} \qquad [z]_2^{(x)} = \sum_0^n {}_{\mathfrak{a}} (-1)^{\mathfrak{a}-1} D_x^{(\mathfrak{a})} [F_{(n-\mathfrak{a})(\rho-1)}(x) F(x)^{\mathfrak{a}} z] = 0$$

die Wurzeln der zu jedem a_k gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung die nämliche Eigenschaft haben. Die Coefficienten können aber so gewählt werden, dass gleichzeitig die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung für jede der Gleichungen (D) und (E) von einander verschieden und in ihren realen Theilen positiv und grösser als Eins werden.

Von der Differentialgleichung (D) wird in der Fortsetzung der Arbeit vorausgesetzt, dass die Wurzeln der zu jedem a_k gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von einander verschieden, und in ihren realen Theilen negativ und absolut kleiner als Eins sind, während für $x = \infty$ nur gefordert wird, dass die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung von einander verschieden seien. Nach den daselbst angestellten Erörterungen hat alsdann die zu (D) adjungirte Gleichung (E) dieselbe Eigenschaft.

N:o 2.

Wir setzen (p. 178 der Arbeit), um die durch die Integration in $[y, z]$ eingeführte Constante zu fixiren,

$$(1) \qquad [y,z] = \sum_0^n {}_\lambda H_\lambda ,$$

$$(2) \qquad H_\lambda = \sum_0^{\lambda-1} {}_\alpha (-1)^\alpha y^{(\lambda-\alpha-1)} D_x^\alpha (A_\lambda z) = \sum_0^{\lambda-1} {}_\alpha (-1)^\alpha z^{(\lambda-\alpha-1)} D_x^\alpha (B_\lambda y).$$

Wenn nun nach Gleichung (D)

$$(3) \qquad A_k = F_{(n-k)(\rho-1)}(x) \, . \, F(x)^k$$

gewählt wird, so wird unter den am Schlusse der N:o 1. erwähnten Voraussetzungen nachgewiesen, dass:

$$(4) \qquad \left[y, \frac{1}{x-\alpha} \right]_{x=a}^{(x)} = 0,$$

wenn y eine Lösung der Gleichung (D), a einer der singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$, und α von a verschieden ist.

Setzt man in Gleichung (E) α an die Stelle der Variablen x, und bezeichnet dann eine Lösung derselben mit $\mathfrak{z}$, so folgt ebenso

$$(5) \qquad \left[\frac{1}{x-\alpha}, \mathfrak{z} \right]_{\alpha=a}^{(\alpha)} = 0,$$

wenn x von a verschieden ist.

Es werde nunmehr die x Ebene durch einen zusammenhangenden sich selbst nirgendwo schneidenden Linienzug $\mathfrak{S}$ zerschnitten, der die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ in sich aufnimmt, der aber auch durch $a_0 = \infty$ hindurchgeht, wenn die realen Theile der Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung grösser als Eins sind. Es möge l_μ den Theil des Schnittes $\mathfrak{S}$ bezeichnen, welcher in einer ein für allemal festgesetzten Richtung von a_μ nach $a_{\mu+1}$ führt. Wenn α an die Stelle der

Variablen x gesetzt wird, so soll die α Ebene durch einen mit $\mathfrak{S}$ sich deckenden Linienzug zerschnitten werden.

Es wird jetzt, unter Beibehaltung der in (3) festgelegten Bedeutung von A_k, von der Abel-Jacobi'schen Gleichung (B) ausgegangen, in welcher mit y eine Lösung der Gleichung (D), mit $\mathfrak{z}$ eine Lösung der Gleichung (E) (nach Vertauschung der Variablen x mit α) bezeichnet wird. Wird diese Gleichung in Bezug auf x längs l_μ von a_μ bis $a_{\mu+1}$, und in Bezug auf α längs l_ν von a_ν bis $a_{\nu+1}$ integrirt, wobei vorausgezetzt wird, dass die Theile l_μ und l_ν nicht zusammenstossen, so erhält die linke Seite nach den Gleichungen (4) und (5) den Werth Null, es ist also

$$\text{(F)} \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} d\alpha\, U y \mathfrak{z} = 0$$

(l. c. p. 188, Gl. 4; p. 206, Gl. T.).

Erheblichere Schwierigkeiten stellten sich in den Weg, als wir die Gleichung (B) in Bezug auf x und in Bezug auf α resp. längs zweier auf einander folgender Theile l_μ, $l_{\mu+1}$ zu integriren unternahmen. Es würde mich zu weit führen, wenn ich die Hülfsmittel, welche wir (l. c. p. 189—206) aus einem tieferen Eindringen in die Natur der Lösungen der linearen Differentialgleichungen schöpfen mussten, hier skizziren wollte. Ich muss mich daher benügen, das l. c. p. 206 erhaltene Resultat hier nur zu beschreiben:

Wir bezeichnen mit $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ das zu $x = \infty$ gehörige kanonische Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (D), mit $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ das zu $x = \infty$ gehörige kanonische Fundamentalsystem der adjungirten Gleichung (E), welche so gewählt sind, dass η_k, ζ_k adjungirte Elemente bedeuten (l. c. p. 183). Ferner bedeuten $\eta_{1\mu}, \eta_{2\mu}, \ldots, \eta_{n\mu}$ das zum singulären Punkte $a_{\mu+1}$ gehörige kanonische Fundamentalsystem der Gleichung (D), $\zeta_{1\mu}, \zeta_{2\mu}, \ldots, \zeta_{n\mu}$ das zu demselben singulären Punkte gehörige kanonische Fundamentalsystem von Lösungen der adjungirten Gleichung (E), welche wieder so gewählt sind, dass $\eta_{k\mu}$ und $\zeta_{k\mu}$ adjungirte Elemente bedeuten. (Vergleiche die Definition des zu einem singulären Punkte gehörigen Fundamentalsystems in meinen Arbeiten, Crelle Journal, B. 66, p. 139 und B. 68, p. 364).

Zwischen diesen Systemen finden die Gleichungen

$$(6)\qquad \left|\begin{aligned} \eta_k &= \sum_1^n{}_\lambda\, b_{k\lambda}\,\eta_{\lambda\mu}\,, \\[2ex] \zeta_k &= \sum_1^n{}_\lambda\, c_{k\lambda}\,\zeta_{\lambda\mu} \end{aligned}\right.$$

statt, wo $b_{k\lambda}$, $c_{k\lambda}$ Constanten sind, für deren Berechnung in meiner Arbeit (Crelle Journal, B. 75, p. 210) ein Weg angegeben worden.

Sind $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Wurzeln der zu $a_{\mu+1}$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Gleichung (D)

$$(7)\qquad D(r) = 0,$$

so ist

$$(8)\qquad \left|\begin{aligned} \eta_{\lambda\mu} &= (x - a_{\mu+1})^{r_\lambda}\,.\,\varphi_\lambda(x)\,, \\ \zeta_{\lambda\mu} &= (x - a_{\mu+1})^{-1-r_\lambda}\,.\,\psi_\lambda(x) \end{aligned}\right.$$

wo $\varphi_\lambda(x)$, $\psi_\lambda(x)$ in der Umgebung von $x = a_{\mu+1}$ holomorph und für $x = a_{\mu+1}$ von Null verschieden sind.

Es zeigt sich, dass

$$(9)\qquad [\eta_{\lambda\mu}\,,\,\zeta_{\lambda\mu}] = \varphi_\lambda(a_{\mu+1})\,\psi_\lambda(a_{\mu+1})\,.\,D'(r_\lambda),$$

wo $D'(r)$ die Ableitung von $D(r)$ nach r bedeutet.

Die in $\varphi_\lambda(x)$, $\psi_\lambda(x)$ auftretenden willkürlichen Factoren werden nun so gewählt, dass die rechte Seite der Gleichung (9) den Werth Eins annimmt, so dass

$$(10)\qquad [\eta_{\lambda\mu}\,,\,\zeta_{\lambda\mu}] = 1\,.$$

In gleicher Weise lassen sich die unbestimmten Factoren von η_k, ζ_k so bestimmen, dass

$$(10^a)\qquad [\eta_k\,,\,\zeta_k] = 1\,.$$

Zwischen den Grössen c_{ik}, und b_{ik} finden die Gleichungen statt

$$(11)\qquad \begin{aligned} &\sum_1^n{}_i\, b_{\lambda i}\, c_{\mu i} = 0 \qquad \left.\begin{matrix}\lambda\\ \mu\end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots n, \quad \lambda \mp \mu, \\[2ex] &\sum_1^n{}_i\, b_{\lambda i}\, c_{\lambda i} = 1\,. \end{aligned}$$

Nach diesen Erörterungen und Festsetzungen wird das folgende Resultat erschlossen:

$$\text{(G)} \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} d\alpha\, U \eta_k \mathfrak{z}_l = (-1)^n \pi \sum_{\alpha}^{1 \ldots n} \frac{b_{k\alpha} c_{l\alpha} e^{-\pi i r_\alpha}}{\sin \pi r_\alpha}$$

wo $\mathfrak{z}_l$ dieselbe Function von α ist wie z_l von x, l. c. p. 206.

III.

N:o 1.

Der wahre Sinn und die Wichtigkeit der in den Gleichungen (F), (G) auftretenden Resultate wird in ein helleres Licht gesetzt durch eine Arbeit, welche ich später in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie (22 December 1892, p. 1113) veröffentlicht habe.

In dieser Arbeit wird auf die Rolle hingewiesen, welche die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen der Lösungen der Differentialgleichung in jenen Relationen (F), (G) spielen. Zu diesem Ende ist nur eine etwas veränderte Schreibweise der rechten Seite der Gleichung (G) erforderlich. Durch diese Schreibweise tritt der Umstand besonders hervor, dass die rechte Seite lediglich von den Coefficienten der auf $a_{\mu+1}$ bezüglichen Fundamentalsubstitution der Lösungen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ abhängt. Dieser Umstand aber bringt es mit sich, dass die Relationen (F), (G) einen *invarianten* Character haben, in dem Sinne, dass sie für die gesammte Klasse von Differentialgleichungen, zu welcher eine vorgelegte Differentialgleichung gehört, die gleiche Form behalten. Diese Invarianz macht es möglich, gewisse beschränkende Voraussetzungen, welche in der Arbeit (Crelle Journ. B. 76, p. 177 ff.) über die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen gemacht worden sind, aufzuheben. Dieses wird in der in Rede stehenden Arbeit nachgewiesen; es wird nur, um Complicationen in der Darstellung zu vermeiden, die Voraussetzung gemacht, dass die Differenzen zweier jener Wurzeln, wenn sie nicht sämmtlich ganzzahlig sind aber zum Auftreten von Logarithmen keine Veranlassung geben, nicht zum Theil ganzzahlig sein sollen.

Sei

$$F(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\rho)(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_\sigma)$$

und

$$(1) \qquad (\mathrm{D}) \qquad [y]_1^{(x)} = \sum_0^n {}_\alpha\, F_{(n-\alpha)(\tau-1)}(x)\, F(x)^\alpha y^{(\alpha)} = 0\,,$$

$$(2) \qquad (\bar{\mathrm{E}}) \qquad [z]_2^{(x)} = \sum_0^n {}_\alpha\, (-1)^{\alpha-1} D_x^\alpha \big(F_{(n-\alpha)(\tau-1)}(x)\, F(x)^\alpha z\big) = 0\,,$$

$$\tau = \rho + \sigma\,,$$

wo $b_1, b_2, \dots, b_\sigma$ diejenigen singulären Punkte bedeuten, bei deren Umkreisung sämmtliche Integralquotienten ungeändert bleiben, während mit $a_1, a_2, \dots, a_\rho$ diejenigen singulären Punkte bezeichnet werden, für welche die Differenzen der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen nicht ganze Zahlen sind.

Es werden nun vorläufig noch die Voraussetzungen der Abhandlung (Crelle Journ. B. 76) festgehalten, dass die Wurzeln der zu $a_1, a_2, \dots, a_\rho$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen in ihren realen Theilen negativ und absolut kleiner als Eins sind, und, um die oben erwähnte veränderte Schreibweise der rechten Seite der Gl. (G) zu erzielen, die Substitution

$$(b_{ik}) \quad \text{(s. II, N:o 2, Gl. (6))}$$

mit B, die Substitution

$$\begin{pmatrix} \lambda_1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & \lambda_2, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & \dots, & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_\alpha = e^{2\pi i r_\alpha}\,,$$

($r_1, r_2, \dots, r_n$ die Wurzeln der zu $a_{\mu+1}$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung) mit L bezeichnet; dann ist

$$S_\mu = (g_{ik}) = B\,L\,B^{-1}$$

die dem Umlaufe um $a_{\mu+1}$ angehörige Fundamentalsubstitution. Setzt man die Determinante

$$|b_{ik}| = \Delta \quad \text{und} \quad B_{kl} = \frac{\partial \Delta}{\partial b_{kl}}\,,$$

so ist nach Gl. (11) in II, N:o 2.

$$c = \frac{B}{\Delta}\,.$$

Alsdann ergiebt sich aus Gl. (G)

$$\text{(G')} \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} d\alpha\, U\eta_{k}\zeta_{l} = (-1)^n . 2\pi i \sum_{0}^{n}{}_{\alpha} \frac{A_\alpha^{(k,l)}}{\lambda_\alpha - 1},$$

wenn wir

$$A_\alpha^{(k,l)} = \frac{b_{k\alpha} B_{l\alpha}}{\Delta} \qquad \left(\begin{matrix} k = 1, 2, \ldots, n \\ l = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}\right)$$

setzen.

(Vergl. Sitzungsberichte l. c. p. 1117 Gl. (S')).

Die rechten Seiten der Gleichungen (G') sind lediglich durch die auf $a_{\mu+1}$ bezügliche Fundamentalsubstitution des Fundamentalsystems $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ bestimmt. Diese Gleichungen repräsentiren n^2 Gleichungen für die n^2 Coefficienten g_{ik} dieser Fundamentalsubstitution.

N:o 2.

Wir können zunächst durch eine Substitution

$$\text{(1)} \qquad y = (x - a_1)^{-\alpha_1}(x - a_2)^{-\alpha_2} \ldots (x - a_\rho)^{-\alpha_\rho} w,$$

wo die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho$ Null oder positive ganze Zahlen bedeuten, die Gleichung $(\overline{\mathrm{D}})$ in eine Gleichung

$$\text{(2)} \qquad B_0 w + B_1 w' + \ldots + B_n w^{(n)} = 0$$

verwandeln, für welche die zu $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen in ihren realen Theilen positiv sind.

Ist $m_\alpha - 1$ die höchste ganze Zahl, welche in den realen Theilen der Wurzeln der zu a_α gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Gleichung (2) enthalten ist, so werde

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \Pi(x) = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \ldots (x - a_\rho)^{m_\rho}, \\ \psi(x) = (x - a_1)\ (x - a_2)\ \ldots (x - a_\rho) \end{cases}$$

gesetzt. Wir beweisen nun, dass man n ganze rationale Functionen $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ derart bestimmen kann, dass, wenn

$$\text{(4)} \qquad P_k(x) = \frac{\varphi_k(x)\,\psi(x)^k}{\Pi(x)}$$

und

$$u = P_0(x)w + P_1(x)w' + \ldots + P_{n-1}(x)w^{(n-1)} \tag{5}$$

gesetzt wird, die Differentialgleichung, welcher u genügt,

$$C_0 u + C_1 u' + \ldots + C_n u^{(n)} = 0\,, \tag{6}$$

überhaupt dieselben singulären Punkte wie (2) besitzt, und dass die realen Theile der Wurzeln der auf $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ bezüglichen determinirenden Fundamentalgleichungen von (6) zwischen Null und der negativen Einheit sich befinden.

Die Gleichung (6) gehört zu derselben Klasse mit der Gleichung $(\bar{\mathrm{D}})$, daher sind die Fundamentalsubstitutionen zu je einem singulären Punkte für beide Gleichungen übereinstimmend.

Hieraus fliesst das folgende Resultat:

Wenn die Gleichung $(\bar{\mathrm{D}})$ in Bezug auf die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen nicht den Voraussetzungen entspricht auf Grund deren die Gleichung (G′) aufgebaut worden ist, so kann durch rationale Rechnungsoperationen eine mit $(\bar{\mathrm{D}})$ zu derselben Klasse gehörige Differentialgleichung, wie Gleichung (6), hergeleitet werden, welche den genannten Voraussetzungen Genüge leistet. Man hat alsdann in der linken Seite der Gleichung (G′) nur für $\eta_k, \mathfrak{z}_k, U$ die auf die Gleichung (6) bezüglichen entsprechenden Functionen zu substituiren, während die rechten Seiten ungeändert bleiben. Die so erhaltenen n^2 Gleichungen (G′) liefern alsdann die Coefficienten g_{ik} der zu $a_{\mu+1}$ gehörigen Fundamentalsubstitution der Gleichung $(\bar{\mathrm{D}})$.

N:o 3.

In derselben Arbeit werden alsdann noch die Relationen discutirt, welche durch die Gleichungen (F) und (G′) zwischen den bestimmten Integralen

$$I_{kl}^{(\mu)} = \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} x^l \eta_k dx\,, \qquad H_{kl}^{(\mu)} = \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} x^l \zeta_k dx$$

und den Coefficienten der zu $a_{\mu+1}$ gehörigen Fundamentalsubstitutionen festgestellt sind. Wir heben daraus das Ergebniss hervor: Sämmtliche

Grössen $I_{kl}^{(n)}$ lassen sich durch $I_{k0}^{(n)}, I_{k1}^{(n)}, \ldots, I_{k,n(\tau-1)-1}^{(n)}$ und sämmtliche Grössen $II_{kl}^{(n)}$ durch $II_{k0}^{(n)}, II_{k1}^{(n)}, \ldots, II_{k,n(\tau-1)-1}^{(n)}$ linear und homogen darstellen.

Zum Beschluss wird noch die Rechnung für $n = 1$ und $n = 2$ durchgeführt.

IV.

Wir erwähnen hier noch die sich an die vorhergehenden Untersuchungen anschliessenden Arbeiten der Herren SCHLESINGER und HIRSCH.

Auf den Zusammenhang, der zwischen dem Vertauschungssatze und der Integration linearer Differentialgleichungen durch Quadraturen (bestimmte Integrale) besteht, hat Herr SCHLESINGER (Crelle Journ. B. 116, p. 97 ff. und Handbuch B. II[I], 1897, p. 405 ff.) hingewiesen. Bedeutetet $D_x(y)$ einen linearen homogenen Differentialausdruck n^t-Ordnung mit der unabhängigen Variablen x und Coefficienten, die ganze rationale Functionen m^t-Grades sind, so zeigt sich, dass der ABEL'sche Vertauschungssatz als specieller Fall ($\xi = 0$) in der allgemeinen Identität (Gl. (C), l. c. p. 102).

$$D_x((z-x)^{\xi-1}) = \mathfrak{D}_z((z-x)^{\xi+m-1})$$

enthalten ist, wo $\mathfrak{D}_z$ einen linearen Differentialausdruck $(m+n)^t$-Ordnung mit der unabhängigen Variablen z darstellt, dessen Coefficienten sich aus denen von D_x (und umgekehrt) in einfacher Weise zusammensetzen lassen (Gl. (2), (3), l. c. p. 102, 103).

Die Lösungen von $D_x(y) = 0$ lassen sich auf Grund der angegebenen Identität, durch die Lösungen v der zu $\mathfrak{D}_z = 0$ adjungirten Differentialgleichung (der EULER'schen Transformirten von $D_x = 0$) in der Form

$$y = \int_L v(z-x)^{\xi-1} dz,$$

und umgekehrt die Lösungen von $\mathfrak{D}_z(u) = 0$ durch die Lösungen w der zu $D_x = 0$ adjungirten Differentialgleichung, in der Form

$$u = \int_A w(z-x)^{\xi-1} dx$$

darstellen, wo L, A geeignet gewählte geschlossene Integrationswege bedeuten.

Herr Hirsch behandelt (Mathem. Annalen, B. 54, p. 202 ff.) die von mir in den obenerwähnten Arbeiten aufgestellten Relationen (Periodenrelationen), nachdem er (Mathem. Annalen, B. 52, p. 130 ff.) den Fall $n = 1$ vorweg genommen, indem er 1) mit Benutzung der erwähnten Schlesinger'schen Arbeit diese Relationen in der von mir gegebenen Form aus dem Vertauschungssatze herleitet (Math. Annalen, B. 54, II[t] Abschnitt, p. 249—275), und dann 2) eine andere — der ersten algebraisch aequivalente — Form dieser Relationen angiebt, die, in Nachbildung der von Riemann für die analoge Frage der Theorie der Abel'schen Integrale angewendeten Methode, durch die Auswerthung eines gewissen Randintegrals erzielt wird (l. c. § 15—17, p. 276—295). Unter der Voraussetzung, dass die Monodromiegruppe der betrachteten Differentialgleichung eine *definite* Hermite'sche Form in sich selbst transformirt, liefert dieselbe Methode der Randintegration eine Ungleichung für die realen und imaginären Bestandtheile der gedachten Integrale (in dem eine aus diesen Integralen gebildete Hermite'sche Form sich als stets positiv definit erweist), die der von Riemann für die Periodicitätsmoduln der Abel'schen Integrale aufgestellten Ungleichung analog ist (l. c. § 18, p. 295—313; § 20, p. 316—322).

Berlin, 15. März 1902.

ÜBER PERIODISCHE APPROXIMATIONEN ALGEBRAISCHER ZAHLEN

VON

HERMANN MINKOWSKI

IN ZÜRICH.

ABEL sagt an einer Stelle (Oeuvres, t. II, p. 217) mit Bezug auf das Problem der algebraischen Auflösung der Gleichungen: »Au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle existe ou non, il faut demander si une telle relation est en effet possible». Eben diese Weisung befolgend, können wir auch einer anderen, noch unerledigten Aufgabe auf dem mannigfaltigen Gebiete der Auflösung der Gleichungen näherzutreten versuchen. Wir wollen hier die Frage behandeln:

Welche algebraische Zahlen besitzen analoge periodische Approximationen, wie sie die reellen algebraischen Zahlen zweiten Grades vermöge der Periodicität ihrer Entwicklungen in gewöhnliche Kettenbrüche aufweisen.

§ 1. *Periodische Substitutionenketten.*

1. Es sei α eine beliebige Grösse und es werde $l = 1$ oder $= 2$ gesetzt, je nachdem α reell oder complex ist. Wenn α eine *algebraische Zahl n^{ten} Grades,* d. h. eine Wurzel einer im Bereiche der rationalen Zahlen irreducibeln Gleichung n^{ten} Grades ist, so kann der Ausdruck

$$\xi = x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha^{n-1} x_n$$

für ganze rationale Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$, die nicht sämmtlich Null sind, niemals verschwinden, aber, wofern $n > l$ ist, wohl dem Werthe Null beliebig nahe kommen. Wir machen hier stets die Annahme $n > l$. Über

die Annäherungen dieser Form ξ an Null gelten dann, wie ich in dem Aufsatze »*Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen*« (Göttinger Nachrichten v. 11. Febr. 1899) gezeigt habe, die folgenden Sätze:

Wir können zur Zahl α in Bezug auf jede beliebige reelle Grösse $r \geqq 1$ stets eine Substitution

$$\text{S)} \qquad x_h = s_h^{(1)} y_1 + s_h^{(2)} y_2 + \ldots + s_h^{(n)} y_n \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots n)}$$

mit folgenden Eigenschaften construiren:

1° *Alle Coefficienten $s_h^{(k)}$ sind ganze rationale Zahlen, und gehen die Quotienten $\frac{s_h^{(k)}}{r}$ dem Betrage nach nicht über eine gewisse, von r unabhängige Grösse hinaus.*

2° *Die Determinante von S ist $\neq 0$ und liegt dem Betrage nach unter einer gewissen, von r nicht abhängigen Grenze.*

3° *Geht ξ durch S in*

$$\varphi = \rho_1 y_1 + \rho_2 y_2 + \ldots + \rho_n y_n$$

über, so liegen die Beträge von

$$\rho_1 r^{\frac{n-l}{l}}, \rho_2 r^{\frac{n-l}{l}}, \ldots \rho_n r^{\frac{n-l}{l}}$$

sämmtlich unter einer gewissen, von r nicht abhängigen Grenze.

4° *Für die Verhältnisse $\rho_1 : \rho_2 : \ldots : \rho_n$ kommen von vorn herein nur eine endliche Anzahl verschiedener Systeme in Betracht, die von r nicht abhängen.*

Diesen Bedingungen wird z. B., wie in jener Arbeit ausgeführt ist, stets genügt, wenn wir S unter allen denjenigen Substitutionen, für welche die Coefficienten $s_h^{(k)}$ lauter Zahlen aus der Reihe $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm [r]$ sind und die Determinante $\neq 0$ ist, derart auswählen, dass dabei zunächst $|\rho_1|$, nächstdem $|\rho_2|, \ldots$ endlich $|\rho_n|$ möglichst klein werden. Dabei fällt dann die Determinante von S dem Betrage nach sicher stets $\leq \underline{|n}$ aus.

Durch die Substitution S erlangen wir zugleich gewisse rationale Approximationen für alle Zahlen des Körpers von α, wenn α reell ist, bez., wenn α complex ist, für alle reellen Zahlen des Körpers, der aus dem Körper von α und dem dazu conjugirt imaginären Körper zusammengesetzt ist.

Umgekehrt gilt der Satz: *Die Grösse* α *ist,* ($n > l$ *angenommen*), *nothwendig eine algebraische Zahl* n^{ten} *Grades, wenn für sie in Bezug auf jede reelle Grösse* $r \geqq 1$ *stets eine den Bedingungen* 1°, 2°, 3°, 4° *entsprechende Substitution* S *hergestellt werden kann.*

2. Wir denken uns weiterhin α stets als eine algebraische Zahl n^{ten} Grades und $n > l$. Nehmen wir nun eine unbegrenzte Reihe wachsender Zahlen $r_1 \geqq 1, r_2, r_3, \ldots$ an und construiren wir in der eben erörterten Weise zu diesen Zahlen Substitutionen $S_1, S_2, S_3, \ldots$. *Eine derartige Substitutionenkette für die Zahl* α *soll periodisch heissen, wenn die daraus vermöge der Compositionsformeln*

$$S_2 = S_1 Q_1, \qquad S_3 = S_2 Q_2, \quad \ldots \quad S_{j+1} = S_j Q_j, \quad \ldots$$

hergeleitete Reihe von Substitutionen $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots,$ *abgesehen von einer endlichen Anzahl von Gliedern am Anfange, in periodischer Wiederholung ein und derselben endlichen Folge von Substitutionen besteht,* wenn also ein Index j_0 und eine positive Zahl p_0 angebbar sind, sodass für jeden beliebigen Index $j \geqq j_0$ stets $Q_j = Q_{j+p_0}$ ist.

Wir fragen nach dem Charakter derjenigen algebraischen Zahlen α, *für welche periodische Substitutionenketten existiren.*

3. Ist die Kette $S_1, S_2, S_3, \ldots$ für α periodisch, so erhalten wir mit den soeben eingeführten Bezeichnungen

$$Q_j = S_j^{-1} S_{j+1}; \qquad S_j^{-1} S_{j+1} = S_{j+p_0}^{-1} S_{j+p_0+1}, \; j \geqq j_0,$$

also

$$S_{j+p_0} S_j^{-1} = S_{j+p_0+1} S_{j+1}^{-1},$$

wenn $j \geqq j_0$ ist. Setzen wir $S_{j_0+p_0} S_{j_0}^{-1} = P_0$, so folgt daraus allgemein

$$S_{j+p_0} = P_0 S_j, \qquad S_{j+fp_0} = P_0^f S_j$$

für jeden Index $j \geqq j_0$ und jeden Exponenten $f = 1, 2, 3, \ldots$.

Es bedeute φ_j die Linearform, in welche ξ durch S_j übergeht. Unter den unendlich vielen Substitutionen $S_{j_0+fp_0}$ für $f = 0, 1, 2, \ldots$ werden wir, da nach 2° für ihre Determinanten und weiter nach 4° für die Verhält-

nisse der Coefficienten $\rho_1 : \rho_2 : \ldots : \rho_n$ in den zugehörigen Formen $\varphi_{j_0+f p_0}$ nur eine endliche Anzahl von Werthsystemen in Betracht kommen, jedenfalls irgend zwei Substitutionen $S_{j_0+c p_0} = S$ und $S_{j_0+d p_0} = T$ $(d > c)$ in solcher Weise auffinden können, *dass erstens* $TS^{-1} = P = P_0^{d-c}$ *eine ganzzahlige Substitution mit der Determinante* 1 *wird und zudem zweitens in den beiden Formen* $\varphi_{j_0+c p_0} = \varphi$ *und* $\varphi_{j_0+d p_0} = \psi$ *die* n *Coefficienten jedesmal genau dieselben Verhältnisse besitzen,* dass also $\psi = \vartheta\varphi$ gilt, wo ϑ ein constanter Factor ist. (Die erstere Forderung wird z. B. gewiss erfüllt sein, wenn wir S und T derart auswählen, dass ihre Determinanten gleichen Werth haben und zudem in ihnen nach dieser Determinante als Modul je zwei entsprechende Coefficienten immer gleichrestig sind.) Der Factor ϑ wird als Quotient der Coefficienten in ψ und φ wie diese Zahlen im Körper von α liegen. Setzen wir $(d-c)p_0 = p$, so gehen aus $T = PS$, $\psi = \vartheta\varphi$ vermöge $Q_j = Q_{j+p}$ $(j \geqq j_0)$ die Beziehungen

$$S_{j+p} = PS_j, \qquad \varphi_{j+p} = \vartheta\varphi_j$$

für jeden Index $j > j_0$ hervor. Wir erhalten sodann allgemeiner

$$S_{j+fp} = P^f S_j, \qquad \varphi_{j+fp} = \vartheta^f \varphi_j \qquad (j \geqq j_0)$$

für $f = 1, 2, 3, \ldots$. Da in den Formen φ_j mit wachsendem Index j die Beträge der Coefficienten jedenfalls nach Null abnehmen, muss $|\vartheta| < 1$ sein.

4. Wenn α complex ist, bedeute α^0 die zu α conjugirt imaginäre Grösse. Die $n-l$ Wurzeln der irreducibeln Gleichung für α ausser α, bez. ausser α und α^0 mögen $\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(n-l)}$ heissen. Ferner bezeichnen wir die zu einer Zahl ϑ oder einer Form ξ des Körpers von α conjugirten Zahlen oder Formen in den Körpern von $(\alpha^0), \alpha', \ldots \alpha^{(n-l)}$ analog durch Hinzufügung oberer Indices $(0), 1, \ldots n-l$. Durch die Substitution $P = S_{j_0+p} S_{j_0}^{-1}$ geht ξ in $\vartheta\xi$ und gehen daher wegen der Irreducibilität der Gleichung n^{ten} Grades für α weiter $(\xi^0), \xi', \ldots \xi^{(n-l)}$ in $(\vartheta^0\xi^0), \vartheta'\xi', \ldots \vartheta^{(n-l)}\xi^{(n-l)}$ über. Bedeutet nun t einen unbestimmten Parameter, E die identische Substitution, so gehen $\xi, \ldots \xi^{(n-l)}$ durch die Substitution $tE - P$ in $(t-\vartheta)\xi, \ldots (t-\vartheta^{(n-l)})\xi^{(n-l)}$ über und ist infolgedessen $|tE - P|$, d. h. die *Determinante* von $tE - P$, gleich dem Producte $(t-\vartheta)\ldots(t-\vartheta^{(n-l)})$. Diese in t identisch erfüllte Beziehung zeigt, dass ϑ der Gleichung $|tE - P| = 0$

genügt. Indem P eine ganzzahlige Substitution und ihre Determinante 1 ist, erweist sich dadurch ϑ als eine *ganze Zahl* und als eine *Einheit* im Körper von α.

5. Es sei nun a_0 eine solche ganze rationale Zahl, dass $a_0\alpha$ eine *ganze* algebraische Zahl wird, so hat das Product $a_0^{n-1}\xi$ als Coefficienten lauter *ganze* algebraische Zahlen und *sind* daher auch *in jeder einzelnen Form* $a_0^{n-1}\varphi_j$ *die bezüglichen* n *Coefficienten* $a_0^{n-1}\rho_k (k = 1, 2, \dots n)$ *stets lauter von Null verschiedene ganze algebraische Zahlen, also deren Normen im Körper von* α *stets dem Betrage nach* $\geqq 1$. Wegen der Eigenschaft 1° der Substitutionen S_j liegt dabei jeder Betrag

$$\frac{|\rho_k^{(h)}|}{r_j} \qquad (h=1,\dots,n-l;\ k=1,2,\dots,n)$$

nicht über einer gewissen von j unabhängigen Grenze. Verwenden wir nun die hierdurch gegebenen Ungleichungen für alle Indices $h = 1, \dots n-l$ mit Ausnahme eines beliebigen Index g dieser Reihe und berücksichtigen wir ausserdem die Eigenschaft 3° für S_j und, falls $l = 2$ ist, noch die Beziehung $|\rho_k| = |\rho_k^0|$, so gewinnen wir aus der Ungleichung

$$|Nm\, a_0^{n-1}\rho_k| \geqq 1$$

eine gewisse, von r_j unabhängige, *positive untere* Grenze für den einen darin übrig bleibenden Factor $\frac{|\rho_k^{(g)}|}{r_j}$. *Danach befinden sich nun alle Beträge* $\frac{|\rho_k^{(g)}|}{r_j}$ *in Bezug auf die Form* φ_j *zwischen zwei bestimmten endlichen positiven, von* r_j *unabhängigen Grenzen,* und werden infolgedessen weiter auch *die Quotienten aus irgend zwei der je* $n-l$ *conjugirten Werthe*

$$\rho_k', \rho_k'', \dots \rho_k^{(n-l)} \qquad (k = 1, 2, \dots n)$$

bei sämmtlichen Formen φ_j stets absolut genommen zwischen zwei, unabhängig von den Werthen r_j feststehenden positiven endlichen Grenzen liegen. Beachten wir nun die Relationen $\varphi_{j+fp} = \vartheta^f\varphi_j$ für $f = 1, 2, 3, \dots$, so zeigt sich schliesslich, dass auch die Beträge der Quotienten aus irgend zwei der je $n-l$ Grössen

$$\vartheta'^f, \vartheta''^f, \dots (\vartheta^{(n-l)})^f$$

zwischen gewissen zwei festen positiven endlichen Grenzen liegen müssen, *und zwar gelten diese Grenzen für alle Werthe* $f = 1, 2, 3, \ldots$ *auf einmal.* Danach kann die Einheit ϑ nicht anders beschaffen sein, als dass für sie die Gleichungen

$$|\vartheta'| = |\vartheta''| = \ldots = |\vartheta^{(n-l)}|$$

statthaben. Bezeichnen wir den gemeinsamen Werth dieser letzten Beträge mit η und setzen $|\vartheta| = \varepsilon$, womit im Falle $l = 2$ noch $|\vartheta^0|$ zusammenfällt, so geht die Gleichung $Nm\,\vartheta = 1$ in $\varepsilon^l \eta^{n-l} = 1$ über, und wegen $\varepsilon < 1$ folgt $\eta > 1$. Wir gelangen auf diese Weise zu dem Satze:

Damit eine algebraische Zahl n^{ten} Grades α eine periodische Substitutionenkette besitze, muss es im Körper von α eine Einheit ϑ von einem Betrage < 1 geben, für welche die conjugirten Zahlen in den conjugirten Körpern (abgesehen von der Zahl ϑ^0 in dem Körper der conjugirt imaginären Zahl α^0, falls α complex ist) sämmtlich unter einander gleichen Betrag haben.

6. *Die hier gefundene Bedingung ist zugleich hinreichend für das Vorhandensein einer periodischen Substitutionenkette zur Zahl α.* Denn nehmen wir an, es existire im Körper von α eine Einheit ϑ_0 von dem fraglichen Charakter. Es bedeute dann P_0 diejenige lineare Substitution, durch welche die n Formen $\xi, (\xi^0), \ldots \xi^{(n-l)}$ in die Formen $\vartheta_0\xi, (\vartheta_0^0\xi^0), \ldots \vartheta_0^{(n-l)}\xi^{(n-l)}$ übergehen; diese Substitution hat lauter *rationale* Coefficienten und eine *Determinante* $= \pm 1$. Durch P_0^f, wenn f eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ bedeutet, gehen dann $\xi, \ldots \xi^{(n-l)}$ in $\vartheta_0^f\xi, \ldots (\vartheta_0^{(n-l)})^f\xi^{(n-l)}$ über. Da diese Potenzen ϑ_0^f lauter *ganze* algebraische Zahlen sind, werden, wie leicht zu sehen ist, in allen jenen Substitutionen P_0^f die Coefficienten solche ganze rationale Zahlen sein, dass ihre Nenner nicht über eine gewisse, durch die Grösse α bestimmte, aber von den Exponenten f unabhängige Zahl hinausgehen, während zugleich ihre Determinanten durchweg $= \pm 1$ sind. Wir werden infolgedessen unter jenen unendlich vielen Substitutionen P_0^f gewiss irgend zwei solche, P_0^c und P_0^d $(d > c)$, finden können, dass $P_0^d(P_0^c)^{-1} = P$ eine Substitution mit *ganzzahligen* Coefficienten wird. Setzen wir dann $\vartheta_0^{d-c} = \vartheta$, $|\vartheta|^{\frac{l}{n-l}} = \eta$, so haben wir in der Reihe

$$S_1 = E, \qquad S_2 = P, \qquad S_3 = P^2, \qquad \ldots$$

eine periodische Substitutionenkette für die Zahl α mit den in 1. und 2. angegebenen Eigenschaften, wenn wir noch für die zugeordneten Grössen r_j die Festsetzung $r_j = \eta^{j-1} (j = 1, 2, 3, \ldots)$ treffen.

§ 2. *Einheiten von besonderem Charakter.*

7. Wir wollen jetzt die Forderung der Existenz der besonderen Einheit ϑ im Körper von α weiter verfolgen. Die ganze Function n^{ten} Grades in t:

$$F(t) = (t - \vartheta) \ldots (t - \vartheta^{(n-l)})$$

hat *rationale ganze* Coefficienten; unter ihren Wurzeln haben l den Betrag $\varepsilon < 1$ und $n - l$ den Betrag $\eta > 1$. Jeder im Bereiche der rationalen Zahlen irreducible Factor dieser Function $F(t)$ verschwindet für wenigstens eine der Zahlen $\vartheta, \ldots \vartheta^{(n-l)}$ und muss daher, wegen der Irreducibilität der Gleichung mit den Wurzeln $\alpha, \ldots \alpha^{(n-l)}$, jedesmal für alle diese Zahlen $\vartheta, \ldots \vartheta^{(n-l)}$ verschwinden; infolgedessen ist $F(t)$ nothwendig eine Potenz einer einzigen irreducibeln Function. Wegen der Beträge der Wurzeln sind nun offenbar nur diese beiden Fälle möglich: *Entweder* ist $F(t)$ selbst irreducibel und bestimmt alsdann ϑ bereits den Körper von α, *oder* es ist α complex, $l = 2$, aber $\vartheta = \vartheta^0$ reell und $F(t)$ das Quadrat einer irreducibeln Function; in letzterem Falle bestimmt ϑ einen reellen Unterkörper vom $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Grade des complexen Körpers von α. Wir bemerken noch, dass jede Potenz $\vartheta^2, \vartheta^3, \ldots$ denselben Bedingungen genügt, wie sie hier für ϑ vorausgesetzt werden.

8. Nach einem Satze von Dirichlet giebt es in dem Körper der Zahl α, wenn nur $n > l$ ist, gewiss eine solche Einheit, deren Betrag < 1 ist. Daraus ersehen wir bereits, dass im Körper von α eine Einheit ϑ der hier verlangten Art sich gewiss in folgenden Fällen vorfindet:

1° *wenn α reell und $n = 2$ ist,* 2° *wenn α reell ist, $n = 3$ und der Körper von α zwei complexe conjugirte Körper besitzt,*

3° *wenn α complex und $n = 3$ ist,* 4° *wenn α complex ist, $n = 4$ und der Körper von α lauter complexe conjugirte Körper besitzt.*

Denn in diesen Fällen besteht die Reihe $\vartheta', \ldots \vartheta^{(n-l)}$ entweder in einer einzigen reellen Zahl oder zwei conjugirt imaginären, im Speciellen auch

zwei gleichen reellen Zahlen. Weiter haben wir im Körper von α eine Einheit ϑ der verlangten Art jedenfalls auch in folgenden Fällen:

5° wenn α complex ist, $n = 4$ und der Körper von α einen reellen Unterkörper zweiten Grades hat, 6° wenn α complex ist, $n = 6$ und der Körper von α einen reellen Unterkörper dritten Grades besitzt, dessen zwei conjugirte Körper complex sind.

Denn in diesen Fällen können wir für ϑ eine reelle Einheit von einem Betrage < 1 in dem betreffenden Unterkörper von α wählen, alsdann ist $\vartheta' = \vartheta$ und die Reihe $\vartheta', \ldots \vartheta^{(n-1)}$ besteht aus zwei gleichen reellen bez. zwei gleichen Paaren conjugirt imaginärer Zahlen. Wir können jetzt den Satz beweisen:

Die hier aufgezählten sechs Fälle sind die einzigen, in denen der Körper von α eine Einheit ϑ der fraglichen Art aufweist, also die einzigen Fälle, in denen die Zahl α periodische Substitutionenketten besitzt.

9. Wir discutiren zuerst den Fall *einer reellen Zahl* α; hier ist $l = 1$, $\vartheta = \pm \varepsilon$, $\varepsilon\eta^{n-1} = 1$. Wir haben folgende Möglichkeiten in's Auge zu fassen:

1) Unter den Zahlen $\alpha', \ldots \alpha^{(n-1)}$ finden sich *wenigstens zwei reelle*, etwa $\alpha^{(h)}$ und $\alpha^{(k)}$. Dann sind auch $\vartheta^{(h)}$ und $\vartheta^{(k)}$ reell, und da diese Zahlen nicht einander gleich sein können, aber denselben Betrag haben, müsste $\vartheta^{(h)} = -\vartheta^{(k)}$ und daher $(\vartheta^{(h)})^2 = (\vartheta^{(k)})^2$ sein. Aber die Zahl $\vartheta^2 = \varepsilon^2$ ist von ihren $n - 1$ conjugirten Zahlen verschieden, sie genügt daher ebenfalls einer irreducibeln Gleichung n^{ten} Grades, und müssten daher ihre $n - 1$ conjugirten Zahlen auch unter einander durchweg verschieden sein. Danach ist dieser Fall unmöglich.

2) Unter der Zahlen $\alpha', \ldots \alpha^{(n-1)}$ kommt *nur eine reelle* Zahl, $\alpha^{(g)}$, vor. Für $n = 2$ liegt dann der oben unter 1° aufgeführte Fall vor. Ist $n > 2$, so haben wir unter jenen Zahlen weiter wenigstens ein Paar conjugirt imaginärer Zahlen, etwa $\alpha^{(h)}$ und $\alpha^{(k)}$. Die Zahl $\vartheta^2 = \varepsilon^2$ genügt einer irreducibeln Gleichung n^{ten} Grades; unter den Wurzeln dieser Gleichung ist weiter eine $= (\vartheta^{(g)})^2 = \eta^2$ und sind die $n - 2$ übrigen dem Betrage nach $= \eta^2$. Nun können wir eine Gleichung mit rationalen Coefficienten vom Grade $\frac{n(n-1)}{2}$ angeben, welche die Producte aus je zwei verschiedenen der n

Grössen $\vartheta, \vartheta', \ldots \vartheta^{(n-1)}$ zu Wurzeln hat. Diese Gleichung besitzt $n-1$ Wurzeln vom Betrage $\varepsilon\eta$, die übrigen Wurzeln von Betrage η^2, darunter insbesondere die Wurzel $\vartheta^{(h)}\vartheta^{(k)} = \eta^2$, sie müsste also auch alle anderen Wurzeln jener irreducibeln Gleichung n^{ten} Grades für η^2 besitzen; sie hätte aber, da $\varepsilon < 1 < \eta$ ist, gewiss nicht die Wurzel ε^2. Danach ist dieser Fall für $n > 2$ unmöglich.

3) Die Zahlen $\alpha', \ldots \alpha^{(n-1)}$ sind *sämmtlich complex*, sie zerfallen dann in $\frac{n-1}{2}$ Paare conjugirt imaginärer Grössen. Für $n = 3$ liegt der oben unter 2° aufgeführte Fall vor. Jetzt sei $n > 3$. Wir bilden die Gleichung $\frac{n(n-1)}{2}^{\text{ten}}$ Grades mit rationalen Coefficienten, welche als Wurzeln die Producte aus je zwei der n Grössen $\vartheta^{-n+1}, \vartheta'^{-n+1}, \ldots (\vartheta^{(n-1)})^{-n+1}$ hat. Diese Gleichung besitzt $n-1$ Wurzeln vom Betrage $(\varepsilon\eta)^{-n+1} = \eta^{(n-1)(n-2)}$ und im Übrigen lauter Wurzeln vom Betrage $\eta^{-2(n-1)} = \varepsilon^2$, darunter $\frac{n-1}{2}$ Wurzeln $= \varepsilon^2 = \vartheta^2$; sie müsste daher auch alle die Grössen $\vartheta'^2, \ldots (\vartheta^{n-1)})^2$ vom Betrage η^2 zu Wurzeln besitzen, es müsste also $\eta^2 = \eta^{(n-1)(n-2)}$, d. h. $n = 3$ sein. Für $n > 3$ ist danach dieser Fall unmöglich.

10. Wir behandeln jetzt weiter den *Fall einer complexen Zahl* α; hier ist $l = 2$, $\varepsilon^2\eta^{n-2} = 1$.

Machen wir zunächst die Annahme, dass $\vartheta = \vartheta^0$, *also reell ist.* Die Grösse ϑ ist dann Wurzel einer irreducibeln Gleichung $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Grades. Der Körper von α besitzt also einen reellen Unterkörper von Grade $\frac{n}{2}$, und in diesem soll ϑ eine Einheit von einem Betrage < 1 sein, für welche die conjugirten Zahlen in den conjugirten Körpern sämmtlich unter einander gleiche Beträge haben. Wir können daher die in 9. gemachten Ausführungen verwenden, und es muss entweder $\frac{n}{2} = 2$ sein oder aber $\frac{n}{2} = 3$ und dabei der Körper von ϑ zwei complexe conjugirte Körper aufweisen. Wir kommen damit auf die oben unter 5° und 6° aufgezählten Umstände für den Körper von α.

Wir nehmen jetzt andererseits an, dass $\vartheta \neq \vartheta^0$ *sei.* Alsdann genügt ϑ einer irreducibeln Gleichung n^{ten} Grades und bestimmt bereits völlig den Körper von α. Wir unterscheiden wieder drei Fälle:

1) Unter den Zahlen $\alpha', \ldots \alpha^{(n-2)}$ sind *wenigstens zwei reelle* vorhanden, $\alpha^{(h)}$ und $\alpha^{(k)}$. Dann sind auch $\vartheta^{(h)}$ und $\vartheta^{(k)}$ reell, und da sie gleichen Betrag haben, aber verschieden sind, kann nur $\vartheta^{(h)} = -\vartheta^{(k)}$ sein. Alsdann ist $(\vartheta^{(h)})^2 = (\vartheta^{(k)})^2$. Die rationale Gleichung n^{ten} Grades mit den Wurzeln $\vartheta^2, \ldots (\vartheta^{(n-2)})^2$ hat daher lauter Doppelwurzeln und muss infolgedessen $\vartheta^2 = (\vartheta^0)^2$ sein. Die Potenz ϑ^2 bestimmt somit einen reellen Unterkörper $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Grades für den Körper von α, und da überdies $(\vartheta^{(h)})^2$ reell ist, kann nach dem vorhin Bemerkten hier nur der unter 5° aufgeführte Fall mit $n = 4$ vorliegen.

2) Unter den Zahlen $\alpha', \ldots \alpha^{(n-2)}$ ist *nur eine reelle* Zahl, $\alpha^{(g)}$, vorhanden. Für $n = 3$ liegt der unter 3° genannte Fall vor. Ist $n > 3$, so haben wir unter jenen Zahlen noch $\frac{n-3}{2}$ Paare conjugirt imaginärer Grössen. Es ist $\vartheta^{(g)} = \pm \eta$; da $-\vartheta^{(g)}$ hier nicht derselben Gleichung mit rationalen Coefficienten wie $\vartheta^{(g)}$ genügt, muss nothwendig auch $\vartheta^0 \neq -\vartheta$, also $(\vartheta^0)^2 \neq \vartheta^2$ und daher $\vartheta^2, \neq \varepsilon^2(\vartheta^0)^2 \neq \varepsilon^2$ sein. Danach ist die rationale Gleichung n^{ten} Grades mit den Wurzeln $\vartheta^2, \ldots (\vartheta^{(n-2)})^2$ irreducibel und unter den Wurzeln dieser Gleichung sind zwei nicht reelle Wurzeln vom Betrage ε^2 und ist ferner eine Wurzel $= \eta^2$ vorhanden. Bilden wir nun die rationale Gleichung $\frac{n(n-1)}{2}^{\text{ten}}$ Grades, welche die Producte aus je zwei der n Grössen $\vartheta, \ldots \vartheta^{(n-2)}$ zu Wurzeln hat, so besitzt diese Gleichung eine Wurzel $= \varepsilon^2$, sodann $2(n-2)$ Wurzeln vom Betrage $\varepsilon\eta$, die übrigen Wurzeln vom Betrage η^2 und darunter $\frac{n-3}{2}$ Wurzeln $= \eta^2$. Wegen der letzteren Wurzeln müsste sie aber alle Wurzeln jener irreducibeln Gleichung für η^2 besitzen. Danach ist dieser Fall für $n > 3$ unmöglich.

3) Die Zahlen $\alpha', \ldots \alpha^{(n-2)}$ sind *sämmtlich complex,* zerfallen also in $\frac{n-2}{2}$ Paare conjugirt imaginärer Grössen; n ist hier gerade. Für $n = 4$ liegt der oben unter 4° aufgeführte Fall vor. Jetzt sei $n \geq 6$. Bilden wir die Gleichung $\frac{n(n-1)}{2}^{\text{ten}}$ Grades, welche die Producte aus je zwei der n Grössen $\vartheta, \ldots \vartheta^{(n-2)}$ zu Wurzeln hat, so besitzt diese Gleichung mit rationalen Coefficienten eine Wurzel $= \varepsilon^2$, sodann $2(n-2)$ Wurzeln vom Betrage $\varepsilon\eta$, die übrigen Wurzeln vom Betrage η^2, darunter $\frac{n-2}{2}$ gleich η^2. Bilden

wir andererseits die Gleichung $\frac{n(n-1)}{2}^{\text{ten}}$ Grades, deren Wurzeln die $-\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln dieser letzten Gleichung sind, so hat diese neue Gleichung mit rationalen Coefficienten eine Wurzel $= \varepsilon^{-(n-2)} = \eta^{\frac{(n-2)^2}{2}}$, sodann $2(n-2)$ Wurzeln vom Betrage $(\varepsilon\eta)^{-\frac{(n-2)}{2}} = \eta^{\frac{(n-2)(n-4)}{4}}$, die übrigen Wurzeln vom Betrage $\eta^{-(n-2)} = \varepsilon^2$, darunter $\frac{n-2}{2}$ gleich ε^2. Diese zweite Gleichung besitzt nun keine Wurzel vom Betrage $\varepsilon\eta$, und wenn wir uns zuerst $n > 6$ denken, auch keine Wurzel vom Betrage η^2. Im Falle $n > 6$ könnte daher der gemeinsame Factor der beiden eben gebildeten Gleichungen nur die eine Wurzel ε^2 besitzen, es müsste dann also $\varepsilon^2 = \vartheta\vartheta^0$ rational sein; nun wäre aber ε^2 ebenso wie ϑ eine Einheit, eine algebraische Zahl von der Norm ± 1, es müsste daher nothwendig $\varepsilon^2 = 1$ sein, was gegen die Voraussetzung $\varepsilon < 1$ wäre. Also ist die Annahme $n > 6$ hier unzulässig.

Im Falle $n = 6$ endlich hat die zuerst erwähnte Gleichung eine Wurzel $= \varepsilon^2$, 8 Wurzeln vom Betrage $\varepsilon\eta$, 6 vom Betrage η^2, die an zweiter Stelle gebildete Gleichung eine Wurzel $= \eta^8$, 8 Wurzeln vom Betrage η^2, 6 vom Betrage ε^2, darunter 2 gleich ε^2. Die im Bereiche der rationalen Zahlen irreducible Gleichung mit ε^2 als Wurzel kann danach, da sie in diesen beiden Gleichungen als Factor eingeht, ausser ε^2 nur Wurzeln vom Betrage η^2 enthalten, und sie wird wegen $\varepsilon^2\eta^4 = 1$ und da $\varepsilon^2 = \vartheta\vartheta^0$ jedenfalls eine Einheit vorstellt, im ganzen zwei solcher Wurzeln enthalten; diese zwei Wurzeln können dann einander weder gleich noch entgegengesetzt, also auch nicht reell $= \pm\eta^2$ sein, sie müssen complex und zu einander conjugirt imaginär sein. Nehmen wir an, dass hier ϑ' mit ϑ'' und ϑ''' mit $\vartheta^{(4)}$ conjugirt imaginär sind, so können wir annehmen, indem wir noch die Bezeichnungen von ϑ''' und $\vartheta^{(4)}$ vertauschen dürfen, die Wurzeln jener Gleichung für ε^2 seien $\vartheta\vartheta^0$, $\vartheta'\vartheta'''$, $\vartheta''\vartheta^{(4)}$.

Die Grösse ε^2 bestimmt danach einen cubischen Körper, dessen zwei conjugirte Körper complex sind. Denken wir uns jetzt die im Bereiche der rationalen Zahlen irreducible ganze Function $F(t)$, welche für $t = \vartheta$ verschwindet, im Körper von ε^2 in irreducible Factoren zerlegt, und es sei $G(t)$ derjenige Factor darunter, welcher die Wurzel $t = \vartheta$ erhält. Da ε^2 reell ist, bekommt $G(t)$ ebenfalls lauter reelle Coefficienten und wird daher mit der Wurzel ϑ auch die conjugirt imaginäre Grösse $\vartheta^0 = \frac{\varepsilon^2}{\vartheta}$ als Wurzel

besitzen, sodass auch $G\left(\frac{\varepsilon^2}{\vartheta}\right) = 0$ ist. Alsdann muss die Gleichung $G\left(\frac{\varepsilon^2}{t}\right) = 0$ überhaupt für jede Wurzel der im Körper von ε^2 irreducibeln Gleichung $G(t) = 0$ bestehen. Die Grössen $\frac{\varepsilon^2}{\vartheta'}, \frac{\varepsilon^2}{\vartheta''}, \frac{\varepsilon^2}{\vartheta'''}, \frac{\varepsilon^2}{\vartheta^{(4)}}$ aber besitzen sämmtlich den Betrag $\frac{\varepsilon}{\eta} \neq \eta$ und $\neq \varepsilon$ und sind daher nicht Wurzeln von $F(t) = 0$, also auch nicht Wurzeln von $G(t) = 0$, daher kann $G(t)$ auch keine der Grössen $\vartheta', \vartheta'', \vartheta''', \vartheta^{(4)}$ als Wurzel haben; somit können wir einfach $G(t) = (t - \vartheta)(t - \vartheta^0)$ schreiben. Danach ist ϑ Wurzel einer quadratischen Gleichung im Körper von ε^2 und besitzt der Körper sechsten Grades von ϑ, d. i. der Körper von α, in dem Körper von ε^2 einen reellen Unterkörper dritten Grades, dessen zwei conjugirte Körper complex sind. Wir kommen also auf den oben unter 6° aufgezählten Fall.

Wir können die Bildungsweise des Körpers von α unter den hier angenommenen Umständen noch genauer festlegen. Die zu $G(t)$ conjugirten Functionen in den Körpern von $\vartheta'\vartheta'''$ und $\vartheta''\vartheta^{(4)}$ werden $(t - \vartheta')(t - \vartheta''')$ und $(t - \vartheta'')(t - \vartheta^{(4)})$ sein. Da $|\vartheta'| = |\vartheta'''|$ ist, wird $\frac{\vartheta' - \vartheta'''}{\vartheta' + \vartheta'''}$ rein imaginär, also $\left(\frac{\vartheta' - \vartheta'''}{\vartheta' + \vartheta'''}\right)^2$ eine negative reelle Grösse sein. Diese Grösse liegt wie $\vartheta' + \vartheta'''$ und $\vartheta'\vartheta'''$ in dem Körper von $\vartheta'\vartheta'''$; da sie nun reell ist, wird sie identisch mit ihrer conjugirten Grösse in dem conjugirt imaginären Körper von $\vartheta''\vartheta^{(4)}$ und muss daher rational sein und daher gleichzeitig auch gleich der conjugirten Grösse $\left(\frac{\vartheta - \vartheta^0}{\vartheta + \vartheta^0}\right)^2$ im Körper von $\vartheta\vartheta^0$. Danach ist $\frac{\vartheta}{\vartheta^0}$ entweder $= \frac{\vartheta'}{\vartheta'''}$ oder $= \frac{\vartheta'''}{\vartheta'}$. Da wir die Bezeichnung der Paare ϑ', ϑ'' und $\vartheta''', \vartheta^{(4)}$ vertauschen dürfen, können wir annehmen, es sei $\frac{\vartheta}{\vartheta^0} = \frac{\vartheta'}{\vartheta'''}$; letzterer Werth ist weiter $= \frac{\vartheta^{(4)}}{\vartheta''}$. Setzen wir $\frac{\vartheta}{\vartheta^0} = \delta$, so ist $\delta = \frac{\vartheta^2}{\vartheta\vartheta^0}$ und sind die conjugirten Zahlen dazu $\frac{\vartheta'^2}{\vartheta'\vartheta'''} = \delta$, $\frac{(\vartheta^{(4)})^2}{\vartheta''\vartheta^{(4)}} = \delta$ und die drei hierzu reciproken Werthe $= \frac{1}{\delta}$. Dabei hat δ den Betrag 1 und ist wie ϑ eine Einheit; danach ist entweder $\delta = -1$, oder es ist δ eine solche Einheitswurzel, die einen Körper zweiten Grades bestimmt. Im ersteren Falle ist $\vartheta^0 = -\vartheta$, $\vartheta = \pm i\varepsilon$, $\vartheta^2 = (\vartheta^0)^2$. Im zweiten Falle kämen für δ zunächst

die dritten, vierten, sechsten Einheitswurzeln in Betracht. Nun folgt $\vartheta = \delta^2\varepsilon$, $\vartheta^0 = \frac{1}{\delta^2}\varepsilon$ und weiter unter Verwendung von $\varepsilon\eta^2 - \varepsilon\vartheta'\vartheta'' = 1$ die Beziehung

$$Nm(\vartheta + \vartheta^0) = (\vartheta + \vartheta^0)(\vartheta' + \vartheta''')(\vartheta'' + \vartheta^{(4)}) = \frac{\delta + 1}{\delta^2}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)(1 + \delta).$$

Danach muss noch $\frac{\delta + 1}{\delta^2}$ rational sein, und solches trifft nur zu, wenn δ eine *dritte* Einheitswurzel vorstellt, $\delta^3 = 1$ ist. Dann folgt endlich $\vartheta = \pm\frac{\varepsilon}{\delta}$, $\vartheta^0 = \pm\,\delta\varepsilon$, $\vartheta^3 = (\vartheta^0)^3$ und $\vartheta + \vartheta^0 = \mp\,\varepsilon$, sodass der Körper von ε^2 auch die Grösse ε selbst enthält, und der Körper von α aus dem Körper dritten Grades von ε und dem Körper zweiten Grades von $\delta = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ zusammengesetzt ist.

§ 3. *Die complexen cubischen Irrationalzahlen.*

11. *In den Fällen, wo für die algebraische Zahl α periodische Substitutionenketten möglich sind, entsteht nun die Aufgabe, eine solche Kette für α bereits herzustellen, wenn allein α seinem Werthe nach gegeben ist, die conjugirten algebraischen Zahlen von α indess noch unbekannt sind.* Bei den reellen algebraischen Zahlen zweiten Grades wird gerade durch die periodische Entwickelung in einen gewöhnlichen Kettenbruch das hier Verlangte geleistet. Wir wollen nun zeigen, dass auch noch in einem anderen Falle, nämlich, wenn es sich um *eine complexe Grösse α* handelt, *welche Wurzel einer irreducibeln Gleichung dritten Grades sein soll*, der hier gestellten Forderung entsprochen werden kann, und *wir kommen dadurch zu einem völlig analogen Kriterium für die complexen algebraischen Zahlen dritten Grades, wie es durch* LAGRANGE *für die reellen algebraischen Zahlen zweiten Grades in der Periodicität der Kettenbruchentwickelung nachgewiesen worden ist.*

Es sei jetzt α eine complexe Grösse, welche einer im Bereiche der rationalen Zahlen irreducibeln Gleichung dritten Grades genügt, so ist mit α ohne Weiteres auch die conjugirt imaginäre Grösse α^0 gegeben; dagegen

haben wir uns der Kenntniss der dritten reellen Wurzel α' jener Gleichung vorläufig zu entschlagen. Wir setzen

$$\xi = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3.$$

Zu jeder ganzen rationalen Zahl $r > 1$ bestimmen wir eine Substitution S:

$$x_h = s_h^{(1)} y_1 + s_h^{(2)} y_2 + s_h^{(3)} y_3 \qquad (h = 1, 2, 3),$$

wobei jeder der Coefficienten $s_h^{(k)}$ aus den Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm r$ entnommen und die Determinante $\neq 0$ sein soll, derart, dass dabei in der Form

$$\varphi = \rho_1 y_1 + \rho_2 y_2 + \rho_3 y_3,$$

in welche ξ durch S übergeht, zunächst $|\rho_1|$ möglichst klein, nächstdem $|\rho_2|$ möglichst klein, endlich $|\rho_3|$ möglichst klein ausfällt. Bei den einzelnen Systemen $s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)}$ haben wir immer die Wahl unter Paaren entgegengesetzter Systeme x_1, x_2, x_3 und $-x_1, -x_2, -x_3$, und wir wollen die zusätzliche Annahme machen, dass in jeder Verticalreihe $s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)}$ von S die letzte von Null verschiedene Zahl stets > 0 ist. *Alsdann ist die betreffende Substitution S durch die Zahl r vollkommen eindeutig bestimmt.* Wir können nämlich niemals für zwei Systeme x_1, x_2, x_3, die $\neq 0, 0, 0$, von einander verschieden und auch nicht einander entgegengesetzt sind, $\xi = \rho$, $\xi = \sigma$ und dabei $|\rho| = |\sigma|$ finden. Denn alsdann wäre $\frac{\rho\rho^0}{\sigma\sigma^0} = 1$ und würde die Betrachtung der Norm von $\frac{\rho}{\sigma}$ in Bezug auf den Körper von α dazu führen, dass die zu $\frac{\rho}{\sigma}$ conjugirte Zahl im Körper von α' rational wäre. Dann aber wäre auch $\frac{\rho}{\sigma}$ selbst rational, also nothwendig $= \pm 1$, und müssten die vorausgesetzten zwei Systeme x_1, x_2, x_3 eben entweder gleich oder entgegengesetzt sein. Die in dieser Weise durch r völlig bestimmte Substitution S entspricht, wie bereits in 1. erwähnt wurde, den dort aufgezählten Umständen; wir wollen von dieser Substitution S sagen, sie *gehöre* zur Zahl r.

Wir setzen jetzt $r_1 = 1$ und ermitteln die zu r_1 gehörende Substitution S_1, diese Substitution kann auch noch zu $r = 2, 3, \ldots$ gehören, es sei $r_2 - 1$ die grösste ganze Zahl, zu der sie gehört; sodann sei S_2 die zu

r_2 gehörende Substitution, $r_3 - 1$ die grösste ganze Zahl, zu der S_2 gehört; S_3 die zu r_3 gehörende Substitution u. s. f. Alsdann gilt der folgende Satz:

Die in dieser Art hergestellte Substitutionenkette $S_1, S_2, S_3, \ldots$ für die complexe cubische Irrationalzahl α ist stets periodisch.

12. In der That, im Körper von α können wir stets eine Einheit ϑ_0 angeben, deren Betrag < 1 ist, und noch so, dass $\vartheta_0' > 0$ ist; alsdann können wir, wie aus den Betrachtungen in 6. hervorgeht, eine solche Potenz dieser Einheit $\vartheta_0^f = \vartheta$ $(f > 0)$ ermitteln, dass die lineare Substitution P, durch welche die Formen ξ, ξ^0, ξ' in $\vartheta\xi, \vartheta^0\xi^0, \vartheta'\xi'$ übergehen, lauter *ganzzahlige* Coefficienten hat; dabei ist $\vartheta\vartheta^0\vartheta' > 0$ und die Determinante von P gleich 1.

Wir schreiben nun die Auflösung von

$$\xi = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3, \qquad \xi^0 = x_1 + \alpha^0 x_2 + (\alpha^0)^2 x_3, \qquad \xi' = x_1 + \alpha' x_2 + \alpha'^2 x_3$$

in der Form

$$x_h = \beta_h \xi + \beta_h^0 \xi^0 + \beta_h' \xi' \qquad (h = 1, 2, 3);$$

dabei sind $\beta_h, \beta_h^0, \beta_h'$ jedesmal conjugirte Zahlen in den Körpern von $\alpha, \alpha^0, \alpha'$.

Es sei jetzt S:

$$x_h = s_h^{(1)} y_1 + s_h^{(2)} y_2 + s_h^{(3)} y_3 \qquad (h = 1, 2, 3)$$

eine Substitution der oben gebildeten Kette und r die niedrigste Zahl, zu der diese Substitution S gehört, also r der grösste Werth unter den Beträgen der 9 Coefficienten $s_h^{(k)}$, und es gehe ξ durch S in

$$\varphi = \rho_1 y_1 + \rho_2 y_2 + \rho_3 y_3$$

über, so folgt

$$s_h^{(1)} y_1 + s_h^{(2)} y_2 + s_h^{(3)} y_3 = \beta_h \varphi + \beta_h^0 \varphi^0 + \beta_h' \varphi'$$

und daraus

$$s_h^{(k)} = \beta_h \rho_k + \beta_h^0 \rho_k^0 + \beta_h' \rho_k' \qquad (h, k = 1, 2, 3).$$

Nach der in 1. erwähnten Eigenschaft 3^0 können wir eine, von α allein abhängende, von r aber völlig unabhängige positive Constante M angeben, sodass $|\rho_1| r^{\frac{1}{2}}, |\rho_2| r^{\frac{1}{2}}, |\rho_3| r^{\frac{1}{2}}$ bei jedem Werthe von r stets $\leq M$ sind, und nach 5. gelangen wir dann durch Betrachtung der Normen von ρ_1, ρ_2, ρ_3

unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Norm einer von Null verschiedenen *ganzen* Zahl stets > 1 ist, zu einer weiteren, von r unabhängigen positiven Constante, die wir $\frac{M}{N}$ schreiben wollen, sodass $|\rho_1'|\,r^{-1}$, $|\rho_2'|\,r^{-1}$, $|\rho_3'|\,r^{-1}$ stets $> \frac{M}{N}$ sind.

Auf diese Ungleichungen gestützt, können wir jetzt gewisse Eigenschaften für die Substitution $T = PS$ nachweisen, sowie nur r eine bestimmte Grösse übersteigt. Durch $T = PS$ gehen die Formen ξ, ξ^0, ξ' in $\vartheta\varsigma, \vartheta^0\varsigma^0, \vartheta'\varsigma'$ über; ist

$$x_h = t_h^{(1)} y_1 + t_h^{(2)} y_2 + t_h^{(3)} y_3 \qquad (h = 1, 2, 3)$$

der Ausdruck dieser Substitution T, so folgt daher

$$t_h^{(k)} = \vartheta\beta_h\rho_k + \vartheta^0\beta_h^0\rho_k^0 + \vartheta'\beta_h'\rho_k' \qquad (h, k = 1, 2, 3).$$

Alsdann haben wir

$$\frac{t_h^{(k)}}{s_h^{(k)}} = \vartheta' \frac{1 + \dfrac{\vartheta\beta_h\,\rho_k}{\vartheta'\beta_h'\,\rho_k'} + \dfrac{\vartheta^0\beta_h^0\,\rho_k^0}{\vartheta'\beta_h'\,\rho_k'}}{1 + \dfrac{\beta_h\,\rho_k}{\beta_h'\,\rho_k'} + \dfrac{\beta_h^0\,\rho_k^0}{\beta_h'\,\rho_k'}}.$$

Setzen wir $|\vartheta| = \varepsilon$, wobei $\vartheta' = \varepsilon^{-2}$ wird, und bezeichnen wir noch den grössten Werth unter den Beträgen $\left|\frac{\beta_h}{\beta_h'}\right|$ für $h = 1, 2, 3$ mit γ, so geht hieraus auf Grund der erwähnten Ungleichungen, *wofern* $2\gamma N r^{-\frac{3}{2}} < 1$ *ist*, einerseits

$$\frac{t_h^{(k)}}{s_h^{(k)}} > \vartheta' \frac{1 - 2\varepsilon^3\gamma N r^{-\frac{3}{2}}}{1 + 2\gamma N r^{-\frac{3}{2}}} > \vartheta'\left(1 - 2(\varepsilon^3 + 1)\gamma N r^{-\frac{3}{2}}\right),$$

andererseits

$$\frac{t_h^{(k)}}{s_h^{(k)}} < \vartheta' \frac{1 + 2\varepsilon^3\gamma N r^{-\frac{3}{2}}}{1 - 2\gamma N r^{-\frac{3}{2}}} < \vartheta'\left(1 + 2(\varepsilon^3 + 1)\gamma N r^{-\frac{3}{2}}\right)$$

hervor. Wir nehmen nunmehr die Zahl r überhaupt so gross an, dass die stärkere Bedingung

$$\text{(I)} \qquad 2\vartheta'(\varepsilon^3 + 1)\gamma N r^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}$$

erfüllt ist. Alsdann finden wir, indem alle Zahlen $s_h^{(k)}$ dem Betrage nach $\leq r$ und wenigstens eine darunter $= \pm r$ ist, die Beträge der Zahlen $t_h^{(k)}$ sämmtlich $< \vartheta' r + \frac{1}{2}$ und wenigstens einen unter diesen Beträgen $> \vartheta' r - \frac{1}{2}$; es wird danach der grösste unter den Beträgen der 9 Coefficienten $t_h^{(k)}$ *gleich der an $\vartheta' r$ nächstgelegenen ganzen Zahl* sein, die wir mit $\bar{r}$ bezeichnen wollen. Ferner finden wir alle Zahlen $s_h^{(k)} \neq 0$ und die Quotienten $\frac{t_h^{(k)}}{s_h^{(k)}} > 0$, und wird daher gewiss in T in jedem Systeme $t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, t_3^{(k)}$ die letzte von Null verschiedene Zahl, nämlich $t_3^{(k)} > 0$ sein, wie wir das entsprechende für S voraussetzen.

13. Aus den nämlichen Relationen, die wir soeben behandelten, ersehen wir andererseits die folgende Thatsache: Es sei T eine Substitution der in 11. für die Zahl α gebildeten Kette, $\bar{r}$ die kleinste Zahl, zu der T gehört, und $\bar{r} > \vartheta'$. Bilden wir die Substitution $S = P^{-1}T$, so bestehen zwischen je zwei entsprechenden Coefficienten $t_h^{(k)}$ von T und $s_h^{(k)}$ von S, *sowie nur $\bar{r}$ der Ungleichung $2\gamma N\bar{r}^{-\frac{3}{2}} < 1$ genügt,* stets die Beziehungen

$$\frac{1}{\vartheta'}\left(1 + 2\left(\frac{1}{\varepsilon^3} + 1\right)\gamma N\bar{r}^{-\frac{3}{2}}\right) > \frac{s_h^{(k)}}{t_h^{(k)}} > \frac{1}{\vartheta'}\left(1 - 2\left(\frac{1}{\varepsilon^3} + 1\right)\gamma N\bar{r}^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Setzen wir nun für $\bar{r}$ die stärkere Ungleichung

$$\text{(II)} \qquad \frac{2}{\vartheta'}\left(\frac{1}{\varepsilon^3} + 1\right)\gamma N\bar{r}^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}$$

voraus, so wird daher der grösste unter den Beträgen der Coefficienten $s_h^{(k)}$ *mit der an $\vartheta'^{-1}\bar{r}$ nächstgelegenen ganzen Zahl* übereinstimmen.

14. Jetzt denken wir uns wieder, wie in 12., S als irgend eine Substitution jener Kette, und es soll dabei sowohl die niedrigste Zahl r, zu der S gehört, der Bedingung (I) entsprechen, wie auch die an $\vartheta' r$ nächstgelegene ganze Zahl $\bar{r}$ die Bedingung (II) erfüllen. *Alsdann können wir behaupten, dass $T = PS$ jedesmal ebenfalls eine Substitution in jener Kette ist* und zu $\bar{r}$ als niedrigster Zahl gehört. Denn in T sind wegen (I) gewiss

alle Coefficienten $t_h^{(k)}$ dem Betrage nach $< \bar{r}$, und zudem ist in jeder Verticalreihe von T die letzte von Null verschiedene Zahl > 0. Wäre nun die zur Zahl $\bar{r}$ gehörende Substitution der Kette, T^*, von T verschieden und würde durch sie ξ in $\vartheta(\rho_1^* y_1 + \rho_2^* y_2 + \rho_3^* y_3)$ übergehen, so müsste dabei entweder $|\rho_1^*| < |\rho_1|$ oder $|\rho_1^*| = |\rho_1|, |\rho_2^*| < |\rho_2|$ oder $|\rho_1^*| = |\rho_1|, |\rho_2^*| = |\rho_2|, |\rho_3^*| < |\rho_3|$ sein. In der Substitution $S^* = P^{-1}T^*$ würden dann wegen (II) alle Coefficienten dem Betrage nach

$$< \frac{\bar{r}}{\vartheta'} + \frac{1}{2} < \frac{1}{\vartheta'}\left(\vartheta' r + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} < r + 1,$$

also als ganze Zahlen auch $< r$ sein, und würde ξ durch S^* in $\rho_1^* y_1 + \rho_2^* y_2 + \rho_3^* y_3$ übergehen, wobei die soeben erwähnten Bedingungen statthätten. Danach könnte S nicht die zur Zahl r gehörende Substitution der Kette sein.

Ist andererseits T eine solche Substitution jener Kette, die zu einer Zahl $\bar{r} > \vartheta'$ als niedrigster Zahl gehört, und erfüllt sowohl $\bar{r}$ die Bedingung (II) wie die an $\vartheta'^{-1}\bar{r}$ nächstgelegene ganze Zahl r die Bedingung (I), so erkennen wir ganz analog, dass auch $S = P^{-1}T$ jedesmal eine Substitution der Kette ist und zu r als niedrigster Zahl gehört.

15. Wir wählen jetzt in der Reihe $r_1, r_2, r_3, \ldots$ die Grösse r_{j_0} derart aus, dass die Ungleichung (I) mit $r = r_{j_0}$ und die Ungleichung (II) mit $\bar{r} = \vartheta' r_{j_0} - \frac{1}{2}$ erfüllt ist. Alsdann kommt mit der Substitution S_{j_0} in der Kette an irgend einer späteren Stelle die Substitution PS_{j_0} vor, sie sei etwa $= S_{j_0+p}$; dabei wird r_{j_0+p} die an $\vartheta' r_{j_0}$ nächstgelegene ganze Zahl. Jetzt gilt (I) auch für jede Grösse $r = r_j$, wobei $j > j_0$ ist, und (II) auch für jede Grösse $\bar{r} = r_{j+p}$, wobei $j > j_0$ ist. Mit *jeder* Substitution $S_j (j > j_0)$ wird daher auch die Substitution PS_j der Kette angehören und zwar als ein um so späteres Glied, je grösser j ist, und andererseits wird mit jeder Substitution $S_{j+p} (j > j_0)$ auch $P^{-1}S_{j+p}$ der Kette angehören, und zwar als ein um so späteres Glied, je grösser j ist. Daraus folgt dann, dass die Substitutionen $PS_{j_0}, PS_{j_0+1}, PS_{j_0+2}, \ldots$ *sämmtlich* in der Kette auftreten, und zwar jede Substitution *später* als die hier vorher genannte, dass aber andererseits in der Kette keine Substitution *zwischen* diesen einzelnen Substitutionen vorkommen kann, dass mithin allgemein

$$PS_j = S_{j+p}$$

für $j = j_0, j_0 + 1, j_0 + 2, \ldots$ ist. Aus diesen Beziehungen entnehmen wir

$$S_j^{-1} S_{j+1} = S_{j+p}^{-1} S_{j+p+1}$$

für $j > j_0$, d. h. die Kette $S_1, S_2, S_3, \ldots$ ist in der That periodisch, w. z. z. w.

Es kann bewiesen werden, *dass für eine jede Substitution S der Kette die Determinante nur die Werthe* ± 1 oder ± 2 *haben kann*, und auf Grund dieser Thatsache lässt sich *ein einfacher Algorithmus zur successiven Bildung der Substitutionen der Kette* aufstellen, wie ich an einer anderen Stelle auseinandersetzen werde.

Zürich, 1902.

SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UNE BRANCHE UNIFORME D'UNE FONCTION MONOGÈNE

(Quatrième note)

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

Les problèmes que j'ai traités dans les parties antérieures de ce mémoire [1] peuvent tous être ramenés à la source suivante qui est un

[1] Après la publication de la troisième note ont paru les travaux suivants qui se rapportent à ce mémoire:

Z. G. DE GALDEANO. *Estudios de critica y pedagogia matemáticas.* Zaragoza 1900. Pag. 133.

C. A. DELL' AGNOLA. *Sulle série di polinomi che rappresentano un ramo di funzione analitica monogena.* (Annali di matem. Ser. 3, T. 6, 1901. Pag. 227.)

EMILE BOREL. *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles.* (Acta mathematica. Bd. 24, 1901. Pag. 309.)

C. A. DELL' AGNOLA. *Sulle série di polinomi.* (Atti del Reale Ist. Veneto. T. 60, Parte 2, Anno 1900—01. Pag. 171.)

EMILE BOREL. *Leçons sur les séries divergentes.* Paris 1901. Chap. 4, Pag. 156—182.

S. PINCHERLE & U. AMALDI. *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all' analisi.* Bologna 1901. §§ 99, 214, 215.

ERNST LINDELÖF. *Sur le prolongement analytique.* (Bull. de la soc. math. de France. T. 29, 1901. Pag. 157.)

J. HADAMARD. *La série de Taylor et son prolongement analytique.* (Scientia N° 12, 1901. Chap. VI., pag. 50—63, 85, 89, 91, 98.)

G. VIVANTI. *Teoria delle funzioni analitiche.* Milano 1901. Pag. 275, 279—304.

E. PHRAGMÉN. *Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie* $\int_0^\infty F(ax)e^{-a}da$. (Comptes rendus etc. 10 juin 1901.)

problème posé par ABEL dans le Journal de Crelle (tome 2, page 286)[1]

En supposant la série

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

convergente pour toute valeur positive, *moindre* que la quantité r; on propose de trouver la limite vers la quelle converge la valeur de la fonction $f(x)$ en faisant converger x vers la limite r.»

ABEL suppose évidemment que r est le rayon de convergence de la série. Il ressort de nos connaissances actuelles qu'il y a une profonde différence entre les deux cas où r est un point singulier ou bien un point régulier de la fonction $f(x)$. C'est ce dernier cas qui a été traité jusqu'ici.

Il était bien connu dès les débuts du calcul infinitésimal que même dans ce cas il n'est nullement nécessaire que la série $c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + c_3 r^3 + \ldots$ soit convergente. Considérons par exemple la formule

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 - \ldots; \qquad x = 1$$

LUCIUS HANNI. *Über Borel's Verallgemeinerung des Grenzbegriffes.* (Monatshefte für Math. und Phys. Jahrg. 12, 1901.)

IVAR FREDHOLM. *Sur la méthode de prolongement analytique de M. Mittag-Leffler* (Öfvers. af K. Vet.-Akad. förhandl. 1901.)

PAUL PAINLEVÉ. *Sur le développement des fonctions analytiques en série de polynomes.* (Comptes rendus etc. 7 juillet 1902.)

Voir encore mes articles:

Über eine Verallgemeinerung der Taylor'schen Reihe. Göttinger Nachrichten 1900.

On multiply infinite series and on an extension of Taylor's series. Proc. of the London Math. Soc. 32, 1900

Analytische Darstellung monogener Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen. Jahresber. d. deutsch. Math.-Verein. Bd. 9, 1901.

Sur une formule de M. Fredholm. Comptes rendus etc. 25 mars 1901.

Sur la série de Bernoulli. Comptes rendus etc. 10 juin 1901.

Un critère pour reconnaître les points singuliers de la branche uniforme d'une fonction monogène. Comptes rendus etc. 12 août 1901.

Sur le terme complémentaire de une développement de la branche uniforme d'une fonction monogène dans le cas où ce développement possède une étoile de convergence. (Öfvers. af K. Vet.-Akad. förhandl. 1901.)

[1] Oeuvres. Nouvelle édition (SYLOW et LIE). Tome I, page 618.

qui faisait autrefois l'objet de tant de discussions. Le problème d'ABEL consiste donc dans le cas où $x = r$ est un point régulier à remplacer l'expression $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$ valable en général seulement pour $0 < x < r$ par une autre expression formée au moyen des constantes $c_0, c_1, c_2, \ldots$ mais valable pour $0 \leq x \leq r$. En posant le problème ainsi on est conduit naturellement au problème plus général où il faut construire l'expression demandée en sorte qu'elle soit valable pour tous les points réguliers de $f(x)$ situés sur l'axe réelle depuis $x = 0$ jusqu'au premier point singulier. Du moment que l'on envisage le problème à ce point de vue il est clair qu'on doit étarter la restriction que la variable x passe seulement par des valeurs réelles et qu'on doit exiger de l'expression cherchée qu'elle représente la fonction non seulement sur l'axe réelle mais encore sur tout autre vecteur, issu du centre $x = 0$, jusqu'au premier point singulier; autrement dit, que l'expression cherchée représente la fonction à l'intérieur de l'*étoile principale*[1] *des constantes* $c_0, \underline{|1} c_1, \underline{|2} c_2, \underline{|3} c_3, \ldots$.

On trouvera la solution complète de ce problème dans mes trois notes précédents.

Envisagé à un point de vue un peu différent le problème est un de ceux que WEIERSTRASS avait posés pour le développement futur de la théorie des fonctions. On sait que le grand analyste regardait comme le but ideal de la théorie des fonctions de trouver pour des classes de fonctions aussi étendues que possible des expressions arithmétiques valables et gardant la même forme dans tout le domaine d'existence de la fonction. Nous pouvons nous reporter entre autres à la phrase suivante qui se trouve dans la transcription[2] d'une communication faite par WEIERSTRASS vers la fin des années 1880 au séminaire de Berlin et où il rendait compte de différents travaux sur ce sujet: »Weiter ist man bis Heut noch nicht gekommen, aber es scheint, als ob das Ziel, welches ich vor langen Jahren der Functionentheorie steckte, nicht unreichbar sei: dass nämlich *überall, wo zwischen mehreren Veränderlichen Zusammenhang besteht, es möglich sein müsse, ihn in beständig gültiger Form darzustellen.*« La relation analytique la plus générale au sens de WEIERSTRASS entre deux variables peut être ramenée au cas où l'une est exprimée en série de puissances de l'autre. Au point de vue de WEIERSTRASS mon problème revient donc après avoir

[1] Pour la définition de l'étoile principale voir Note I, page 48, Note II, page 200.

[2] Je dois la connaissance de cette transcription à M. CARL ITZIGSOHN à Berlin.

défini la branche uniforme d'une fonction monogène la plus étendue possible à trouver une représentation arithmétique de cette branche possédant le caractère demandé d'être valable et de garder sa forme dans tout le domaine de la branche.

Dans les parties précédentes de ce mémoire je n'ai employé, que les considérations les plus élémentaires sur la série des puissances et n'ai jamais eu recours à l'intégrale de CAUCHY. En s'appuyant cependant sur la théorie de l'intégration entre des limites imaginaires on a l'avantage d'obtenir un terme complémentaire déterminé parfaitement analogue à celui obtenu par CAUCHY dans le cas du développement de TAYLOR. La démonstration de mes théorèmes se présente en même temps sous une forme extrêmement simple. C'est ce que je me propose de montrer dans le premier paragraphe de ce mémoire.

En partant de l'intégrale de CAUCHY on obtient encore d'une manière fort simple l'expression d'une branche fonctionnelle au moyen de cette intégrale célèbre de LAPLACE [1] qui à fait l'objet d'un des mémoires les plus suggestifs d'ABEL [2] et dont des nouvelles propriétés les plus remarquables ont été découvertes en ces dernières années par M. BOREL. [3]

M. BOREL a montré que l'intégrale de LAPLACE-ABEL est valable dans une étoile qu'il appelle le polygone de sommabilité. M. PHRAGMÉN [4] de son côté a montré que ce polygone de sommabilité est en même temps une étoile de convergence. Je montrerai dans le paragraphe 2 qu'on obtient au moyen d'une légère modification une intégrale possèdant une étoile de convergence $A^{(\alpha)}$ qui s'approche indéfiniment de l'étoile principale A en même temps que α tend vers zéro. Pour $\alpha = 1$ cette étoile devient le polygone de sommabilité de M. BOREL.

---

[1] *Théorie analytique des probabilités.* (Oeuvres, Tome 7.) Livre premier. Seconde partie.

[2] *Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes.* (SYLOW et LIE, Oeuvres d'ABEL t. 2, pag. 67—81.)

[3] *Leçons sur les séries divergentes.* Paris 1901.

[4] *Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie* $\int_0^\infty F(ax)^{-a}\,da$. (Comptes rendus etc. 10 juin 1901.)

§ 1

Soit

$$(1) \qquad v = f(u \mid \alpha)$$

une transformation biuniforme transformant le cercle $|u| < R$, $R > 1$, en une surface finie et simplement connexe, et supposons que les points $u = 0$, $v = 0$ ainsi que $u = 1$, $v = 1$ se correspondent.

Soit encore:

$$(2) \qquad f(u \mid 1) = u.$$

Considérons l'intégrale

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a + (x - a)f(y \mid \alpha))}{y - u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy,$$

où S représente le contour d'une surface simplement connexe pour laquelle $f(y \mid \alpha)$ ainsi que $F(a + (x - a)f(y \mid \alpha))$ sont des fonctions monogènes et régulières de y, et qui renferme dans son intérieur les deux points $y = 0$, $y = u$. On suppose l'intégrale prise dans le sens positif.

On a:

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a + (x - a)f(y \mid \alpha))}{y - u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy$$

$$= F(a + (x - a)f(u \mid \alpha)) + \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(a + (x - a)f(y \mid \alpha))}{y - u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy,$$

l'intégrale $\int^{(0)}$ étant prise dans le sens positif autour du point $y = 0$. Posons maintenant:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(a + (x - a)f(y \mid \alpha))}{y - u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(a) + \frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x - a)f(y \mid \alpha) + \frac{1}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x - a)^2 f(y \mid \alpha)^2 + \ldots}{y - u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy.$$

Nous avons supposé $\frac{1}{y} f(y \mid \alpha)$ fini pour $y = 0$. Par suite

$$(5) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(a + (x - a) f(y \mid \alpha))}{y - u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(a) + \frac{1}{|\underline{1}} F^{(1)}(a)(x-a) f(y|\alpha) + \frac{1}{|\underline{2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 f(y|\alpha)^2 + \cdots + \frac{1}{|\underline{n}} F^{(n)}(a)(x-a)^n f(y|\alpha)^n}{y - u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy.$$

En faisant alors:

$$(6) \qquad g_{\mu n}(u \mid \alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{(f(y \mid \alpha))^\mu}{y - u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy$$

on obtient:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(a + (x - a) f(y \mid \alpha))}{y - u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy \\ & = g_{0n}(u \mid \alpha) F(a) + \frac{g_{1n}(u \mid \alpha)}{|\underline{1}} F^{(1)}(a)(x - a) + \frac{g_{2n}(u \mid \alpha)}{|\underline{2}} F^{(2)}(a)(x - a)^2 + \ldots \\ & \quad + \frac{g_{nn}(u \mid \alpha)}{|\underline{n}} F^{(n)}(a)(x - a)^n. \end{aligned} \right.$$

En se rappelant la correspondance entre les deux points $u = 0$, $v = 0$ et en posant:

$$(8) \qquad D^{(\nu)} f^\mu = [D^{(\nu)} (f(y \mid \alpha))^\mu]_{y=0},$$

on voit que:

$$(9) \qquad g_{\mu n}(u \mid \alpha) = \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{|\underline{\mu}} \cdot u^\mu + \frac{D^{(\mu+1)} f^\mu}{|\underline{\mu + 1}} \cdot u^{\mu+1} + \ldots + \frac{D^{(n)} f^\mu}{|\underline{n}} \cdot u^n.$$

On a encore:

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} & g_{nn}(u \mid \alpha) = 1, \\ & g_{\mu 0}(u \mid \alpha) = 0. \end{aligned} \right.$$

On obtient donc:

$$
(11)\quad \left\{\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1}dy \\
&= F(a)+\sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{\underline{|\mu}}\left(\frac{D^{(\mu)}f^{\mu}}{\underline{|\mu}}\,.\,u^{\mu}+\frac{D^{(\mu+1)}f^{\mu}}{\underline{|\mu+1}}\,.\,u^{\mu+1}+\dots+\frac{D^{(n)}f^{\mu}}{\underline{|n}}\,.\,u^{n}\right)F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}
\end{aligned}\right.
$$

et par suite en vertu de (4):

$$
(12)\quad \left\{\begin{aligned}
&F(a+(x-a)f(u\,|\,\alpha)) = F(a) \\
&+\sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{D^{(\mu)}f^{\mu}}{\underline{|\mu}}\,.\,u^{\mu}+\frac{D^{(\mu+1)}f^{\mu}}{\underline{|\mu+1}}\,u^{\mu+1}+\dots+\frac{D^{(n)}f^{\mu}}{\underline{|n}}\,.\,u^{n}\right).\,F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \\
&+\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1}dy\,;
\end{aligned}\right.
$$

ou en ordonnant l'expression (11) suivant les puissances de u

$$
(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&F(a+(x-a)f(u\,|\,\alpha)) = F(a) \\
&+\sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{\underline{|\mu}}\left(\frac{D^{(\mu)}f}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\frac{D^{(\mu)}f^{2}}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^{2}+\dots+\frac{D^{(\mu)}f^{\mu}}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)u^{\mu} \\
&+\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1}dy\,.
\end{aligned}\right.
$$

On obtient donc en supposant $u = 1$, et en introduisant:

$$
(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&\alpha_{\mu n}(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{(f(y\,|\,\alpha))^{\mu}}{y-1}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1}dy \\
&= \frac{D^{(\mu)}f^{\mu}}{\underline{|\mu}}+\frac{D^{(\mu+1)}f^{\mu}}{\underline{|\mu+1}}+\dots+\frac{D^{(n)}f^{\mu}}{\underline{|n}}
\end{aligned}\right.
$$

la formule suivante:

$$
(15)\quad
\begin{cases}
F(x) = F(a) + \dfrac{a_{1n}(a)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \dfrac{a_{2n}(a)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots \\[2ex]
\qquad + \dfrac{a_{\mu n}(a)}{\underline{|n}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int^{S} \dfrac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-1}\left(\dfrac{1}{y}\right)^{n+1} dy \\[2ex]
= F(a) + \displaystyle\sum_{\mu=1}^{n} \dfrac{1}{\underline{|\mu}}\left(\dfrac{D^{(\mu)}f}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \dfrac{D^{(\mu)}f^2}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots\right. \\[2ex]
\qquad \left. + \dfrac{D^{(\mu)}f^\mu}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int^{S} \dfrac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-1}\left(\dfrac{1}{y}\right)^{n+1} dy.
\end{cases}
$$

En ayant égard la formule (9) ainsi qu'à la définition de $f(u|\alpha)$ et à la correspondance des points $u = 1$, $v = 1$, on obtient

$$
(16)\qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \alpha_{\mu n}(\alpha) = 1,
$$

égalité qui a lieu pour chaque valeur donnée de μ.

Employons maintenant la fonction génératrice $f(u|\alpha)$, $|u| \leq 1$, pour former une étoile $A^{(\alpha)}$ inscrite dans l'étoile principale A des constantes

$$
F(a),\ F^{(1)}(a),\ F^{(2)}(a),\ \dots,\ F^{(\mu)}(a)\ \dots\ [1]
$$

Soit X un domaine fini quelconque situé à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$. Il existera toujours une étoile E de centre a qui renfermera X et qui sera elle-même située à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$.[2] Si l'on fait parcourir à x l'étoile E l'ensemble $\overline{E}$ de tous les points différents Z qu'on obtient en faisant

$$
z = a + (x-a)f(u|\alpha); \qquad |u| \leq r; \qquad 1 < r < R
$$

comdrendra l'étoile E et restera en même temps situé à l'intérieur de A, si r est choisi suffisamment rapproché de l'unité.

[1] Note 1, page 48. Note 2, page 200. Note 3, page 219.

[2] Note 1, page 50. A la dixième ligne de la page il y a une faute d'impression. Il faut lire $\mathfrak{E}$ au lieu de E.

En introduisant pour S le contour C qui représente la circonférence $|y| = r$ on peut écrire la formule (15) sous la forme suivante:

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
FA^{(\alpha)}(x) &= F(a) + \frac{a_{1n}(\alpha)}{|\underline{1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{a_{2n}(\alpha)}{|\underline{2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots \\
&\quad + \frac{a_{nn}(\alpha)}{|\underline{n}} F^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{1}{2\pi i}\int^{C} \frac{F(a+(x-a)f(y|\alpha))}{y-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy \\
&= F(a) + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{|\underline{\mu}}\left(\frac{D^{(\mu)}f}{|\underline{1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{D^{(\mu)}f^2}{|\underline{\mu}} F^{(2)}(a)(x-a) + \ldots\right. \\
&\quad \left. + \frac{D^{(\mu)}f^n}{|\underline{\mu}} F^{(n)}(a)(x-a)^n\right) + \frac{1}{2\pi i}\int^{C} \frac{F(a+(x-a)f(y|\alpha))}{y-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy
\end{aligned}
\right.
$$

et cette égalité fondamentale aura lieu pour tous les points x qui appartiennent à un domaine X situé à l'intérieur de l'étoile $A^{(\alpha)}$. En faisant $\alpha = 1$ la formule (17) deviendra le développement de TAYLOR avec le terme complémentaire de CAUCHY.

On a en effet (voir 2)

$$f(y\,|\,1) = y; \qquad \alpha_{\mu n}(1) = 1; \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Le terme complémentaire devient:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{C} \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy = \frac{1}{2\pi i}\int^{\overline{C}} \frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n+1} dz$$

où $\overline{C}$ est un cercle de centre a qui embrasse le point x et se trouve en même temps à l'intérieur de l'étoile $A^{(1)}$ qui de son côté n'est autre chose que le cercle de convergence du développement de TAYLOR. C'est la forme connue de CAUCHY du terme complémentaire dans le cas où x représente une variable complexe.

Revenons au cas général. Nous avons vu que le rayon r de C étant pris suffisamment rapproché de l'unité, $F(a + (x-a)f(y\,|\,\alpha))$ appartient toujours à un domaine $\overline{E}$ situé à l'intérieur de l'étoile principale A.

La valeur absolue de $\dfrac{F(a + (x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-1}$ possède, par conséquent, une limite supérieure finie lorsque y parcourt la circonférence C. En faisant

grandir n suffisamment on pourra donc rendre la valeur absolue du terme complémentaire inférieure à toute quantité positive donnée si petite qu'elle soit.

Par conséquent l'égalité:

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} FA^{(a)}(x) &= F(a) + \lim_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{a_{\mu n}(\alpha)}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \\ &= F(a) + \lim_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{\underline{|\mu}} \left(\frac{D^{(\mu)} f}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{D^{(\mu)} f^2}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{D^{(\mu)} f^{\mu}}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \end{aligned}\right.$$

a lieu pour tout point à l'intérieur de $A^{(a)}$.

La valeur limite:

$$(19)\qquad \lim_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{a_{\mu n}(\alpha)}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}$$

$$= \lim_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{\underline{|\mu}} \left(\frac{D^{(\mu)} f}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{\underline{|5}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{D^{(\mu)} f^{\mu}}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right)$$

est encore uniformément convergente pour tout domaine X à l'intérieur de $A^{(a)}$.

Supposons inversement que la valeur limite (19) soit convergente pour $x = x_0$. L'identité:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{\underline{|\mu}} \left(\frac{D^{(\mu)} f}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x_0-a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x_0-a)^2 + \cdots + \frac{D^{(\mu)} f^{\mu}}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x_0-a)^{\mu} \right)$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} \left(\frac{D^{(\mu)} f}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x_0-a) + \frac{D^{(2)} f^2}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x_0-a)^2 + \cdots + \frac{D^{(\mu)} f^{\mu}}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x_0-a)^{\mu} \right)$$

ayant lieu, il s'en suit en vertu d'un théorème d'Abel [1] que la valeur limite:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{\underline{|\mu}} \left(\frac{D^{(\mu)} f}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x_0-a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x_0-a)^2 + \cdots + \frac{D^{(\mu)} f^{\mu}}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x_0-x)^{\mu} \right)$$

[1] Oeuvres. Nouvelle édition. (Sylow et Lie.) Page 223. Théorème V.

sera convergente pour $|u| < 1$. En se rappelant que $f(0|\alpha) = 0$, on voit que l'égalité (13) a lieu pour $x = x_0$ si l'on donne à $|u|$ des valeurs suffisamment petites. On voit encore qu'en choisissant pour S un contour comprenant le cercle de centre zéro et de rayon $|u|$ on obtiendra

$$F(a + (x_0 - a)f(u|\alpha))$$

$$= \lim_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{u^\mu}{\underline{|\mu}} \Big(\frac{D^{(\mu)} f}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x_0 - a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x_0 - a)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x_0 - a)^\mu \Big)$$

Le second membre étant convergent pour $|u| < 1$, il s'ensuit que le premier membre est une fonction régulière de u pour $|u| < 1$. Par suite en vertu de la définition de l'étoile $A^{(\alpha)}$, le point x_0 est nécessairement ou un sommet de $A^{(\alpha)}$ ou un point à l'intérieur de cette étoile.

En nous rappelant encore (voir note 3) que la fonction génératrice $f(u|\alpha)$ peut être choisie telle que $A^{(\alpha)}$ tende indéfiniment vers A en même temps que α tend vers zéro et telle que les $\alpha_{\mu n}(\alpha)$ soient tous des nombres positifs, nous pouvons résumer les résultats obtenus jusqu'ici sous cette nouvelle forme du théorème 4:

Théorème 4 a. *Désignons par A une étoile de centre a, par α une quantité positive inférieure à l'unité et par $A^{(\alpha)}$ une étoile concentrique à A et inscrite dans A qui sera engendrée par la fonction génératrice $f(u|\alpha)$. On pourra toujours choisir cette fonction telle que α étant pris suffisamment petit l'étoile $A^{(\alpha)}$ renferme à son inténieur un domaine donné quelconque situé à l'intérieur de A et telle que pour $\alpha = 1$ l'étoile $A^{(1)}$ devienne le cercle concentrique à A et inscrite dans A. De plus A étant l'étoile principale d'une suite de constantes*

$$F(a),\ F^{(1)}(a),\ \ldots,\ F^{(\mu)}(a),\ \ldots$$

assujetties à la condition de Cauchy, on pourra choisir $f(u|\alpha)$ en sorte que l'expression limite

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{\alpha_{nn}(\alpha)}{\underline{|n}} F^{(n)}(a)(x-a)^n \right],$$

où

$$\alpha_{\mu n}(\alpha); \qquad \begin{aligned} \mu &= 1, 2, \ldots, n, \\ n &= 1, 2, 3, \ldots, \infty \end{aligned}$$

sont des constantes positives déterminées jouissant toujours des deux propriétés

$$\alpha_{\mu n}(1) = 1, \qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \alpha_{\mu n}(\alpha) = 1$$

et ne dépendant par suite que de la fonction génératrice, possède une étoile de convergence identique à $A^{(\alpha)}$ *et telle que l'égalité*

$$FA(x) = F(a) + \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left[\frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{\alpha_{nn}(\alpha)}{\underline{|n}} F^{(n)}(a)(x-a)^n\right]$$

ait lieu partout à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$. *L'expression limite double:*

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left[\frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{\alpha_{nn}(\alpha)}{n} F^{(n)}(a)(x-a)^n\right]$$

a une étoile de convergence identique à l'étoile A *et l'égalité*

$$FA(x) = F(a) + \operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left[\frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(a-x) + \frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{\alpha_{\mu n}(\alpha)}{\underline{|n}} F^{(n)}(a)(x-a)^n\right]$$

a lieu partout à l'intérieur de A.

Si l'on s'arrête dans le passage à la limite à un nombre déterminé n *on aura l'égalité*

$$FA(x)$$

$$= F(a) + \frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{\underline{1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{\alpha_{\mu n}(\alpha)}{\underline{|\mu}} F^{(n)}(a)(x-a)^n$$

$$+ \int^{C} \frac{F(a + (x-a)f(y \mid \alpha))}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy$$

l'intégrale étant prise dans le sens positif et C *désignant une circonférence*

de centre zéro et de rayon $r (1 < r < R)$ *en sorte que* $a + (x - a) f(y \mid \alpha)$ *appartient à l'intérieur de l'étoile* $A^{(\alpha)}$.

Au lieu de l'intégrale (3) on aurait pu prendre comme point de départ d'autres intégrales par exemple

$$\frac{\left(\frac{df_1(u \mid \alpha)}{du}\right)_{u=1}}{2\pi i} \int^{c} \frac{F(a + (x - a) f(y \mid \alpha))}{f_1(y \mid \alpha) - 1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy$$

où $f_1(u \mid \alpha)$ est une fonction ayant les mêmes propriétés que $f(u \mid \alpha)$ et ayant encore cette propriété que

$$\left(\frac{df_1(u \mid \alpha)}{du}\right)_{u=1}$$

n'est pas égale à zéro. Les constantes $\alpha_{\mu n}(\alpha)$ deviennent en ce cas

$$\alpha_{\mu n}(\alpha) = - \frac{\left(\frac{df_1(u \mid \alpha)}{du}\right)_{u=1}}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{(f(y \mid \alpha))^{\mu}}{f_1(y \mid \alpha) - 1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy; \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots, n$$

et elles conservent les deux propriétés

$$\alpha_{\mu n}(1) = 1, \qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \alpha_{\mu n}(\alpha) = 1.$$

Mais il ne semble pas nécessaire que l'étoile $A^{(\alpha)}$ reste une étoile de convergence pour chaque choix de $f(u \mid \alpha)$.

Les développements que j'ai donnés dans ma troisième note se rapportent spécialement à une certaine fonction génératrice au moyen de laquelle on obtient une construction géométrique très-simple de l'étoile A.

Les nombres $\alpha_{\mu n}(\alpha)$; $\begin{matrix} \mu = 1, 2, \ldots, n \\ n = 1, 2, 3, \ldots, \infty \end{matrix}$ se calculent alors par des formules de recurrences.

M. Fredholm[1] a proposé pour fonction génératrice la fonction

$$f(u \mid \alpha) = \frac{\log (1 - (1 - \alpha) u)}{\log \alpha}$$

[1] G. Mittag-Leffler. *Sur une formule de M. Fredholm.* Comptes rendus etc. 25 mars 1901.

Ivar Fredholm. *Sur la méthode de prolongement analytique de M. Mittag-Leffler.* Öfversigt af Kongl. Vet. Ak. Förhandl. 13 mars 1901.

et il obtient alors l'élégant développement:

$$FA^{(\alpha)}(x) = F(a) + \lim_{n=\infty} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{(1-\alpha)^{\mu}}{|\mu} \Big[h_{\mu-1}^{(\mu)} F^{(1)}(a) \frac{x-a}{H} + \ldots$$

$$+ h_1^{(\mu)} F^{(\mu-1)}(a)\left(\frac{x-a}{H}\right)^{\mu-1} + F^{(\mu)}(a)\left(\frac{x-a}{H}\right)^{\mu}\Big]$$

où

$$H = \log \frac{1}{\alpha}$$

et où les constantes $h_{\mu-1}^{(\mu)}, \ldots, h_1^{(\mu)}$ sont les coefficients de la faculté

$$\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+\mu-1)$$

c'est à dire des nombres entiers positifs définis par l'égalité:

$$\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+\mu-1) = \lambda^{\mu} + h_1^{(\mu)}\lambda^{\mu-1} + \ldots + h_{\mu-1}^{(\mu)}\lambda.$$

La construction géométrique de $A^{(\alpha)}$ devient cependant en ce cas moins simple que si l'on employait comme dans ma troisième note, la figure cordiforme. Les formules explicites pour les coefficients de la faculté sont de même d'une très-grande complication.[1]

C'est donc un problème qui n'est pas dépourvu d'intérêt de trouver une fonction génératrice pour laquelle les expressions explicites des constantes

$$\alpha_{\mu n}(\alpha); \quad \begin{array}{l} \mu = 1, 2, \ldots, n, \\ n = 1, 2, 3, \ldots, \infty \end{array}$$

soient suffisamment simples.

On trouve une solution de ce problème en introduisant comme fonction génératrice

$$(20) \qquad v = f(u\,|\,\alpha) = \frac{\alpha u}{\left(1-\frac{u}{R}\right)^{\alpha}}; \qquad \frac{1}{R} = 1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}}.$$

On voit que la transformation $v = f(u\,|\,\alpha)$ est biuniforme pour $|u| < R$ et que les points $u = 0$, $v = 0$ ainsi que $u = 1$, $v = 1$ se correspondent.

[1] Oscar Schlömilch. *Compendium der höheren Analysis.* Zweiter Band. Dritte Auflage. Page 23—31.

On voit encore que $u = -1$, $v = -\frac{a}{\left(2 - a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}}$ se correspondent. Le point v qui correspond à $u = -1$ est donc situé sur le prolongement du vecteur (01) au delà de zéro et tend vers zéro avec α. Il est encore facile de voir que l'image du cercle $|u| = 1$ décrite par v s'aplatit indéfiniment en même temps que α tend vers zéro. En effet si l'on pose

$$1 - \frac{e^{i\vartheta}}{R} = \rho e^{i\theta}$$

on aura

$$v = x + iy = \frac{a}{\rho^{\alpha}} e^{i(\vartheta - \alpha\theta)}$$

et par suite

$$y = \frac{a}{\rho^{\alpha}} \sin(\vartheta - \alpha\theta),$$

$$\frac{dy}{d\vartheta} = \frac{a}{\rho^{\alpha}}\left[\cos(\vartheta - \alpha\theta) + \frac{\alpha}{R\rho}\cos(2\vartheta - (1 + \alpha)\theta)\right].$$

On voit d'un côté que $\frac{1}{\rho}$ diminue constamment depuis $\vartheta = 0$ jusqu'à $\vartheta = \pi$ et d'un autre côté que $\frac{dy}{d\vartheta}$ étant positif entre $\vartheta = 0$ et $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ la valeur de y augmente depuis zéro jusqu'à

$$\frac{a}{\left[2\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) - a^{\frac{1}{\alpha}}\left(2 - a^{\frac{1}{\alpha}} - 2\cos\frac{\pi}{4}\right)\right]^{\frac{\alpha}{2}}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\theta_{\frac{\pi}{4}}\right)$$

où $\theta_{\frac{\pi}{4}}$ est la valeur de θ correspondant à $\vartheta = \frac{\pi}{4}$. Considérons maintenant y. Le facteur $\frac{a}{\rho^{\alpha}}$ va en diminuant depuis $\vartheta = 0$ jusqu'à $\vartheta = \pi$. L'autre facteur $\sin(\vartheta - \alpha\theta)$ augmente au contraire depuis $\vartheta = 0$ jusqu'à $\vartheta = \frac{\pi}{4}$. Il en sera de même de y. La quantité

$$\frac{a}{\left[2\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) - a^{\frac{1}{\alpha}}\left(2 - a^{\frac{1}{\alpha}} - 2\cos\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2}}$$

est donc évidemment une quantité plus grande que la valeur maxima de y. Mais cette quantité tend indéfiniment vers zéro avec la quantité α.

Il est donc démontré que l'image du cercle $|u| = 1$ décrit par v tend indéfiniment vers la ligne droite menée de $v = 0$ à $v = 1$ lorsque α tend indéfiniment vers zéro. La fonction génératrice possède par conséquent toutes les propriétés énoncées dans le théorème 4.

Faisons maintenant le calcul des constantes $\alpha_{\mu n}(\alpha)$. La formule (14) nous donne immédiatement

$$(21)\qquad \alpha_{\mu n}(\alpha) = \alpha^{\mu}\left(1 + \frac{a}{\lfloor 1}\left(1 - \alpha^{\frac{1}{a}}\right) + \frac{a(a+1)}{\lfloor 2}\left(1 - \alpha^{\frac{1}{a}}\right)^2 + \ldots + \frac{a(a+1)\ldots(a+n-\mu-1)}{\lfloor n-\mu}\left(1 - \alpha^{\frac{1}{a}}\right)^{n-\mu}\right).$$

En faisant $\alpha = \frac{1}{n}$ on obtient l'expression très-simple

$$(22)\qquad F(a) + \operatorname{Lim}_{n=\infty} \left| \frac{\alpha_{1n}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 1} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{\alpha_{2n}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{\alpha_{nn}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lfloor n} F^{(n)}(a)(x-a)^n \right|$$

qui représente $FA(x)$ à l'intérieur de l'étoile principale A et qui converge en même temps uniformément pour chaque domaine à l'intérieur de A. L'étoile A cependant comme l'a fait voir M. Borel [1] n'est pas en général une étoile de convergence de cette expression; au contraire nous avons vu que c'est toujours une étoile de convergence de l'expression limite double

$$F(a) + \operatorname{Lim}_{\alpha=0}\operatorname{Lim}_{n=\infty} \left\{ \frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{\lfloor 1} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{\lfloor 2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{\alpha_{nn}(\alpha)}{\lfloor n} F^{(n)}(a)(x-a)^n \right\}$$

qui aussi bien que (22) représente $FA(x)$, à l'intérieur de A.

[1] Emile Borel. *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles.* Ce journal t. 24, page 309 et suivantes. Voir notre troisième note, T. 24, page 243.

§ 2.

Les résultats obtenus précédemment proviennent tous de l'étude de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y\mid a))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1}dy.$$

Si l'on introduit dans cette intégrale au lieu du facteur $\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1}$ un autre facteur conservant la propriété d'être égal à l'unité pour $y=u$ et d'avoir $y=0$ pour seul point singulier on obtient d'autres résultats non moins remarquables.

Nous choisirons dans ce paragraphe pour multiplicateur $e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}$, ω désignant une constante positive et c'est l'intégrale

$$(23)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y\mid a))}{y-u}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}dy$$

qui sera l'objet de notre étude. Il convient de commencer par le cas le plus simple

$$f(y\mid \alpha)=y,\qquad u=1$$

et d'étudier l'intégrale

$$(24)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy.$$

Nous supposerons comme dans le premier paragraphe que S représente le contour d'une surface simplement connexe pour laquelle $F(a+(x-a)y)$ est une fonction monogène et régulière et renfermant à son intérieur les deux points $y=0$, $y=1$.

On a

$$(25)\quad \frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy=F(x)+\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy.$$

On a encore

$$-\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}\,e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}\,dy$$

$$=\frac{e^{-\omega}}{2\pi i}\int^{(0)}\Big\{F(a)+\Big(F(a)+\frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)y\Big)$$

$$+\Big(F(a)+\frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2\Big)y^2+\ldots\Big\}.$$

$$\Big\{1+\frac{1}{\underline{|1}}\frac{\omega}{y}+\frac{1}{\underline{|2}}\Big(\frac{\omega}{y}\Big)^2+\frac{1}{\underline{|3}}\Big(\frac{\omega}{y}\Big)^3+\ldots\Big\}.dy$$

$$=e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\Big(F(a)+\frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\ldots$$

$$+\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\Big)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}.$$

La série

$$(26)\qquad \sum_{\mu=0}^{\infty}\Big(F(a)+\frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\ldots+\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\Big)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$

est convergente pour chaque point auquel correspond un contour S.[1]

---

[1] En réalité la série est toujours absolument convergente pour toute valeur de x et de ω. On peut le voir de la manière suivante qui m'a été indiquée par M. PHRAGMÉN. Soit une quantité positive plus petite que le rayon de convergence de la série $\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}$ et soit g la valeur maxima de $\left|\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right|$ pour $|x|=r$.

On aura alors

$$\left|\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)\right|\leq gr^{-\mu}.$$

Par suite x étant quelconque

$$\sum\left|\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right|\leq g\,\frac{1-\left(\frac{|x-a|}{r}\right)^{\mu+1}}{1-\frac{|x-a|}{r}}.$$

On a donc:

$$(27)\quad F(x)=e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\ldots+\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy$$

égalité valable pour chaque point auquel correspond un contour S.

En vertu de la convergence de la série (26) on a

$$(28)\quad \lim_{n=\infty}\left(F(a)+\frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\ldots+\frac{1}{\underline{|n}}F^{(n)}(a)(x-a)^{n}\right)\frac{\omega^{n+1}}{\underline{|n+1}}=0.$$

Par suite en observant que:

$$(29)\quad \frac{e^{-\omega}\omega^{\mu}}{\underline{|\mu}}=\int_{0}^{\omega}\left(\frac{e^{-\omega}\omega^{\mu-1}}{\underline{|\mu-1}}-\frac{e^{-\omega}\omega^{\mu}}{\underline{|\mu}}\right)d\omega$$

on voit que

$$(30)\quad F(x)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\int_{0}^{\omega}e^{-\omega}\omega^{\mu}d\omega}{(\underline{|\mu})^{2}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy.$$

D'où

$$\sqrt[n]{\left(\sum_{\mu=0}^{n}\left|\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right|\right)\frac{1}{\underline{|n+1}}}\leq\sqrt[n]{g\,\frac{1-\left(\frac{|x-a|}{r}\right)^{n+1}}{1-\frac{|x-a|}{r}}}.$$

D'où

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{\sum_{\mu=0}^{n}\left|\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right|\cdot\frac{1}{\underline{|n+1}}}=0.$$

Par suite etc. etc.

On aurait pu obtenir aussi bien les deux formules fondamentales (27) et (30) en prenant comme point de départ l'identité:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}\, e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}\left[\left(\frac{1}{y}-1\right)\int_0^{\omega} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}\,d\omega + 1\right]dy$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}\,dy - \frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}\left(\int^{\omega} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}\,d\omega\right)dy$$

$$= F(x) - \frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}\left(\int^{\omega} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}\,d\omega\right)dy.$$

La série:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{F^{(\mu)}(a)}{(\underline{|\mu})^2}\,(\omega(x-a))^{\mu}$$

est évidemment une série toujours convergente par rapport à ω.

Par conséquent

$$(31)\qquad \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega}\omega^{\mu}\,d\omega}{(\underline{|\mu})^2}\, F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} = \int_0^{\omega} e^{-\omega}\left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{F^{(\mu)}(a)}{(\underline{|\mu})^2}\cdot(\omega(x-a))^{\mu}\right)d\omega$$

ou en faisant

$$(32)\qquad F(a\,,\,\omega(x-a)) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{F^{(\mu)}(a)}{(\underline{|\mu})^2}\,(\omega(x-a))^{\mu}$$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega}\omega^{\mu}\,d\omega}{(\underline{|\mu})}\, F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} = \int_0^{\omega} e^{-\omega}\,\mathfrak{F}(a\,,\,\omega(x-a))\,d\omega.$$

Par conséquent:

$$(33)\qquad F(x)=\int_0^\omega e^{-\omega}\mathfrak{F}(a\,,\,\omega(x-a))d\omega+\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy$$

nouvelle formule qui mérite d'être regardée comme fondamentale en même temps que les formules (27) et (30).

Nous voulons construire maintenant de la manière suivante une étoile $A^{(1)}$ inscrite dans l'étoile principale A des constantes

$$F(a)\,,\,F^{(1)}(a)\,,\,F^{(2)}(a)\,,\,\ldots,\,F^{(\mu)}(a)\,,\,\ldots.$$

Fixons un vecteur l issu du centre a et limitons ce vecteur à la longueur $\mathfrak{r}$. En prenant $\mathfrak{r}$ suffisamment petit, le cercle ayant cette portion de l comme diamètre fera partie de A. En désignant par ρ la limite supérieure de $\mathfrak{r}$, en portant sur l la longueur ρ et en faisant tourner l une fois autour de a on aura construit l'étoile $A^{(1)}$.

Choisissons maintenant pour S une circonférence $\mathfrak{C}$ de centre $y=\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}r$; $r>1$. On tire alors des formules (27), (30) et (33) les trois égalités suivantes:

$$(34)\left\{\begin{aligned}
FA^{(1)}(x)&=e^{-\omega}\sum_0^\infty\left(F(a)+\frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\ldots\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy,\\
FA^{(1)}(x)&=\sum_{\mu=0}^\infty\frac{\int_0^\omega e^{-\omega}\omega^\mu d\omega}{(\underline{|\mu})^2}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\\
&\qquad+\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy\\
FA^{(1)}(x)&=\int_0^\omega e^{-\omega}F(a+\omega(x-a))d\omega+\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy
\end{aligned}\right.$$

qui sont toutes trois valables pour un domaine X quelconque situé à l'intérieur de $A^{(1)}$, pourvu que le diamètre $\mathfrak{r}$ soit pris suffisamment rapproché de l'unité.

Les séries:

$$(26)\qquad \sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{1}{|\underline{1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\ldots+\frac{1}{|\underline{\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu+1}},$$

$$(31)\qquad \sum^{\infty}\frac{\int_0^{\omega}e^{-\omega}\omega^{\mu}d\omega}{(|\underline{\mu})^2}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu},$$

$$(32)\qquad \mathfrak{F}(a\,,\ \omega(x-a))=\sum^{\infty}\frac{F^{(\mu)}(a)}{(|\underline{\mu})^2}(\omega(x-a))^{\mu}$$

sont uniformément convergentes pour le domaine X. Elles sont encore toujours et absolument convergentes tant par rapport à x que par rapport à ω.

La partie réelle de $\frac{1}{y}-1$ lorsque y décrit le contour de $\mathfrak{C}$, étant égale à

$$\frac{1-\mathfrak{r}^2}{(1-\mathfrak{r})^2+2\mathfrak{r}(1+\cos\varphi)}$$

où on a fait $y=\frac{1}{2}+\frac{\mathfrak{r}}{2}e^{i\varphi}$, on voit que cette partie réelle reste toujours négative.

On a par conséquent

$$(35)\qquad \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathfrak{C}}\frac{F(a+(x-a)y)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy=0.$$

En choisissant $\mathfrak{r}$ suffisamment rapproché de l'unité la convergence vers zéro de cette expression limite devient uniforme pour tout domaine X à l'intérieur de $A^{(1)}$.

On tire alors de (34) les trois formules

$$(36)\qquad FA^{(1)}(x)$$

$$\operatorname*{Lim}_{\infty}e^{-\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{1}{|\underline{1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\ldots+\frac{1}{|\underline{n}}F^{(n)}(a)(x-a)^{n}\right)\frac{\omega^{n+1}}{|\underline{n+1}},$$

$$(37) \qquad FA^{(1)}(x) = \lim_{\omega=\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_0^\omega e^{-\omega}\omega^n d\omega}{\lfloor n} F^{(n)}(a)(x-a)^n,$$

$$(38) \qquad FA^{(1)}(x) = \int_0^\infty e^{-\omega}\mathfrak{F}(a\,,\,\omega(x-a))d\omega$$

toutes trois valables à l'intérieur de $A^{(1)}$. Les seconds termes de chacune de ces trois égalités sont uniformément convergents pour chaque domaine X à l'intérieur de $A^{(1)}$.

La formule (36) est due à M. Borel.[1] La formule (38) est la célèbre formule de Laplace-Abel.[2] La fonction $\mathfrak{F}(a\,,\,\omega(x-a))$ est la fonction qu'Abel nomme »la fonction génératrice» tandis que la branche fonctionnelle $FA^{(1)}(x)$ est »la fonction déterminante». C'est à M. Borel que revient l'honneur d'avoir découvert le premier ce fait important que l'intégrale de Laplace-Abel

$$(39) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega}\mathfrak{F}(a\,,\,\omega(x-a))d\omega$$

est convergente partout à l'intérieur de l'étoile $A^{(1)}$ qui d'ailleurs est une étoile circonscrite au cercle de convergence de la série de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor n} F^{(n)}(a)(x-a)^n$$

et qui ne coïncide avec ce cercle qu'en des cas spéciaux.

J'ai donné le développement que je viens d'établir, dans une lettre à Hermite écrite peu de temps après la première publication de M. Borel.[3]

Une question importante restait encore ouverte après les recherches de M. Borel. Il était bien démontré que l'intégrale (39) avait un sens

---

[1] voir: *Leçons sur les séries divergentes.* Paris 1901.

[2] Laplace. *Théorie analytique des probabilités.* (Oeuvres. T. VII.) Livre premier. Seconde partie.

Abel. *Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes.* (Sylow et Lie. Oeuvres II, 67—81.)

[3] *Fondements de la théorie des séries divergentes sommables.* Journal des Math. Série V, t. 2, 1896.

partout à l'intérieur de l'étoile $A^{(1)}$, mais on ne savait pas si l'intégrale possédait ou non une étoile de convergence. C'est M. Phragmén [1] qui a élucidé cette question en démontrant que l'étoile $A^{(1)}$ est une étoile de convergence des trois expressions

$$(39) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega}\mathfrak{F}(a\,,\,\omega(x-a))d\omega,$$

$$(40) \qquad \lim_{\omega=\infty} e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{1}{|\underline{1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\ldots+\frac{1}{|\underline{\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu+1}},$$

$$(41) \qquad \lim_{\omega=\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega}\omega^{\mu}d\omega}{(|\underline{\mu})}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}.$$

La démonstration de M. Phragmén peut être résumée ainsi:

Il démontre d'abord le théorème suivant:

»Supposons que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega t_0}\varphi(\omega)d\omega$$

où $\varphi(\omega)$ est une fonction réelle et uniforme et où t_0 est réel, soit convergente. Désignons par ε une quantité positive aussi petite que l'on voudra et par $R(t-t_0)$, la partie réelle de $t-t_0$, t étant réelle ou complexe.

L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega t}\varphi(\omega)d\omega$$

sera uniformément convergente pour $R(t-t_0)\geq\varepsilon$.»

En effet posons

$$\Phi(\omega)=\int_0^{\omega} e^{-\omega t_0}\varphi(\omega)d\omega,$$

[1] *Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie* $\int_0^\infty F(ax)e^{-a}da$. Comptes rendus etc. 10 juin 1901.

on aura, pour M positif et suffisamment grand,

$$|\Phi(\omega)| < M.$$

On a encore:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega t}\varphi(\omega)d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega(t-t_0)}e^{-\omega t_0}\varphi(\omega)d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega(t-t_0)}d\Phi(\omega).$$

En effectuant une intégration par partie il vient donc

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega t}\varphi(\omega)d\omega = \left[e^{-\omega(t-t_0)}\Phi(\omega)\right]_{\omega_1}^{\omega_2} + (t-t_0)\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega(t-t_0)}\Phi(\omega)d\omega.$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega t}\varphi(\omega)d\omega\right| &\leqq M(e^{-\omega_1\varepsilon}+e^{-\omega_2\varepsilon}) + |t-t_0| . M . \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega\varepsilon}d\omega \\ &= M(e^{-\omega_1\varepsilon}+e^{-\omega_2\varepsilon}) + \frac{|t-t_0|}{\varepsilon} . M . (e^{-\omega_1\varepsilon}-e^{-\omega_2\varepsilon}) \\ &< 2Me^{-\omega_1\varepsilon} + M\frac{|t-t_0|}{\varepsilon}e^{-\omega_1\varepsilon}.\end{aligned}$$

Le terme à droite deviendra aussi petit qu'on veut si l'on fait croître ω suffisamment. Le théorème est donc démontré.

Supposons maintenant que l'expression (40) soit convergente pour $x = x_0$. On a:

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_{\mu=0}^{\infty} e^{-\omega_2}\left(F(a) + \frac{1}{\lfloor 1}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{\lfloor \mu}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right)\frac{\omega_2^{\mu+1}}{\lfloor \mu+1} \\ &\qquad - \sum_{\mu=0}^{\infty} e^{-\omega_1}\left(F(a) + \frac{1}{\lfloor 1}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{\lfloor \mu}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right)\frac{\omega_1^{\mu+1}}{\lfloor \mu+1} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a) + \frac{1}{\lfloor 1}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{1}{\lfloor \mu}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right)\left(\frac{e^{-\omega_2}\omega_2^{\mu+1}}{\lfloor \mu+1} - \frac{e^{-\omega_1}\omega_1^{\mu+1}}{\lfloor \mu+1}\right) \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a) + \frac{1}{\lfloor 1}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{1}{\lfloor \mu}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right)\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left(\frac{e^{-\omega}\omega^\mu}{\lfloor \mu} - \frac{e^{-\omega}\omega^{\mu+1}}{\lfloor \mu+1}\right)d\omega \quad [\text{c. f. } (29)\end{aligned}\right.$$

$$
\left|
\begin{aligned}
&= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega}\omega^{\mu}\, d\omega}{(\lfloor\underline{\mu})^2} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \\
&= \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega}\mathfrak{F}(a\,,\ \omega(x-a))\,d\omega
\end{aligned}
\right.
$$

ou en faisant

$$\omega(x-a) = w, \tag{43}$$

$$\frac{1}{x-a} = t, \tag{44}$$

$$\mathfrak{F}(a\,,\ w) = \varphi(w) + i\psi(w), \tag{45}$$

$\varphi(w)$ et $\psi(w)$ étant réels, on aura

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega}\,\mathfrak{F}(a\,,\ \omega(x-a))\,d\omega &= t\int\limits_{w_1}^{w_2} e^{-wt}\mathfrak{F}(a\,,\ w)\,dw \\
&= t\left[\int\limits_{w_1}^{w_2} e^{-\omega t}\varphi(\omega)\,d\omega + i\int\limits_{w_2}^{w_2} e^{-\omega t}\psi(\omega)\,d\omega\right].
\end{aligned}
\tag{46}
$$

La condition nécessaire et suffisante pour que chacune des trois expressions (39), (40), (41) soit convergente est donc que le module de chacune des deux expressions

$$\int\limits_{w_1}^{w_2} e^{-\omega t}\varphi(\omega)\,d\omega, \qquad \int\limits_{w_1}^{w_2} e^{-\omega t}\psi(\omega)\,d\omega,$$

w_1 étant pris suffisamment grand et w_2 étant une quantité positive quelconque remplissant la condition $w_1 < w_2$, reste plus petite qu'une quantité positive donnée si petite qu'elle soit. Cette condition est supposée remplie pour $t_0 = \frac{1}{x_0 - a}$. D'après le théorème de M. Phragmén cette condition sera encore remplie pour

$$R\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x_0 - a}\right) = R(t - t_0) \geqq \varepsilon, \tag{47}$$

c'est à dire pour tous les points à l'intérieur d'un cercle ayant le vecteur (ax_0) pour diamètre.

L'intégrale

$$(39) \qquad \int_0^{\omega} e^{-\omega} \mathfrak{F}(a\,,\ \omega(x-a))\,d\omega$$

est donc une fonction monogène et régulière de x partout à l'intérieur de ce cercle. Le point x_0 est donc ou un sommet ou un point à l'intérieur de l'étoile $A^{(1)}$. Cette étoile de convergence de l'intégrale (39) est en même temps aussi en vertu de la formule (42) une étoile de convergence des deux autres expressions (40) et (41).

Les résultats obtenus jusqu'ici dans ce paragraphe peuvent être résumés dans le théorème suivant:

Théorème 7 a. *Désignons par A une étoile de centre a et par $A^{(1)}$ une autre étoile que nous appellerons l'étoile de Borel; cette étoile de Borel sera concentrique à A et inscrite dans A et sera engendrée de la manière suivante: On limite chacun des vecteurs l issu du centre a à une longueur ρ, limite supérieure d'une autre longueur $\mathfrak{r}$ limitant l elle même et telle que le cercle ayant $\mathfrak{r}$ comme diamètre fasse partie de A.*

L'étoile A étant l'étoile principale des constantes $F(a)\,, F^{(1)}(a)\,, \ldots, F^{(\mu)}(a)\,, \ldots$ assujetties à la condition de Cauchy, chacune des trois expressions

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(a\,,\ \omega(x-a))\,d\omega; \qquad \mathfrak{F}(a\,,\ \omega(x-a)) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{F^{(\mu)}(a)}{(\underline{|\mu})^3} (\omega(x-a))^{\mu},$$

$$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}},$$

$$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\mu=0}^{x} \frac{\int_0^{\infty} e^{-\omega} \omega^{\mu}\, d\omega}{(\underline{|\mu})^2} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}$$

aura l'étoile de Borel pour étoile de convergence et l'égalité

$$FA^{(1)}(x) = \int_0^{x} e^{-\omega} \mathfrak{F}(a\,,\ \omega(x-a))\,d\omega$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\mu=0} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}} F^{(\mu)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\mu=0}^{x} \frac{\int_0^{\infty} e^{-\omega} a^{\mu}\, d\omega}{(\underline{|\mu})^2} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}$$

aura lieu partout à l'intérieur de l'étoile de Borel.

Si l'on s'arrête dans le passage à l'infini à un nombre déterminé fini on aura l'égalité

$$FA^{(1)}(x) = \int_0^\omega e^{-\omega}\mathfrak{F}(a\,,\,\omega(x-a))d\omega + \int^{\mathfrak{C}} \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy$$

$$= e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\nu}\left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int^{\mathfrak{C}} \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{\int_0^\infty e^{-\omega}\omega^{\mu}d\omega}{(\underline{|\mu})^2} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} + \frac{1}{2\pi i}\int^{\mathfrak{C}} \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy$$

où l'intégrale $\int^{\mathfrak{C}}$ *est prise dans le sens positif et où* $\mathfrak{C}$ *désigne une circonférence de centre* $\frac{1}{2}$ *et de rayon* $\frac{1}{2}r$ $(r > 1)$ *en sorte que* $a + (x-a)y$ *appartient à l'intérieur de* $A^{(1)}$.

Revenons maintenant à l'étude de l'intégrale générale

(23) $$\frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{F(a + (x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u} e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)} dy\,.$$

Nous donnerons à $f(y\,|\,\alpha)$ la même signification qu'au premier paragraphe et nous supposerons comme dans ce paragraphe que S représente le contour d'une surface simplement connexe pour laquelle $f(y\,|\,\alpha)$ ainsi que $F(a + (x-a)f(y\,|\,\alpha))$ sont des fonctions monogènes et régulières et qui renferme dans son intérieur les deux points $y = 0$, $y = u$. On a:

$$F(a + (x-a)f(u\,|\,\alpha))$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u} e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)} dy + \frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u} e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)} dy$$

et encore

$$-\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}dy=-\frac{e^{-\omega}}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u}dy$$

$$-\frac{e^{-\omega}\omega}{\underline{|1}}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)dy-\frac{1}{2\pi i}\frac{e^{-\omega}\omega^2}{\underline{|2}}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^2dy$$

$$-\ldots-\frac{1}{2\pi i}\frac{e^{-\omega}\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^{\mu+1}dy-\ldots$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{e^{-\omega}\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^{\mu+1}dy.$$

Par conséquent en vertu de (7):

$$-\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}dy$$

$$=e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\Bigg(F(a)+\frac{g_{1\mu}(u\,|\,\alpha)}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\frac{g_{2\mu}(u\,|\,\alpha)}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^{\mu}+\ldots$$

$$+\frac{g_{\mu\mu}(u\,|\,\alpha)}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\Bigg)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$

$$=e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\Bigg(F(a)+\sum_{\nu=1}^{\mu}\frac{u^{\nu}}{\underline{|\nu}}\Bigg(F^{(1)}(a)(x-a)+\frac{D^{\nu}f^{2}}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^{2}+\ldots$$

$$+\frac{D^{\nu}f^{\nu}}{\underline{|\nu}}F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}\Bigg)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}\Bigg).$$

Et par suite

$$F(a+(x-a)f(u\,|\,\alpha)) \tag{48}$$

$$=e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\Bigg(F(a)+\frac{g_{1\mu}(u\,|\,\alpha)}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\ldots+\frac{g_{\mu\mu}(u\,|\,\alpha)}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\Bigg)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}dy$$

ou en mettant $u = 1$

$$(49) \qquad F(x)$$

$$= e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a) + \frac{a_{1\mu}(a)}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{a_{\mu\mu}(a)}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,a))}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy.$$

On voit l'analogie parfaite avec la formule (27). Employons maintenant la fonction génératrice $f(u\,|\,\alpha)$ où u décrit une circonférence ayant pour diamètre la ligne droite comprise entre zéro et un pour former une étoile $\mathfrak{A}^{(a)}$ inscrite dans l'étoile principale A des constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(\mu)}(a)$, ... On voit que cette étoile est circonscrite à l'étoile $A^{(a)}$ obtenue en faisant décrire à u la circonférence $|u| = 1$ et qu'elle ne coincide avec $A^{(a)}$ qu'en des cas spéciaux.

En prenant maintenant pour contour S une circonférence $\mathfrak{C}$ de centre $y = \frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}r$, $(r > 1)$, on obtient:

$$(50) \qquad F\mathfrak{A}^{(a)}(x)$$

$$= e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a) + \frac{a_{1\mu}(a)}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{a_{\mu\mu}(a)}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int^{\mathfrak{C}}\frac{F(a+(x+a)f(y\,|\,a))}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy,$$

égalité valable pour chaque domaine X à l'intérieur de $\mathfrak{A}^{(a)}$ pourvu que l'on choisisse r suffisamment rapproché de l'unité. De la même manière que l'on a demontré l'égalité (35) on demontre encore la suivante

$$(51) \qquad \lim_{\omega=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathfrak{C}}\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,a))}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy = 0.$$

On a donc:

$$(52) \qquad F\mathfrak{A}^{(a)}(x)$$

$$= \lim_{\omega=\infty}e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a) + \frac{a_{1\mu}(a)}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{a_{\mu\mu}(a)}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}},$$

égalité valable pour chaque domaine à l'intérieur de $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$. L'expression dans le second membre est uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de l'étoile $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$. On voit que cette formule est la généralisation directe de la formule (36) de M. BOREL.

On obtient facilement une généralisation analogue des formules (37) et (38). On a:

$$(53)\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y|\alpha))}{y-u}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}dy\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y|\alpha))}{y-u}dy\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y|\alpha))}{y}\left(\int_0^{\omega}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}d\omega\right)dy\\
&=F(a+(x-a)f(y|\alpha))-\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y|\alpha))}{y}\left(\int_0^{\omega}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}d\omega\right)dy.
\end{aligned}\right.$$

On a encore:

$$(54)\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(a+(x-a)f(y|\alpha))}{y}\left(\int_0^{\omega}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}d\omega\right)dy\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(a+(x-a)f(y|\alpha))}{y}\left(\int_0^{\omega}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}d\omega\right)dy\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\Big[F(a)+\frac{1}{1}F^{(1)}(a)(x-a)f(y|\alpha)\\
&\qquad+\frac{1}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2f(y|\alpha)^2+\dots\Big]\left(\int_0^{\omega}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}d\omega\right)\frac{dy}{y}.
\end{aligned}\right.$$

La fonction $f(y|\alpha)$ s'annulant pour $y=0$ nous avons (c. f. (8)

$$(55)\qquad f(y|\alpha)^{\nu}=\frac{D^{\nu}f^{\nu}}{\underline{|\nu}}y^{\nu}+\frac{D^{\nu+1}f^{\nu}}{\underline{|\nu+1}}y^{\nu+1}+\frac{D^{\nu+2}f^{\nu}}{\underline{|\nu+2}}y^{\nu+2}+\dots.$$

Par suite

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} f(y\,|\,\alpha)^{\nu}\left(\int_0^{\omega} e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}d\omega\right)\frac{dy}{y}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\left(\frac{D^{\nu}f^{\nu}}{\underline{|\nu}}y^{\nu}+\frac{D^{\nu+1}f^{\nu}}{\underline{|\nu+1}}y^{\nu+1}+\frac{D^{\nu+2}f^{\nu}}{\underline{|\nu+2}}y^{\nu+2}+\ldots\right)$$

$$\times\left(\int_0^{\omega}\left(1+\frac{1}{\underline{|1}}\frac{\omega u}{y}+\frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{\omega u}{y}\right)^2+\frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{\omega u}{y}\right)^3+\ldots\right)e^{-\omega}d\omega\right)\frac{dy}{y}$$

$$=\int_0^{\omega} e^{-\omega}\left(\frac{D^{\nu}f^{\nu}}{(\underline{|\nu})^2}(\omega u)^{\nu}+\frac{D^{\nu+1}f^{\nu}}{(\underline{|\nu+1})^2}(\omega u)^{\nu+1}+\frac{D^{\nu+2}f^{\nu}}{(\underline{|\nu+2})^2}(\omega u)^{\nu+2}+\ldots\right)d\omega$$

d'où en faisant

$$(56)\qquad f_{\nu}(\omega u\,|\,\alpha)=\frac{D^{\nu}f^{\nu}}{(\underline{|\nu})^2}(\omega u)^{\nu}+\frac{D^{\nu+1}f^{\nu}}{(\underline{|\nu+1})^2}(\omega u)^{\nu+1}+\frac{D^{\nu+2}f^{\nu}}{(\underline{|\nu+2})^2}(\omega u)^{\nu+2}+\ldots$$

il vient

$$(57)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} f(y\,|\,\alpha)^{\nu}\left(\int_0^{\omega} e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}d\omega\right)\frac{dy}{y}=\int_0^{\omega} e^{-\omega}f_{\nu}(\omega u\,|\,\alpha)\,d\omega.$$

Par conséquent

$$(58)\quad\left\{\begin{aligned}&F(a+(x-a)f(u\,|\,\alpha))=\int_0^{\omega}e^{-\omega}d\omega\,.\,F(a)+\frac{\int_0^{\omega}e^{-\omega}f_1(\omega u\,|\,\alpha)\,d\omega}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)\\&+\frac{1}{2\pi i}\frac{\int_0^{\omega}e^{-\omega}f_2(\omega u\,|\,\alpha)\,d\omega}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\frac{\int_0^{\omega}e^{-\omega}f_3(\omega u\,|\,\alpha)\,d\omega}{\underline{|3}}F^{(3)}(a)(x-a)^3+\cdots\\&\qquad+\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{F(a+(x-a)f(y\,|\,\alpha))}{y-u}e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)}dy\end{aligned}\right.$$

ou en introduisant:

(59) $$\mathfrak{F}(x, f, \omega) = F(a) + \frac{f_1(\omega \mid \alpha)}{|\underline{1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f_2(\omega \mid \alpha)}{|\underline{2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots,$$

(60) $$F(a + (x-a)f(u \mid \alpha))$$

$$= \int_0^\omega e^{-\omega} \mathfrak{F}(x, f, \omega u) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{F(x + (x-u)f(y \mid \alpha))}{y-u} e^{\omega\left(\frac{u}{y}-1\right)} dy.$$

En faisant $\alpha = 1$, on obtient $f(y \mid \alpha) = y$. La fonction $\mathfrak{F}(x \mid f, \omega)$ devient en ce cas la fonction qui a été désignée auparavant par

$$\mathfrak{F}(a, \omega(x-a)); \qquad \text{[c. f. (32)}$$

et on obtient l'égalité

(61) $$\mathfrak{F}(x \mid f, \omega) = \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)).$$

En employant la terminologie d'Abel la nouvelle fonction $f_\nu(\omega u \mid \alpha)$ que nous venons d'introduire n'est autre chose que la fonction génératrice d'Abel à fonction déterminante $f(u \mid \alpha)^\nu$. On a donc l'égalité

(62) $$f(u \mid \alpha)^\nu = \int_0^\omega e^{-\omega} f_\nu(\omega u \mid \alpha) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{f(uy \mid \alpha)^\nu}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy$$

qui mérite d'être signalée.

Choisissons maintenant pour contour S la circonférence $\mathfrak{C}$ définie précédemment (page 373) et en faisant $u = 1$ nous obtiendrons au lieu des formules (58) et (60), les deux suivantes:

(63) $$F\mathfrak{A}^{(\alpha)}(x) = \int_0^\omega e^{-\omega} d\omega \,.\, F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int_0^\omega e^{-\omega} f_\nu(\omega \mid \alpha) d\omega}{|\underline{\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int^{\mathfrak{C}} \frac{F(a + (x-a)f(y \mid \alpha))}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy,$$

(64) $$F\mathfrak{A}^{(\alpha)}(x) = \int_0^\omega e^{-\omega} \mathfrak{F}(x \mid f, \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int^{\mathfrak{C}} \frac{F(a + (x-a)f(y \mid \alpha))}{y-u} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy$$

valables pour chaque domaine X à l'intérieur de $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ pourvu que l'on prenne la quantité r qui définit le cercle $\mathfrak{C}$ suffisamment rapprochée de l'unité.

On obtient encore les deux formules:

$$(65) \qquad F\mathfrak{A}^{(\alpha)}(x) = F(a) + \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{r} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega} f_\nu(\omega \mid \alpha) d\omega}{|\underline{\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu,$$

$$(66) \qquad F\mathfrak{A}^{(\alpha)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x \mid f, \omega) d\omega$$

valables pour chaque domaine à l'intérieur de $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$. Les expressions du second membre sont uniformément convergentes pour chaque domaine à l'intérieur de l'étoile $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$.

On doit rapprocher ces deux formules (65) et (66) de la formule (52) obtenue précédemment.

Ces trois formules forment ensemble la généralisation directe des trois formules (36), (37), (38).

On aurait encore pu obtenir les formules (65), (66) en faisant subir à la formule (52) la même transformation que nous avons fait subir à (27) pour en déduire les formules (30) et (33).

Il reste encore une question très importante à éclaircir.

L'étoile $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ était une étoile de convergence dans le cas $\alpha = 1$. Est-ce encore une étoile de convergence pour les trois expressions (52), (65), (66) dans le cas général où $0 < \alpha \leqq 1$?

C'est effectivement ce qui a lieu et la démonstration n'est qu'une répétition de la démonstration de M. Phragmén dans le cas $\alpha = 1$. En effet supposons que l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x_0 \mid f, \omega) d\omega$ soit convergente c'est à dire que l'expression

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x_0 \mid f, \omega u) d\omega = \frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-\frac{w}{u}} \mathfrak{F}(x_0 \mid f, w) dw$$

soit convergente pour $u = 1$. D'après le théorème de M. Phragmén l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{w}{u}} \mathfrak{F}(x_0 | f, w) dw$$

sera uniformément convergente pour $R\left(\frac{1}{u} - 1\right) \geqq \varepsilon$, où ε est une quantité positive aussi petite que l'on voudra, ce qui revient a dire que l'intégrale est uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur d'un cercle décrit par la variable u et ayant le vecteur (01) pour diamètre. L'intégrale est donc une fonction monogène et régulière de u partout à l'intérieur de ce cercle. Mais $|u|$ étant choisi suffisamment petit $f(u|\alpha)$ s'approche autant qu'on le veut de zéro et l'égalité

$$F(a + (x_0 - a)f(u|\alpha)) = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x_0 | f, \omega u) d\omega \qquad \text{[c. f. (60)]}$$

a lieu. Il s'en suit que, u étant un point à l'intérieur du cercle ayant (01) pour diamètre, $F(a + (x - a)f(u|\alpha))$ sera une fonction monogène et régulière de $z = a + (x - a)f(u|\alpha)$ tant que x sera un point situé sur le vecteur (ax_0) entre a et x_0.

Par conséquent x_0 est ou un sommet ou un point intérieur à l'étoile $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$. La démonstration que nous avons employée pour l'expression (66) s'étend d'elle-même à l'expression (65). Elle s'étend à l'expression (52) si l'on se sert d'une transformation analogue à celle employée dans le cas de la formule (42).

Maintenant en faisant tendre la constante α vers zéro on obtient les expressions qui suivent, valables partout à l'intérieur de l'étoile A qui sera leur étoile de convergence.

$$(59) \quad \begin{cases} FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(F(a) + \frac{a_{1\mu}(\alpha)}{1!} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{a_{\mu\mu}(\alpha)}{\mu!} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right) \frac{\omega^{\mu+1}}{(\mu+1)!} \\ \quad = F(a) + \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\propto} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega} f_{\nu}(\omega|\alpha) d\omega}{\nu!} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu} \\ \quad = \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x | f, \omega) d\omega \end{cases}$$

Les expressions que nous avons obtenues dans ce paragraphe pour $F\mathfrak{A}^{(\alpha)}(x)$ $[0 < \alpha \leq 1]$ sont toutes plus compliquées que les expressions du paragraphe précédent en ce sens que ce sont des expressions limites doubles tandis que nos expressions dans le premier paragraphe ne sont que des expressions limites simples.

Les expressions pour $FA(x)$ dans le premier paragraphe sont des expressions limites doubles tandis qu'elles deviennent dans le paragraphe actuel des expressions limites triples. Nous savons déjà qu'il est impossible d'exprimer $FA(x)$ par une expression limite simple si l'on veut conserver à l'étoile A la propriété d'être dans tous les cas une étoile de convergence.[1]

Les résultats que nous avons obtenus dans ce paragraphe peuvent être résumés dans le théorème suivant:

Théorème 7 b. *Désignons par A une étoile de centre a, par α une quantité positive plus petite que l'unité et par $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ une étoile concentrique à A et inscrite dans A et engendrée par la fonction génératrice $f(u \mid \alpha)$ où u décrit une circonférence ayant pour diamètre la ligne droite comprise entre zéro et un et qui par conséquent, $f(u \mid \alpha)$ étant choisi convenablement, sera circonscrite à l'étoile $A^{(\alpha)}$ obtenue par l'intermédiaire de la même fonction génératrice quand u décrit une circonférence de centre a et de rayon un. On pourra toujours choisir $f(u \mid \alpha)$ telle que α étant suffisamment petit $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ renferme dans son intérieur tout domaine situé à l'intérieur de A et telle que pour $\alpha = 1$ l'étoile $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ devienne l'étoile de Borel* (théorème 7 a).

On pourra encore choisir $f(u \mid \alpha)$ telle que, A étant l'étoile principale des constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a)$, ..., $F^{(\mu)}(a)$, ... assujetties à la condition de Cauchy, les expressions limites suivantes:

$$\text{(A)} \qquad \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{a_{1\mu}(\alpha)}{\lfloor 1} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{a_{\mu\mu}(\alpha)}{\lfloor \mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\lfloor \mu+1}$$

[1] Emile Borel. *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles.*
Addition au mémoire sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles. Ce journal. T. 24.

où $\alpha_{\mu\mu}(\alpha)$ $\begin{bmatrix}\mu = 1, 2, \ldots, n \\ n = 1, 2, 2, \ldots, \infty\end{bmatrix}$ *sont des constantes positives déterminées qui ayant toutes la double propriété* $\alpha_{\mu n}(1) = 1$, $\lim\limits_{n=\infty} \alpha_{\mu n}(\alpha) = 1$ *ne dépendent que de la fonction génératrice,*

$$\text{(B)} \qquad F(a) + \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int\limits_0^{\omega} e^{-\omega} f_\nu(\omega \mid a) d\omega}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$$

où

$$f_\nu(\omega \mid \alpha) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{D^\mu f^\nu}{(\underline{|\mu})^2} \omega^\mu; \qquad D^\mu f^\nu = \left[D^\mu (f(u \mid \alpha))^\nu\right]_{u=0};$$

et

$$\text{(C)} \qquad \int\limits_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x \mid f, \omega) d\omega$$

où

$$\mathfrak{F}(x \mid f, \omega) = F(a) + \frac{f_1(\omega \mid a)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f_2(\omega \mid a)}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \ldots.$$

possèdent toutes les trois une étoile de convergence forcément toujours la même et identique à $\mathfrak{A}^{(a)}$. *De plus l'égalité*

$$\begin{aligned} FA(x) &= \lim_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \Bigg(F(a) + \frac{a_{1\mu}(a)}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots \\ &\qquad + \frac{a_{\mu\mu}(a)}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \Bigg) \frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}} \\ &= F(a) + \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int\limits_0^{\omega} e^{-\omega} f_\nu(\omega \mid a) d\omega}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \\ &= \int\limits_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x \mid f, \omega) d\omega \end{aligned}$$

aura lieu partout à l'intérieur de $\mathfrak{A}^{(a)}$.

Les expressions limite triples:

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{a_{1\mu}(\alpha)}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{a_{\mu\mu}(\alpha)}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$

$$F(a)+\operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\int_0^{\infty}e^{-\omega}f_\nu(\omega\,|\,\alpha)\,d\omega}{\underline{|\nu}}F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}$$

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\int_0^{\infty}e^{-\omega}\mathfrak{F}(x\,|\,f,\,\omega)\,d\omega$$

ont toutes une étoile de convergence identique à l'étoile A, et l'égalité

$$FA(x)=\operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{a_{1\mu}(\alpha)}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{a_{\mu\mu}(\alpha)}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$
$$=F(a)+\operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\int_0^{\infty}e^{-\omega}f_\nu(\omega\,|\,\alpha)\,d\omega}{\underline{|\nu}}F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}$$
$$=\operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\int_0^{\infty}e^{-\omega}\mathfrak{F}(x\,|\,f,\,\omega)\,d\omega$$

aura lieu partout à l'intérieur de A.

Si on s'arrête dans le passage à l'infini à un nombre déterminé fini ω on aura, en désignant par $\mathfrak{C}$ une circonférence de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}r$ $(r>1)$, l'égalité

$$F\mathfrak{A}^{(\alpha)}(x)=e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{a_{1\mu}(\alpha)}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{a_{\mu\mu}(\alpha)}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$

$$= F\mathfrak{A}^{(a)}(x) - \int_0^{\omega} e^{-\omega} d\omega \,.\, F(a) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int\limits_0^{\omega} e^{-\omega} f_\nu(\omega \mid a) d\omega}{\underline{\nu}} F^{(\nu)}(a)(x - a$$

$$= F\mathfrak{A}^{(a)}(x) - \int_0^{\omega} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x \mid f, \omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int^{\mathfrak{C}} \frac{F(a + (x-a) f(y \mid a))}{y - 1} e^{\omega\left(\frac{1}{y} - 1\right)} dy$$

qui aura lieu tant que x est un point tel que $a + (x - a) f(y \mid a)$ appartienne à l'intérieur de $\mathfrak{A}^{(a)}$ quand y décrit le contour de $\mathfrak{C}$.[1]

---

[1] Outre les travaux indiqués à la page 353 ont paru après la publication de la troisième note de mon mémoire les travaux suivants qui s'y rapportent:

Le Roy. *Sur les séries divergentes: rectification à une note précédente.* (Comptes rendus etc. 5 juin 1900.)

Le Roy. *Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor.* (Annales de la fac. des sciences de Toulouse. Tome II. Année 1900. Pag. 322—328.)

Emile Borel. *Les séries absolument sommables, les séries (M) et le prolongement analytique.* (Comptes rendus etc. 19 novembre 1900.)

Emile Borel. *Sur la généralisation du prolongement analytique.* (Comptes rendus etc. 21 juillet 1902.)

P. Painlevé. *Observations sur la communication précédente.* (Comptes rendus etc. 21 juillet 1902.)

Emile Borel. *Leçons sur les séries à termes positifs.* Paris 1902. Ch. VI. Pag. 90.

ON THE DISCONTINUITY OF ARBITRARY CONSTANTS THAT APPEAR AS MULTIPLIERS OF SEMI-CONVERGENT SERIES.

(A letter to the Editor.)

BY

G. G. STOKES
of CAMBRIDGE.

Cambridge, 23 April, 1902.

Dear Sir,

I regret that from circumstances which I need not detail the invitation with which you honoured me to write something for the collection of papers which are being put together in commemoration of ABEL has remained so long without reply.

At my age you will perhaps hardly expect me to produce something new and original. The subject ought to be one of pure mathematics, for it is in honour of ABEL, and most of my work refers to applications of mathematics. There is one thing I thought might perhaps do, but it has, I fear, been too long before the public to make it suitable. However, it is published in the Proceedings or Transactions of the Cambridge Philosophical Society, which are not, I believe, so widely known as many other serial works. I thought that just a short résumé of my results might not be wholly uninteresting.

The subject is the discontinuity of arbitrary constants that appear as multipliers of semi-convergent series, the variable according to powers of which the series proceed being a mixed imaginary. My results are con-

tained in three papers read before the Cambridge Philosophical Society in the years 1857, 1868 and 1889, which are published respectively in the Cambridge Philosophical Transactions Vol. X, p. 105, the Transactions Vol. XI, p. 412, and the Proceedings Vol. VI, p. 362. In these papers I have for the most part confined myself to the complete integral of the differential equation of the second order which is satisfied by Bessel's Functions; an equation which without loss of generality may be put under the form

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{n^2}{x^2}y = y.$$

The variables x and y are taken to be mixed imaginaries, but I have confined myself to the case in which n is real. Although I have, as I said, limited myself to the integral of that particular differential equation, the method is, I believe, of much wider application. I have not taken n integral but (subject to the its being real) general. Putting $x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, I suppose the range of r and θ defined by the imparities

$$0 < r < \infty, \qquad -\infty < \theta < \infty.$$

It is well known that the integral of (I) may be put under the form

$$(2) \qquad y = Ax^n\left(1 + \frac{x^2}{2(2+2n)} + \ldots\right) + Bx^{-n}\left(1 + \frac{x^2}{2(2-2n)} + \ldots\right)$$

$$= AU + BV, \text{ say,}$$

or under the form

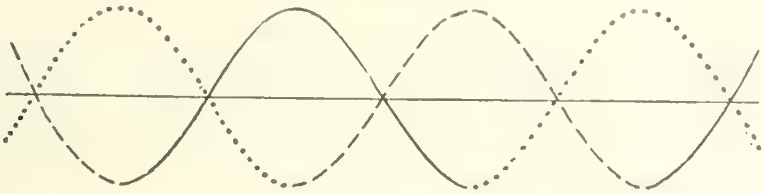
$$(3) \qquad y = Cx^{-\frac{1}{2}}e^x\left(1 + \frac{1^2-(2n)^2}{8x} + \ldots\right) + Dx^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\left(1 - \frac{1^2-(2n)^2}{8x} + \ldots\right)$$

$$= Cu + Dv, \text{ say.}$$

The series (2) are always convergent, and completely define the function y over the whole range, but are not available for calculation when r is large, as they begin by diverging rapidly. The series (3) are always divergent (save when $2n$ is an odd integer, when they terminate), but begin by converging rapidly when r is large. But it is easy to see that (3) cannot be equivalent to (2) over the whole range of θ unless the constants C,

D have different values in different parts of the range. I have shown where and how they change discontinuously.

Of the functions u, v, let that be called the superior which has the real part of the index of the exponential positive, and that the inferior which has it negative. As θ increases in one direction, the functions u, v become alternately the superior and the inferior. I have shown that as θ changes, the constant C or D can only change when the index of the exponential in the function it multiplies is real and negative; and the change it then suffers is proportional, other circumstances being the same, to the coefficient of the other term, which of course is for that value of θ the superior term. The way in which the constants change with the value of θ may be illustrated by a pair of curves of sines drawn with inks of different colours (or else distinguished by a difference of marking) in the different parts. The ordinates may be taken to represent, for a



given value of r, the way in which the real part of the index changes with θ. A change of the coefficient is represented by a change in the colour of the ink (or of the marking of the line) with which the curves are drawn. The nature of the change is that in crossing, in the positive direction, one of the critical points represented by a change of colour or marking, the coefficient (C or D as the case may be) of the inferior term is increased by $2i \cos n\pi$, multiplied by the coefficient of the superior term.

The way in which the paradox of giving a discontinuous expression for a continuous function is explained is this. A semi-convergent series (considered numerically, and apart from its analytical form) defines a function only subject to a certain amount of vagueness, which is so much the smaller as the modulus of the variable according to inverse powers of which it proceeds is larger. I have shown that, in general (i. e. for general values of θ), the vagueness of the superior function ultimately, as r is increased, disappears in comparison with the whole value of the inferior term. But for the critical values of θ for which the index of the ex-

ponential is real the vagueness of the superior function becomes sufficient to swallow up the inferior function. As θ passes through the critical value, the inferior term enters as it were into a mist, is hidden for a little from view, and comes out with its coefficient changed. The range during which the inferior term remains in a mist decreases indefinitely as the modulus r increases indefinitely.

We know the value of $Cu + Dv$, that is we know the values of C and D, for all values of θ provided we know them for a half period, say for $0 < \theta < \pi$; and it follows from what has been said that for the determination of C and D in terms of A and B we may take any value or values of θ within or at the edge of that range that we find convenient.

Suppose that in the neighbourhood of $\theta = 0$ we have only an inferior term Dv, C being 0, and that for $\theta = 0$ we can express D in terms of A and B. Then Dv will be a function continuous within the range $-\pi < \theta < \pi$. Again suppose that in the neighbourhood of $\theta = \pi$ we have only an inferior term Cu, D being 0, and that we express C in terms of A and B for $\theta = \pi$. Then Cu will express a continuous function within the range $0 < \theta < 2\pi$. Now superpose these results, and $Cu + Dv$, in which C and D have been expressed in terms of A and B, will express a function continuous within the range $0 < \theta < \pi$.

When there is only an inferior term Dv in the neighbourhood of $\theta = 0$, then D is constant for the range $-2\pi < \theta < 2\pi$, though it is only within the range $-\pi < \theta < \pi$ that Dv represents the continuous function y. Let the known integral of (I) in definite integrals P, Q be $EP + FQ$; then within the range last mentioned $Dv = EP + FQ$, and we may determine D in terms of E and F by putting $\theta = 0$. Similarly if in the neighbourhood of $\theta = \pi$ there is only an inferior term Cu, we may determine C in terms of E and F for the range $0 < \theta < 2\pi$ by putting $\theta = \pi$. And putting the two together we have $(0u + Dv) + (Cu + 0v)$, or $Cu + Dv$, equal to $EP + FQ$ within the range $0 < \theta < \pi$ provided C and D are two known linear functions of E and F. And as the linear relations between E, F and A, B are easily found, we have by eliminating E and F two linear relations between C, D and A, B which will make $Cu + Dv = AU + BV$ within the range $0 < \theta < \pi$, from whence can be found the relations between A, B in the ascending and C, D in the descending series for all values of θ.

But as I showed in my third paper these relations can be found *directly from the series* (2) and (3), by taking the *superior* terms for $\theta = 0$ and for $\theta = \pi$, the first giving C for the range $-\pi < \theta < \pi$, and the second giving D for the range $0 < \theta < 2\pi$, so that we need not know that it is possible to express the complete integral of (1) by means of definite integrals in the form $EP + FQ$. And this method I believe is of very general application.

I remain, Dear Sir, with the highest respect,

Yours very faithfully

G. G. STOKES.

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 26. — 1902. — TOME 26.